



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

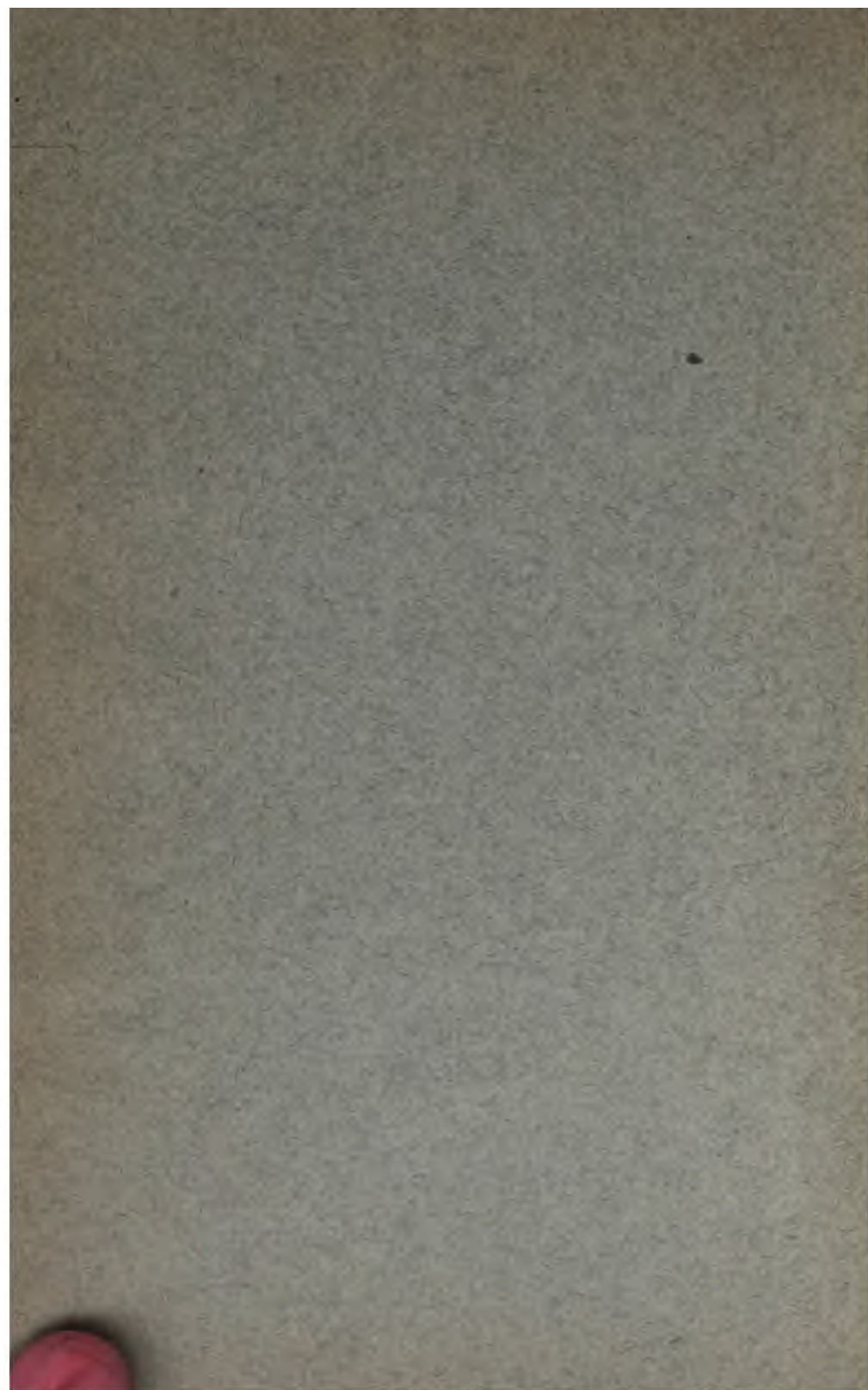
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



B
20
16
1900



III

Logique

et

Histoire des Sciences

BIBLIOTHÈQUE
DU
CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE

I. Philosophie générale et Métaphysique.	12 fr. 50
II. Morale	12 fr. 50
III. Logique et Histoire des sciences.	25 fr. »
IV. Histoire de la Philosophie.	12 fr. 50

**Droits de traduction et de reproduction réservés pour tous les pays,
y compris la Hollande, la Suède et la Norvège.**

I

International congress of philosophy. 1st, Paris, 1900

BIBLIOTHÈQUE DU CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE

III

Logique

et

Histoire des Sciences

105232.



PARIS

Librairie Armand Colin

5, rue de Mézières, 5

1901

Tous droits réservés.

AVERTISSEMENT

Nous avons cru devoir déroger dans ce volume à la règle adoptée pour les autres, où les mémoires sont rangés suivant l'ordre alphabétique des noms des auteurs. Il nous a paru qu'un ordre logique était préférable, du moment qu'il était possible. Or il nous était fourni par la classification des sciences généralement admise. Nous l'avons donc observé dans chacune des subdivisions de ce volume (*Histoire des sciences*, puis *Logique des sciences*), et nous avons placé à la fin deux mémoires contenant des considérations générales sur l'ensemble des sciences. En groupant ainsi les mémoires qui traitent la même question ou des questions connexes, nous espérons en avoir rendu la lecture plus facile et plus instructive, et nous croyons que l'ordre adopté donnera lieu à des rapprochements intéressants.

ERRATA

P. 111, ligne 12, *lire* : $f(v_2, t_2) - f(v_1, t_1)$.

P. 154, 6^e ligne du bas, *lire* : Fig. 5.

P. 164, ligne 16, *lire* : $\frac{\alpha\beta}{x} = \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{\beta}{xx}$

P. 166, 3^e ligne du bas, *lire* : A_{B}^{C}

P. 174, 6^e ligne du bas, *lire* : $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 1$.

P. 199, 6^e ligne du bas, *lire* : $t_n \notin a_r$.

P. 203, note 1, ligne 2, *lire* : $2' = \dots$

P. 306, lignes 13-14, *lire* : Le mot « nombre irrationnel » est traduit par « Q_0 qui ne sont pas R_0 ».

P. 349, 7^e ligne du bas, *lire* : $(\text{sym } a) \cdot (\text{sym } b) = \dots$

HISTOIRE DES SCIENCES

ORIGINES DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par MORITZ CANTOR,

Professeur à l'Université de Heidelberg.

Les origines du Calcul infinitésimal ! Entendons-nous bien sur le sens de ce sujet, sur lequel votre Comité d'organisation m'a confié le rapport, afin que vous ne vous attendiez pas à tout autre chose que ce que je puis vous offrir, et que vous n'en soyez d'autant plus désappointés. Au risque de m'éteindre dans vos bonnes grâces et de faire naître la question, pourquoi dans ces circonstances je prends la parole dans votre assemblée, je vous avouerai que je ne suis pas philosophe. La question que je présuppose ne devra donc pas s'adresser à moi, mais à votre Comité. Les ouvrages par lesquels j'ai pu attirer sur moi son attention sont purement historiques, et c'est en connaissance de cause qu'on m'a fait rapporteur, je pourrais dire rapporteur malgré moi, et j'aurais le droit de continuer : « Tu l'as voulu, George Dandin ». Je suis historien, historien des mathématiques, et en cette qualité je compte vous faire part, dans une esquisse aussi restreinte que possible, de la

manière dont on a cherché en Mathématiques à s'occuper des questions qui pour leur solution ont besoin du Calcul infinitésimal.

Maintenant quelles sont ces questions? On doit en distinguer deux groupes. Ce qu'il y a de constant dans la nature, c'est sa variabilité. Rien ne surgit de soi-même, rien ne se perd ici-bas, tout change et se reproduit. En cherchant à connaître les lois selon lesquelles la variabilité des choses a lieu, on peut, ou bien demander quel sera le changement d'un état actuel connu, ou bien quel état précédent répond à un changement connu. C'est le Calcul différentiel qui de nos jours s'occupe des questions du premier ordre, tandis que celles du second ordre sont du domaine de notre Calcul intégral. Le Calcul différentiel et le Calcul intégral réunis constituent le Calcul infinitésimal.

Or, quoique des questions des deux groupes se soient présentées aux penseurs depuis plus de deux mille ans, il est curieux qu'on n'a au commencement inventé des méthodes que pour ce que je viens de nommer les questions du second ordre. Le Calcul intégral est, du moins par le fond de ses idées, de beaucoup de siècles l'aîné des deux frères, mais le cadet, le Calcul différentiel, a eu une croissance tellement rapide, que dès aujourd'hui il semble avoir atteint toute la hauteur à laquelle il peut parvenir, tandis que l'aîné, le Calcul intégral, tend encore à grandir et doit le faire afin de parvenir au niveau des phénomènes qui en dépendent.

Laissez-moi citer deux exemples tirés de l'antiquité. Une

droite coupant une ligne courbe peut avoir avec elle deux et même plus de points d'intersection, alors on l'appelle une sécante de la courbe. Prenons un point d'intersection comme fixe et longeons la courbe jusqu'à ce que nous arrivions à un nouveau point d'intersection de la moindre distance curviligne avec le premier. Il est évident que cette moindre distance curviligne peut dans certains cas devenir nulle. On donne à une pareille sécante le nom de *tangente*, et elle nous fait connaître la direction imprimée dans un certain instant à un point décrivant la courbe d'un mouvement continu. Les anciens ont connu les tangentes tout comme nous les connaissons, mais en les envisageant d'une manière différente. EUCLIDE par exemple, en 300 environ avant l'ère chrétienne, a su mener la tangente à une circonférence; seulement pour lui elle n'était pas une sécante menée par deux points de distance curviligne nulle, elle était une droite n'ayant qu'un point en commun avec la circonférence, tandis que tous ses autres points se trouvent en dehors de cette courbe. Vous voyez bien que c'est une définition absolument différente de la définition actuelle, que le problème était tout autre pour Euclide que pour nous. Nous faisons, grâce à la définition actuelle de la tangente, du Calcul différentiel là où pour Euclide il n'y avait que de la planimétrie élémentaire.

J'emprunte le second exemple à ARCHIMEDE, mort pendant la prise de Syracuse par les Romains en 212, environ un siècle après Euclide. Le problème qu'il a osé attaquer était celui de mesurer le volume d'un ellipsoïde. Il l'a résolu en

établissant à l'intérieur de l'ellipsoïde ainsi qu'autour de lui une série de cylindres d'une hauteur minima dont il prit les sommes, le volume de l'ellipsoïde étant compris entre la somme des cylindres intérieurs et celle des cylindres extérieurs, qui toutes les deux différaient entre elles le moins possible. Ce qu'Archimède a fait dans ce cas, c'est du Calcul intégral, à la notation près.

Euclide, comme je viens de vous le dire, n'a pas conçu l'idée d'une droite réunissant deux points consécutifs d'une courbe et nous faisant voir la direction cachée dans le mouvement continu d'un point qui produit la courbe. Il ne faut pourtant pas croire que l'idée du continu ait échappé aux anciens. En remontant d'Euclide encore la moitié d'un siècle jusqu'à ARISTOTE, nous nous trouvons devant des locutions toutes modernes. L'infini, dit-il, n'est pas un état stable, mais la croissance elle-même, et le continu c'est la qualité des parties consécutives de posséder l'une et l'autre le même aboutissement par lequel elles se touchent. Ne croirait-on pas se trouver en face de l'introduction d'un traité de Calcul infinitésimal? Et je pourrais multiplier ces citations, si je n'avais hâte de passer à une autre époque.

Nous voici en 1300. La scolastique, enfant tardif de la dialectique d'Aristote, et dont le manque de fertilité prouve la sénilité de son origine, règne parmi les savants, y compris les mathématiciens. En ouvrant leurs écrits nous rencontrons des discussions sur le continu qui nous prouvent qu'il n'a pas cessé d'intéresser les penseurs. PIERRE DE DACIE compare la continuité à un état fluide. C'est le mot de

fluere dont il se sert pour dire que la ligne par son mouvement produit une surface, la surface un corps.

En Angleterre, BRADWARDINUS compose un traité spécial sur le continu. Il distingue le *continu permanent* dont les parties subsistent, c'est-à-dire le continu dans l'espace, du *continu successif* dont les parties se succèdent dans le temps, permettant de distinguer un antérieur d'un postérieur. Le continu permanent est divisible, quoique pas à l'infini. On arrive au point qui est *indivisible*, comme en divisant le temps en intervalles toujours moindres on arrive à l'instant, qui représente l'atome du temps. Si Bradwardinus sait distinguer deux sortes de continuité, il distingue aussi deux sortes d'infinité : *l'infini cathétique* et *l'infini syncathétique*. Le premier, c'est la grandeur illimitée, le second une grandeur permettant d'en imaginer une autre et toujours une autre plus grande, sans que cet agrandissement finisse jamais. L'infini syncathétique est donc l'infini pur et simple de nos jours, tandis que l'infini cathétique correspond plutôt à ce qu'aujourd'hui on est convenu d'appeler le transfini. La contrepartie de l'infini comme du transfini, c'est l'indivisible dont j'ai parlé tout à l'heure. Le continu n'est pas composé d'indivisibles, mais il s'en trouve à n'importe quel endroit. Enfin Bradwardinus ne manque pas de parler des *formes*, sujet de polémique très courant au XIII^e et au XIV^e siècle, dont heureusement je n'ai pas à vous dévoiler tout le mystère. Je puis m'en tenir à la remarque que la forme était comme qui dirait le concept intellectuel d'un fait sensible, des changements duquel il participait, de

sorte qu'on pouvait avoir une illustration graphique de leurs variations en employant certaines lignes nommées *latitudes* pour représenter l'intensité d'un phénomène à un certain moment. Vous voyez que nous approchons de l'idée fondamentale de la Géométrie analytique.

C'est NICOLE ORESME, évêque de Lisieux depuis 1377 jusqu'à 1382, qui le premier, autant que nous sachions, a compris jusqu'à un certain point qu'il s'agissait d'un problème de Géométrie. Il est vrai qu'il dit dans l'exorde de son traité qu'il s'est inspiré en partie des choses imaginées par les anciens, mais il réclame en même temps une autre portion pour lui-même, et comme nous ne savons pas de quels anciens il veut parler, comme il ne dit pas non plus au juste ce qu'il leur doit, c'est bien lui qu'il faut jusqu'à nouvel ordre créditer de ce qui est dû à son traité *des Latitudes*; et la sagacité dont Oresme a su faire preuve dans d'autres chapitres des Mathématiques ne dément nullement le rôle d'initiateur qu'on s'est accoutumé à lui prêter. Oresme, après avoir tracé une quantité de latitudes, dont les bouts inférieurs reposent sur une droite horizontale où l'on peut prendre des distances nommées *longitudes*, réunit leurs bouts supérieurs par une ligne brisée qui prend l'aspect d'une courbe, lorsque les latitudes très nombreuses se suivent d'autant plus près. Les latitudes elles-mêmes sont, comme les états qu'elles représentent, tantôt plus grandes, tantôt plus petites. Oresme remarque que la rapidité avec laquelle les latitudes croissent ou diminuent est minimum au point de culmination de la courbe

que je viens de décrire. C'est dire que dans ce point de culmination le quotient différentiel de l'ordonnée pris selon l'abscisse est nul. N'allons pourtant pas trop loin, et ne prétions pas à Oresme des idées qu'il n'a pu avoir. Le théorème en question, il ne l'a pas prouvé, il n'a même pas cherché à le prouver, pas plus qu'il n'a aperçu une relation calculable entre les latitudes et les longitudes correspondantes. Il a probablement regardé la figure qu'il avait dessinée, et par une intuition qui prouve son génie il y a vu ce qui avait échappé à mille autres qui avant lui comme après lui ont regardé la même figure, puis il a énoncé ce qu'il avait vu dans une phrase incomprise de ses contemporains, et par conséquent morte en naissant. Il ne suffit pas qu'une pensée soit émise, il faut qu'elle soit émise à temps.

Ce n'est que deux cent cinquante ans après Oresme qu'un mathématicien est revenu sur le théorème du changement imperceptible des ordonnées près du point de culmination d'une courbe, soit qu'il eût eu entre les mains l'ouvrage d'Oresme, dont des manuscrits se trouvaient dans la plupart des grandes bibliothèques en France comme en Allemagne, soit qu'il y fût parvenu par sa propre initiative. Il en était bien capable, lui, le novateur de l'Astronomie analytique, le découvreur des lois qui régissent le mouvement des planètes et qui, appelées de son nom, l'ont immortalisé, en un mot KEPLER. Là, dit-il, où un changement a lieu d'un moindre à un plus grand et de celui-ci derechef au moindre, la différence est jusqu'à un certain point insensible, et ceci selon une loi dérivant du cercle.

J'ai besoin d'expliquer tant soit peu les derniers mots de la phrase. EUCLIDE déjà a parlé de l'angle contenu entre la tangente d'une circonférence et cette circonférence même. Il a prouvé que cet angle est plus petit que n'importe quel angle rectiligne, mais il ne lui a pas donné de nom. PROCLUS, au milieu du v^e siècle, parle de l'angle de l'arc de cercle avec sa tangente sous la dénomination de *κερατοειδής*, semblable à une corne, ou *corniculaire* dans la version de Viète. Chez BRADWARDINUS nous rencontrons l'expression d'*angle de contingence*, et avant cet auteur CAMPANUS DE NOVARA, le célèbre éditeur des éléments d'Euclide, avait entrevu les difficultés logiques que présente cet angle mixte. Est-ce un angle, n'en est-ce pas un, lui qui est plus petit que tout angle rectiligne? C'est sous ce point de vue que, au xvi^e siècle, CARDANO et ses contemporains ont fait ressusciter la question. C'est à cette occasion que VIÈTE a dit, en 1593, que la circonférence n'était autre chose qu'un polygone d'un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits, et que la tangente, coïncidant avec un de ces côtés, ne pouvait faire aucun angle avec la circonférence. Il est plus que probable que KEPLER songeait à l'angle de contingence, à sa nullité en comparaison avec un angle rectiligne, lorsqu'il cite une loi dérivant du cercle qui montre le caractère minimum du changement de hauteur d'une courbe au-dessus de sa base au voisinage de son point de culmination.

La remarque de Kepler, que je viens d'expliquer, est introduite incidemment dans un ouvrage du plus haut

intérêt pour nous par son sujet principal. C'est la *Doliométrie* de KEPLER, publiée en 1616, qui s'occupe du volume des corps de révolution. Kepler prend pour point de départ les recherches d'Archimède, et il l'avoue franchement. Il désigne la première section de son ouvrage comme *Stéréométrie d'Archimède*, qu'il fait suivre du *Supplément d'Archimède*; mais quel progrès depuis Archimède! Archimède (c'est Kepler lui-même qui donne l'appréciation de sa méthode) s'est servi d'un procédé indirect, Kepler au contraire va droit au but. La circonférence consiste en autant de parties rectilignes qu'on peut y distinguer de points, leur nombre est donc infiniment grand. Sur chacune des parties prise comme base il existe un triangle rectangle qui se mesure par la moitié du produit de sa hauteur, soit du rayon de la circonférence, par la base, et la mesure de tous ces triangles additionnés, ou de la quadrature du cercle, est la moitié du produit du rayon par la longueur de la circonférence. C'est un point de vue très voisin de celui que Viète avait adopté pour analyser l'angle de contingence. Aujourd'hui ce sont des idées tellement répandues que nous avons de la peine à nous figurer que jadis elles étaient nouvelles et avaient besoin d'être proclamées. Ce que Viète avait osé pour la circonférence envisagée comme ligne, Kepler l'a fait pour son aire, il l'a fait aussi pour la sphère. Il fait consister la sphère en une infinité de corpuscules ayant tous leur sommet au centre de la sphère et représentant quelque chose comme un cône. Les bases quasi planes de ces cônes ont pour somme la surface

de la sphère. Le volume de la sphère se mesure donc par le tiers du produit du rayon par la surface.

Une fois que Kepler a employé cette méthode pour la sphère, il a le courage de la généraliser. Il se met en possession par elle des volumes des corps qu'Archimède avait étudiés, et, rassuré par la coïncidence des résultats, il ose s'avancer dans des régions encore inconnues. Il cherche le volume de certains corps de révolution nouvellement imaginés. Il est vrai que là son courage le trahit. Ses calculs, ses résultats sont parfois erronés, mais il a malgré tout frayé un chemin, qu'il ne s'agissait que de suivre avec plus de précaution que Kepler n'en a pris.

Si la *Doliométrie* de 1616 opérait la cubature d'un corps en prenant la somme de certains corpuscules, Kepler avait dès 1605 et 1609 trouvé la somme d'une série de fonctions trigonométriques multipliées par la différence moyenne de l'une à l'autre. Il a remarqué qu'à peu de chose près on pouvait admettre :

$$\frac{\sin 30^\circ - \sin 0}{30} [\sin 0 + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 30^\circ] = 1 - \cos 30^\circ$$

il a confirmé ce résultat en continuant plus loin la série des sinus. Nous dirions en langue moderne qu'il a trouvé :

$$\int_0^\varphi \sin \varphi . d\varphi = 1 - \cos \varphi$$

par un calcul dont la prolixité aurait effrayé tout autre que celui qui à la même époque calculait l'orbite de la planète Mars.

Nous ne pouvons quitter Kepler sans faire remarquer

que dans la *Doliométrie* on a rencontré aussi le premier exemple du problème inverse des tangentes, savoir : définir une courbe au moyen de propriétés données de la tangente.

Kepler fut suivi de près par CAVALIERI, auteur de la *Géométrie des indivisibles* de 1635. Je serais entraîné beaucoup trop loin, si je voulais approfondir l'origine des considérations de Cavalieri. Le mot d'*indivisibles* est scolastique. Le mot de *fluere*, qui ne va plus nous quitter, appartient à la même époque. PIERRE DE DACIE en a fait usage; il se trouve dans l'édition d'Euclide publiée par CLAVIUS en 1574, dans la description des logarithmes de NEPER de 1614. Il désigne un mouvement continu donnant naissance à une ligne, à une surface, à un corps. Cavalieri a certainement lu Clavius et Neper; il a lu Kepler qu'il cite dans sa préface; il a été en correspondance suivie avec Galilée qui s'occupait de méditations toutes pareilles. Il n'en est pas moins vrai que Cavalieri a dépassé ses devanciers de loin, qu'il est parvenu dans le courant de ses recherches jusqu'à reconnaître un théorème équivalent à la formule :

$$\int_0^a \frac{k b^n x^n}{a^n} dx = \frac{k a b^n}{n+1}.$$

Or comment Cavalieri y est-il parvenu? Par les indivisibles. Soit, mais qu'est-ce qu'un indivisible selon Cavalieri? Vous serez peut-être étonnés d'apprendre que Cavalieri ne s'en explique pas. Le mot lui-même surgit tout à coup au second livre de son ouvrage, dans une phrase posant l'alternative que le continu serait ou ne serait pas

autre chose que les indivisibles. A présent, comprenez si vous pouvez, en tenant compte que, comme on a pu le dire, si l'on décernait un prix d'obscurité, c'est à Cavalieri qu'il serait dû. Malgré cela on peut à peu près deviner son idée. Prenons une figure plane fermée quelconque, et menons-y deux tangentes parallèles entre elles et renfermant l'aire tout entière de la figure. Faisons passer par une de ces parallèles un plan qui est censé se mouvoir, *fluere*, d'un mouvement parallèle jusqu'à la tangente opposée. Il ne cessera de couper la figure en lignes droites et toutes ces lignes, *omnes lineæ figuræ*, en constituent l'aire. Comme d'autre part ce sont les indivisibles qui constituent la même aire, Cavalieri a dû identifier jusqu'à un certain point ces indivisibles avec les lignes existant dans la figure en question. Il m'est impossible d'entrer dans le détail des argumentations par lesquelles Cavalieri établit l'intégration principale à laquelle il aboutit. Je dois me borner à la mentionner, et à citer encore un autre théorème exprimé dans le VII^e livre de la *Géométrie des indivisibles*, savoir que deux volumes ou deux aires sont d'une capacité identique, si coupés tous les deux à la même hauteur, ils donnent naissance à des plans ou à des lignes droites de même étendue. Ce théorème a gardé le nom de *théorème de Cavalieri*.

Cavalieri et Kepler ont été reconnus comme promoteurs des idées d'Archimède. Ils ont fait faire un grand pas au Calcul intégral, et beaucoup d'auteurs, parmi lesquels je ne veux nommer que GREGOIRE DE SAINT-VINCENT, ont suivi plus ou moins leurs traces. Mais le Calcul différentiel et son

problème le plus remarquable, le problème des tangentes, n'en a guère profité. Kepler ne l'a frôlé qu'en passant, Cavalieri n'en a jamais parlé. Ce sont deux auteurs français qui l'ont attaqué avec succès, les mêmes qui ont formulé sinon inventé la Géométrie analytique : DESCARTES et FERMAT.

Obligé de me restreindre dans les bornes les plus étroites, je ne puis décrire selon leur mérite ce que ces deux hommes de génie ont fait. Qu'il me suffise de dire que pour DESCARTES le problème de la tangente, ou plutôt celui de la normale, rentre dans un autre d'une forme tout à fait algébrique. Une circonférence ayant son centre sur l'axe des abscisses coupe une courbe en général en deux points. Les ordonnées y de ces points d'intersection devront donc vérifier une équation quadratique en y dans laquelle figure le rayon r de la circonférence. Or r possédant une certaine valeur, qu'il faut trouver par des procédés algébriques, les deux racines de l'équation quadratique deviennent égales, c'est-à-dire que la circonférence rencontre la courbe en deux points identiques, qu'elle devient tangente avec elle, et que son rayon r devient la longueur de la normale à la courbe prise depuis son intersection avec elle au point voulu jusqu'à l'axe des abscisses. Telle est la marche que Descartes a suivie dans sa *Géométrie* de 1637. Vous voyez qu'il y apparaît une méthode tout à fait générale en théorie, à laquelle il ne manque malheureusement qu'une chose, c'est que la pratique n'en est pas toujours possible, et que spécialement elle refuse ses services toutes les fois que

l'équation de la courbe devient transcendante. Descartes ne s'en est pas tenu au problème de la normale. Il a aussi entrevu, comme Kepler, et bien plus amplement que celui-ci, le problème inverse des tangentes. C'est dans la correspondance de Descartes avec FLORIMOND DE BEAUNE que se trouvent les aperçus peu distincts sur ce sujet.

J'en viens à FERMAT, selon mon sentiment le plus grand des mathématiciens que la France a vus naître jusqu'à la fin du XVIII^e siècle. Son point de départ n'est ni le problème des tangentes ni celui des normales, mais le problème des maxima et minima. Ce problème lui-même n'était rien moins que nouveau. Ce que les anciens appelaient *diorisme*, c'est-à-dire discussion de la possibilité d'une construction, nécessitait la distinction de telle grandeur de certaines lignes ou de certains angles qui permettait encore la construction en question, et de telle autre qui la rendait impossible, et entre les deux il y avait une grandeur limite, la plus grande ou la plus petite possible pour que la construction eût encore lieu. ARCHIMÈDE nous a laissé des exemples d'un tel diorisme. Nous sommes redevables d'autres exemples à PAPPUS, qui vivait probablement aux alentours de l'an 300 de notre ère. APOLLONIUS, au III^e siècle avant Jésus-Christ, a traité d'autres problèmes de maxima et minima. Il a cherché les plus grandes et les plus petites lignes que d'un point donné on peut mener à une conique. ZÉNODORE, qui peut avoir été son contemporain, a entamé la question des figures isopérimètres d'aire maxima. Voilà pour l'antiquité. Depuis la Renaissance, nous voyons

paraître encore des problèmes de maxima très curieux, mais tout à fait isolés. REGIOMONTANUS en 1471, TARTAGLIA et CARDANO au XVI^e siècle en ont posé et résolu chacun de son côté. Je pourrais même citer un exemple, d'origine et de date également mystérieuses, tiré d'un talmudiste. Parmi les auteurs dont j'ai parlé plus amplement, CAVALIERI en 1647 a recherché le point dont les distances à trois points donnés auraient la plus petite somme possible. Vous voyez qu'il ne manquait pas de problèmes de maxima et minima, ni d'essais épars de les résoudre, tantôt par un artifice, tantôt par un autre. Tous ces essais ne souffrent pas de comparaison avec ce qu'a fait FERMAT dès 1629. Il a posé la question générale : Une certaine expression, dans laquelle entre une quantité variable, étant donnée, trouver la valeur de la variable qui rend l'expression elle-même maxima ou minima. Et cette question, il y a répondu par une méthode non moins générale. Soit a la variable. On lui substitue $a + e$, et on soustrait l'expression primitive de celle qu'a fait naître ce changement. La différence qu'on obtient est divisible par e , et on opère cette division. Enfin dans le quotient égalé à zéro on annule e , l'équation qui en résultera est celle qui donnera la valeur voulue de a . On n'a qu'à changer un peu la notation pour tomber sur la règle toute moderne, selon laquelle il ne s'agit que d'égaliser à zéro la dérivée de l'expression sujette à devenir maxima ou minima pour trouver la valeur de la variable qui la rend telle. Fermat n'a laissé à désirer que très peu de chose. Il ne donne pas de criterium pour se rendre compte si la

racine trouvée donne en effet une quantité maxima ou minima, et lequel des deux a lieu. On comprend aisément cette lacune. Chaque problème spécial portait en lui-même l'indication duquel des deux cas il s'agissait, et cela faisait croire qu'on pouvait se passer d'un criterium général.

En revanche, Fermat a su remarquer que sa méthode conduisait beaucoup plus loin qu'il n'avait osé espérer peut-être en l'inventant. Outre les questions de maxima et de minima, c'était aussi le problème du centre de gravité et celui de la tangente qu'il pouvait résoudre, et qu'il a résolu au moyen de la dérivation. Je ne parlerai que du dernier. Étant donné le point M d'une courbe, par lequel Fermat veut faire passer une tangente, l'équation de la courbe, sa *propriété spécifique*, pour parler avec lui, doit être vérifiée en M comme aussi en un point voisin appartenant tout à la fois à la courbe et à sa tangente. La distance des pieds des ordonnées de M et du point voisin est nommée e , tandis que a est la longueur à laquelle HUYGENS devait donner plus tard en 1693 le nom de *sous-tangente*. On comprend aisément que la propriété du point de la courbe voisin à M d'appartenir aussi à la tangente en M donne lieu à de certaines proportions qui se traduisent facilement en équations. C'est avec ces équations, ainsi qu'avec la propriété spécifique, que Fermat opère d'après sa méthode, et il parvient à trouver a . Remarquons en passant que Fermat opère avec l'équation de la courbe sans en tirer la valeur de l'ordonnée en fonction de l'abscisse, qu'il n'est donc pas gêné par des irrationalités résultant de la réso-

lution de cette équation, et qu'il sait même assujettir à sa méthode des courbes transcendantes comme la cycloïde. Il s'en glorifie dans une lettre de 1638, dans laquelle il compare sa méthode des tangentes à celle de Descartes. Il ajoute qu'on pourrait de suite chercher la converse, c'est-à-dire : la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à laquelle cette propriété doit convenir. Malheureusement je ne saurais vous dire si la dernière phrase posait de loin un problème que Fermat entrevoyait sans avoir essayé d'y approcher, ou s'il comprenait en effet ce que c'était que le problème inverse des tangentes et s'il croyait pouvoir le résoudre. Le fait est que la locution de *problème inverse des tangentes* ne revient dans aucun mémoire de Fermat, quoiqu'il se soit occupé à diverses reprises de problèmes appartenant au Calcul intégral. Il a fait faire un véritable pas en avant à la quadrature des hyperboles et des paraboles de différents ordres, et surtout à la rectification des courbes, dont il envisageait la longueur comme somme de segments de tangentes menées en des points successifs.

Nous avons insisté sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur sa méthode des tangentes qui en découle. Il y a des personnes qui lui préfèrent la méthode de ROBERVAL. Celui-ci considère le mouvement par lequel un point décrit une courbe comme résultant de deux mouvements dont les lois sont connues, et la diagonale du parallélogramme de ces mouvements lui donne la tangente de la courbe. C'est tout à fait ingénieux, et chaque fois qu'on

connaît les mouvements à combiner, rien n'est plus facile que d'en tracer la résultante. Mais on se tromperait fort en croyant que l'équation de la courbe permette d'y lire d'emblée les mouvements en question. Pour les reconnaître, il faut être spirituel de nouveau pour chaque courbe nouvelle, et on ne saurait demander à un mathématicien ni à une autre personne d'avoir de l'esprit à tout propos. La beauté d'une méthode, je crois que vous serez d'accord avec moi sur ce point, consiste dans la facilité de son application générale. Son inventeur doit déboursier par avance tout l'esprit qui peut faire défaut à ceux qui l'emploieront après lui, et ce mérite manque à la méthode de Roberval, tandis qu'il distingue celle de Fermat.

Parmi les auteurs contemporains de Fermat, je m'arrête un instant auprès de PASCAL. Il s'est occupé surtout de problèmes du Calcul intégral, de la recherche d'aires et de volumes, et parmi les artifices dont il s'est servi on a reconnu le germe de ce qu'on appelle aujourd'hui l'intégration par parties. En outre, dans un mémoire intitulé *Traité des sinus du quart de cercle*, il a dessiné une figure qui pour lui n'avait qu'un but à peu près insignifiant, mais dont la vue devait dégager dans un autre esprit toute une série de pensées des plus productives. C'était un quart de cercle touché en un point intermédiaire par une tangente. On y voyait le rayon normal à la tangente, les ordonnées de trois points de la tangente, savoir du point de contact et de deux autres situés en deçà et au delà; on y voyait enfin une parallèle à la base partant du point

inférieur parmi les trois points de la tangente et conduisant jusqu'à l'intersection avec l'ordonnée du point supérieur, formant donc avec cette ordonnée et la tangente un petit triangle rectangle dont l'hypoténuse, c'est-à-dire la tangente, à mesure qu'on diminuait sa longueur, s'identifiait d'autant plus avec l'arc du cercle.

Si j'avais à disposer d'un temps illimité, il y a bien des auteurs du continent dont je devrais vous entretenir encore, des auteurs qui ont bien mérité des différents problèmes précités, sans pour cela avoir ouvert des chemins absolument nouveaux. Les TORRICELLI, les DE SLUSE, les HUDDE, les HUYGENS sont de ce nombre. Je les passe sous silence pour vous conduire en Angleterre. Regardant autour de nous dans ce pays, nous voyons WALLIS, qui dans son *Arithmétique des infinis* de 1655 montre des quadratures arithmétiques du genre de celle dont j'ai fait mention en parlant de Kepler, quoique, selon toute probabilité, inventées indépendamment de lui. Nous voyons BARROW publiant de 1669 à 1670 ses *Leçons de Géométrie*, dans lesquelles le problème des tangentes se trouve traité à l'instar de Fermat, ressemblance tellement frappante qu'il est difficile de l'attribuer au hasard. Mais il y a un pas sérieux que Barrow a fait au delà de son devancier continental. Il a certainement reconnu la parenté du problème des quadratures avec le problème inverse des tangentes, mieux que Fermat et Descartes, quoique pas aussi bien que l'homme célèbre qui a commencé sa carrière comme élève de Barrow à Cambridge, pour y devenir son successeur.

Vous avez deviné que je parle de NEWTON. Son *Analyse par les équations* de 1666, antérieure donc de trois ou quatre ans aux *Leçons de Géométrie* de Barrow, a parfaitement reconnu l'identité des deux problèmes que je viens de nommer; en traduisant ses pensées en langue moderne, il a reconnu que le Calcul différentiel et le Calcul intégral représentent deux chapitres d'un même corps de science se présupposant mutuellement et se complétant. On sait que le manuscrit de l'*Analyse par les équations* a été entre les mains de Barrow en 1669 et a été communiqué par lui au mois de juillet de cette année à Collins. D'autre part, Barrow dans ses *Leçons de Géométrie* dit qu'un ami (c'était Newton sans aucun doute) lui avait extorqué la dernière leçon, qui est justement celle qui contient les problèmes du Calcul infinitésimal. Barrow en était-il redevable à Newton? Barrow, qui a quitté sa chaire de professeur à Cambridge pour y faire monter Newton, qui a cité Newton de la manière que je viens d'indiquer, aurait-il manqué de dire que les méthodes et les idées de la dernière leçon appartenaient à Newton, s'il en était ainsi? Je crois qu'il suffit de poser la question pour recevoir une réponse négative. Il y a certainement eu des professeurs, et des plus célèbres, qui ont appris telle ou telle chose d'un élève favori. Mais alors ils mettent je dirais de l'amour-propre à l'avouer franchement, et ne se contentent pas de se plaindre qu'on leur ait extorqué la publication de leurs leçons. Pour moi, je me suis fait de la suite des événements l'image suivante. Barrow a enseigné à Cambridge depuis 1663 jusqu'à 1669. Newton a suivi ses

cours dès le commencement. Élève précoce, il écrivit en 1665 et 1666 un premier mémoire : c'était justement son *Analyse par les équations*. Il y mit beaucoup du sien, mais il n'hésita pas non plus à y exposer des idées dont la source découlait des cours de Barrow. Le manuscrit reste entre ses mains. En 1669 Barrow, qui n'a pas de secrets pour Newton, lui montre les leçons qu'il va faire imprimer. Alors Newton lui demande d'ajouter cette dernière leçon infinitésimale, il la lui extorque, comme dit Barrow, et j'admets que c'est en lui montrant le manuscrit mis au net depuis quelques années et contenant une partie notable de cette leçon. Barrow cède à ce solliciteur implacable, et en même temps il songe à assurer à Newton ce qui lui est propre. Il expédie son mémoire à Collins afin de lui donner une date antérieure à celle de la publication des *Leçons de Géométrie*. Je crois que cette hypothèse, que je donne pour telle et non comme un fait historique tout prouvé, suffit à faire comprendre l'enchaînement des dates et des écrits.

Le manuscrit de l'*Analyse par les équations* resta entre les mains de Collins, chez qui LEIBNIZ le vit et en fit des extraits en octobre 1676. En présence de philosophes, il me siérait mal de faire de mon côté l'éloge de cet homme d'un savoir immense, d'une intelligence universelle, mais philosophe avant tout, pour ne pas dire dans tout, préparant les petites perceptions en créant les quantités différentielles. C'est le 29 octobre 1675, à quelques jours près un an avant sa visite à Collins, que Leibniz a inventé les deux signes de la différentiation et de l'intégration, qu'il a inscrit dans ses

notes qu'il s'agissait de deux sortes nouvelles de calcul, dont l'un était le réciproque de l'autre. C'est dans un mémoire de 1684, sans pareil dans l'histoire des Mathématiques pour la richesse des matières traitées en six pages, qu'il a publié son invention. Tout le monde est d'accord que cette publication est la première dans laquelle la méthode et la notation du Calcul différentiel aient été divulguées. Dès 1685 JOHN CRAIG les enseigna en Angleterre dans un livre dont Newton avait lu le manuscrit avant son impression. Tout le monde est d'accord aussi que Newton avait inventé une méthode semblable et des signes qui y correspondaient une dizaine d'années avant Leibniz. Seulement il a eu le tort de tenir caché ce que Leibniz donna aux vents.

Il y a une seconde différence notable entre les deux inventeurs. Dès que la figure du traité des sinus du quart de cercle de PASCAL fut tombée sous les yeux de Leibniz, et qu'il y eut trouvé (ce sont ses paroles mêmes) une lumière que l'auteur n'avait pas vue, dès ce moment, dis-je, il employa les infiniment petits, ses monades de l'avenir. Newton au contraire a changé à différentes reprises sa manière de voir. Tandis que parfois il déclare hautement ne pas faire usage d'infiniment petits, mais seulement de proportions limites, il est impossible de ne pas voir dans d'autres endroits l'emploi d'infiniment petits tout comme chez Leibniz, et c'est cette vacillation qui a facilité à BERKELEY, par exemple, ses attaques contre les principes de la *méthode des fluxions* de Newton, titre dérivé

du mot *fluere*, dont nous avons fait voir le rôle dans les écrits de Neper et de Cavalieri.

Je m'arrête, non que le sujet de mon rapport soit épuisé, il est pour ainsi dire inépuisable ; mais où il n'y a pas de fin, il faut savoir mettre un terme. Les origines du Calcul infinitésimal peuvent être censées terminées du moment que le calcul existe, et c'est ce qu'on ne peut nier après Newton et Leibniz. La terre promise avait été entrevue de loin depuis longtemps, Newton puis Leibniz, chacun de son côté, y sont entrés et en ont facilité l'accès à leurs successeurs.

NOTE SUR LES ORIGINES DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par GASTON MILHAUD,

Professeur à l'Université de Montpellier.

Dans l'évolution de la pensée mathématique il est difficile de séparer l'idée du langage par lequel elle s'exprime. Et cependant, si l'on veut remonter aux origines, il faut bien essayer de dégager les idées du revêtement dernier qu'elles ont reçu. C'est ce que nous allons faire pour le Calcul infinitésimal. Il date de Newton et de Leibniz, si l'on y voit, et à bon droit d'ailleurs, cette langue nouvelle qui étudie les grandeurs d'après leur mode de variation infinitésimale, tantôt formulant des relations qui expriment ce mode de variation, tantôt, au contraire, remontant de celles-ci aux équations qui relient les grandeurs elles-mêmes. Mais si l'on envisage les problèmes fondamentaux qui devaient y trouver leur solution, et, à plus forte raison, si l'on veut remonter jusqu'aux tendances générales de la pensée mathématique, et même à celles de l'esprit humain, que devait traduire un jour le langage infinitésimal, ce n'est pas seulement à la fin du xvii^e siècle qu'il faut chercher les

origines, ce n'est pas seulement non plus dans les travaux de Descartes et de ses contemporains, c'est plus loin encore, jusque dans les premières tentatives que firent les Géomètres grecs pour donner une large place au devenir, à la variation infinitésimale des grandeurs, et pour adapter de mieux en mieux la science de la quantité aux exigences du continu de l'intuition spatiale.

Or il semble bien que de pareilles tentatives datent du v^e siècle avant J.-C. Nous en avons la preuve d'abord dans l'abandon définitif de cet atomisme spatial si curieux des Pythagoriciens, qui inspirait leurs méthodes de démonstration arithmétique, et en vertu duquel ils voyaient dans une ligne une somme de points, dans une surface une somme de lignes, dans un volume une somme de plans. Au temps de PLATON, le point aura cessé d'être « l'unité ayant une position » ; il ne sera plus un *στοιχείον* par rapport à la ligne, mais une *ἀρχή*, si nous nous en rapportons aux informations et au langage même d'ARISTOTE. Il est probable, de quelque façon que l'on juge l'intention des Éléates, que leur dialectique vigoureuse n'avait pas été étrangère à ce résultat, qui d'ailleurs s'accordait à merveille avec l'évolution toute naturelle de la pensée mathématique. Nous avons en effet bien des raisons de croire que le v^e siècle fut l'époque d'un grand mouvement d'idées en Géométrie, mouvement caractérisé par l'éclosion simultanée de conceptions et de méthodes qui toutes impliquaient à quelque degré la génération continue de l'espace par une suite illimitée de variations infinitésimales.

C'est d'abord la notion de la grandeur incommensurable avec laquelle se sont décidément familiarisés les Géomètres. Les Pythagoriciens avaient découvert que la diagonale et le côté d'un même carré sont incommensurables; mais q'avait été là pour eux comme une monstrueuse exception, qui ne les avait nullement empêchés de croire à l'existence générale de rapports numériques déterminés, et à l'applicabilité toute naturelle de leur arithmétique des *médiétés*. En Géométrie cependant le souci de l'incommensurabilité avait été suffisant pour écarter les notions de rapport et de proportion dans toute la partie qui constitue les quatre premiers livres d'EUCLIDE, malgré la simplicité qu'elles eussent apportée aux démonstrations. Ce n'est que le v^e livre (dont la partie essentielle est due très vraisemblablement à EUDOXE de Cnide) qui pose tout à coup la définition du rapport et celle de la proportion de façon à écarter définitivement toute préoccupation relative à l'incommensurabilité. D'ailleurs THÉODORE de Cyrène et THÉÉTÈTE, contemporains d'EUDOXE, font une étude spéciale des lignes irrationnelles. Bref, on peut assurer qu'au temps de Platon le concept de la grandeur incommensurable a pénétré sans restriction dans la langue mathématique. Or il faut se rendre compte du progrès qui se trouve par là réalisé. Accepter de concevoir toujours un rapport quantitatif entre deux longueurs, quand l'une des deux n'est plus composée par la juxtaposition d'un nombre fini de parties aliquotes de l'autre, c'est faire subir à la notion même de quantité une transformation radicale. Au fond (comme il serait aisé de le montrer

dans la définition savante qu'EUCLIDE donne de l'égalité de deux rapports), le rapport, dans le cas général où il est incommensurable, s'offre comme la limite de la somme d'un nombre illimité de termes infinitésimaux; car, lorsqu'on cherche à engendrer une longueur, par exemple, à l'aide de divisions de plus en plus petites d'une autre, on est amené à concevoir une addition sans fin fournissant une grandeur variable, dont la différence avec la première tombe au-dessous de toute valeur assignable. La notion de grandeur incommensurable implique donc déjà l'idée d'*exhaustion*, d'épuisement du continu par sommation d'éléments de plus en plus petits, idée qui désormais se retrouvera au fond d'un grand nombre de problèmes.

HIPPOCRATE de Chios nous fournit l'application probablement la plus ancienne de cette idée à l'étude des aires. D'après la récente restitution d'un extrait d'Eudème, conservé par Simplicius, Hippocrate s'appuyait, pour quarrer ses lunules, sur la proportionnalité des surfaces de plusieurs cercles aux carrés de leurs diamètres, et sur celle des aires de plusieurs segments semblables aux carrés de leurs cordes. La démonstration que l'on donnait alors de ces théorèmes nous est inconnue; mais à coup sûr elle impliquait le passage du polygone à la circonférence, de l'aire limitée par une ligne brisée à celle que limite un arc de cercle; elle impliquait l'épuisement d'une portion du plan par une suite illimitée d'éléments infinitésimaux.

Au reste, la méthode de démonstration applicable aux questions de ce genre allait se fixer bientôt avec EUDOXE.

Des témoignages d'ARCHIMÈDE (Préf. du *Traité sur la sphère et le cylindre*, et Préface de *la Quadrature de la parabole*) nous permettent en effet d'attribuer à EUDOXE le type général de démonstration que nous offrent les *Éléments* d'EUCLIDE à propos de questions relatives aux cercles, aux pyramides, aux cônes, aux cylindres, aux sphères. La méthode est toujours la même. Elle repose au fond sur l'idée qu'on peut passer par continuité d'un polygone de contour variable au cercle qui en est la limite, ou du polyèdre inscrit dans une sphère à la sphère elle-même, ou d'une somme de prismes intérieurs à une pyramide et dont le nombre va en augmentant indéfiniment à la pyramide qui les contient. Mais cette idée toute naturelle ne s'exprime pas ainsi comme la simple constatation d'une intuition immédiate. Aux yeux des Grecs, c'eût été rompre avec la rigueur géométrique que de relier une grandeur à une autre par l'intermédiaire d'une suite illimitée de degrés infinitésimaux; c'est pourquoi l'idée fondamentale se cache chez eux sous une forme savante qui supprime fort habilement le saut dans l'infini. Leur raisonnement s'appuie sur deux principes, dont l'un est impliqué dans une définition du livre V, et dont le second est démontré comme conséquence du premier au début du livre X.

1° Si deux grandeurs sont inégales, la plus petite, multipliée par un nombre suffisamment grand, dépassera la plus grande.

2° Si l'on retranche d'une grandeur une partie plus grande que sa moitié, que du reste on retranche ensuite

une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite indéfiniment, on obtiendra un reste inférieur à toute valeur assignée d'avance.

Ces principes admis, soit à démontrer, par exemple, que deux cercles O et O' sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres. On considère les polygones réguliers inscrits dans O' , dont on double indéfiniment le nombre des côtés à partir du carré; et l'on voit sans peine qu'en passant d'un polygone au suivant on diminue de plus que de moitié la somme des segments qui forme la différence entre l'aire du cercle et celle du polygone. Il en résulte que cette somme finira par tomber au-dessous de toute valeur donnée. En particulier, si l'on suppose les carrés des diamètres respectivement proportionnels à l'aire O et à une surface Σ plus grande ou plus petite que O' , la somme des segments que l'on épuise indéfiniment, en lui ôtant chaque fois plus que sa moitié, deviendra inférieure à la différence entre O' et Σ , ce qui conduit très vite à une absurdité.

Telle est, dans ses traits fondamentaux, la méthode d'exhaustion que fonda EUDOXE à la fin du v^e siècle. ARCHIMEDE n'y change rien d'essentiel. C'est ainsi que, pour la quadrature du segment de parabole, l'une de ses solutions consiste à épuiser le segment par une somme illimitée de triangles inscrits dont il cherche la limite; et il appuie cette démonstration sur des propositions « établies par ceux qui avaient vécu avant lui », c'est-à-dire sur les deux principes que nous avons énoncés ci-dessus.

Ajoutons à ces considérations générales que la notion de

lieu géométrique semble être née et avoir acquis aussitôt toute sa fécondité dans la deuxième moitié du v^e siècle, quand naissait la théorie des sections coniques faite d'après leurs équations, peut-on presque dire, et quand les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle multipliaient les lignes courbes, c'est-à-dire les images représentatives d'un σύμπτωμα, d'une propriété quantitative spéciale : nous aurons le sentiment que, dans le voisinage du temps où vécut Platon, la Mathématique subit dans ses concepts une transformation décisive qui, d'une façon générale, réalisait la fusion intime des propriétés de l'espace continu et du langage analytique de la quantité, de manière à mettre déjà en évidence les germes dont le développement devait aboutir un jour aux travaux de Newton et de Leibniz.



Ce n'est pourtant que beaucoup plus tard, au xvii^e siècle, que les premiers efforts des Géomètres grecs trouvent leur suite naturelle. Des problèmes analogues à ceux que traitait Archimède, et plus particulièrement celui des quadratures, vont, par d'innombrables recherches, préparer le Calcul intégral, tandis que les problèmes des tangentes et des maxima et minima mettront plutôt sur la voie du Calcul différentiel. DESCARTES, en créant sa Géométrie nouvelle, fournit pour les uns et pour les autres la science analytique, qui, s'adaptant à toutes les circonstances du

continu de l'intuition spatiale, se prêtera merveilleusement d'elle-même au langage infinitésimal.

C'est, dès 1629, la *méthode des indivisibles* de CAVALIERI¹ qui donne l'élan à la Géométrie nouvelle. Les surfaces et les volumes sont supposés divisés en une infinité d'éléments semblables par des droites ou des plans parallèles. Ces éléments sont assimilés à des segments de droite dans le cas des surfaces, et à des aires planes dans le cas des volumes. Cavalieri s'exprime comme si pour lui une surface était une somme de lignes, un volume une somme de surfaces planes (sauf que le nombre d'éléments serait infini). Son procédé est celui-ci : ou bien il considère entre deux droites ou deux plans horizontaux des figures telles que les sections varient suivant la même loi avec la hauteur, et il déduit la mesure de l'une de celle de l'autre ; ou bien il compare simplement et directement l'une de ces figures à celle qui fournirait des sections parallèles toutes égales à sa base. Ainsi, soit l'aire comprise entre un arc de parabole, la tangente au sommet et une parallèle à l'axe ; considérons une pyramide de même hauteur : des sections parallèles déterminées simultanément dans les deux figures sont pour l'une des ordonnées, pour l'autre des aires polygonales, qui les unes et les autres varient proportionnellement aux carrés de la distance au sommet. Cavalieri conclut de là que le segment parabolique est le tiers du rectangle correspondant, comme la pyramide est le tiers du prisme de même base et

1. ROBerval, après CAVALIERI, mais avant la publication des travaux de celui-ci, trouve une méthode à peu près identique.

de même hauteur. Soit, d'autre part, un triangle : décomposons-le en une infinité de segments de droites parallèles à la base et équidistantes : ces segments sont entre eux comme 1, 2, 3, 4.... n , tandis que les segments déterminés dans le parallélogramme de même base et de même hauteur sont tous égaux à la base, c'est-à-dire à n . Les sommes de ces éléments sont donc entre elles comme $\frac{n(n+1)}{2}$ est à n^2 , c'est-à-dire dans le rapport $\frac{1}{2}$, et le triangle est la moitié du parallélogramme.

Attaqué par GULDIN, CAVALIERI eut à se défendre, et voulut montrer que sa méthode ne rompait pas avec la rigueur habituelle aux Géomètres; il affirma qu'en somme elle se ramenait à celle d'Euclide et d'Archimède. N'épuisait-il pas comme eux les surfaces et les volumes par l'addition d'une suite illimitée de petits éléments, segments de cercle, triangles inscrits dans la parabole, prismes construits dans la pyramide, etc.? Si, pour la commodité du langage, il décomposait une aire continue en segments de droites parallèles, et un volume en plans, il fallait voir dans les premiers de petits rectangles et dans les seconds de petits prismes ayant tous même hauteur. Euclide démontrait que la différence entre la figure qu'il mesurait et la somme des petits éléments tombait au-dessous de toute valeur assignable; CAVALIERI, en supposant infini le nombre de ces éléments, pouvait bien négliger cette différence.

Ces considérations sont justes en un sens, si l'on remonte à l'intuition fondamentale d'où dérivent les procédés nou-

veaux comme les anciens. Mais il faut pourtant comprendre l'importance toute spéciale du langage de CAVALIERI.

D'une part, s'il est vrai que les Grecs s'inspiraient déjà de préoccupations d'infini et de limite, leur crainte d'amoindrir la rigueur démonstrative des raisonnements les avait amenés à trop bien cacher ces préoccupations, et elles ne se retrouvaient que transformées et à peine reconnaissables dans la forme par trop détournée où elles recevaient leur expression. Cavalieri, au contraire, met en évidence dans toute leur nudité, au point de heurter d'abord le sens de la rigueur géométrique, les notions infinitésimales qui le guident : il va droit aux infiniment petits, à la composition d'un tout par l'addition d'une infinité de pareils éléments, et aux propriétés de ce tout déduites de la nature de l'élément différentiel.

D'autre part, les quantités qui formaient chez EUCLIDE ou chez ARCHIMEDE des suites illimitées, segments, triangles, prismes..., correspondaient dans chaque cas particulier à un mode spécial de construction ; pour chaque problème, c'est l'ingéniosité du géomètre qui donnait une forme et une disposition convenables aux éléments dont la série indéfinie épuisait le continu de l'espace. CAVALIERI fixe une fois pour toutes la définition de la quantité infinitésimale à l'aide de droites ou de plans parallèles. Et, par une merveilleuse coïncidence, ce choix de l'élément infinitésimal s'offre au moment même où la Géométrie de DESCARTES va permettre d'en donner l'expression la plus simple. Il suffira de mesurer les lignes parallèles qui divisent le continu d'une

aire curviligne dans la direction des ordonnées : si h est l'intervalle constant de deux parallèles, hy ou $hf(x)$ [pour la courbe $y=f(x)$], représentera le terme général de la suite qu'il faut sommer, de telle sorte qu'après CAVALIERI et DESCARTES le problème des quadratures aura désormais la signification de la recherche directe d'intégrales définies. CAVALIERI lui-même avait traité ce problème pour les cas où l'ordonnée est le carré, le cube ou la quatrième puissance de l'abscisse, et avait pressenti la règle qui donne la quadrature de la parabole $y=x^n$. WALLIS allait confirmer les résultats pressentis par une méthode décidément analytique, mais en s'élevant par induction à la formule générale, laissant ainsi à Pascal l'honneur de la justifier par son calcul de la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. Enfin une remarque de ROBERVAL, suivant laquelle l'aire limitée par la courbe $y=f(x)+\varphi(x)+\dots$ est la somme algébrique des aires limitées par chacune des lignes d'ordonnées $f(x)$, $\varphi(x)$..., achevait de résoudre le problème des quadratures pour tous les cas où l'ordonnée est une somme algébrique de puissances entières et positives de la variable; tandis que, d'autre part, à propos de certaines hyperboles et de la cycloïde, FERMAT, PASCAL, WALLIS résolvaient le problème d'intégration dans des cas où l'ordonnée est une puissance négative de l'abscisse, ou même prend la forme de certaines expressions trigonométriques.

Ce n'est pas tout d'ailleurs, et si le Calcul intégral se trouve ainsi tout prêt à sortir des travaux de Cavalieri, c'est

aussi la notion fondamentale du Calcul différentiel qui apparaît clairement avec eux, car l'indivisible n'est autre chose que la différentielle. Quand on passe avec le géomètre italien d'une parallèle à la suivante, dans la décomposition d'une figure continue, on découpe une tranche mince à laquelle CAVALIERI substitue en réalité le rectangle allongé qui s'y trouve inscrit; il supprime donc une portion de la surface. La somme de toutes les portions négligées, eût-il dit, est précisément de la catégorie de ces quantités qui tendaient vers zéro dans les démonstrations des Géomètres grecs, et dont par conséquent il s'attribue le droit de ne pas tenir compte dès qu'il suppose le nombre des divisions infini. Mais par là il se trouve amené à distinguer dans l'accroissement infinitésimal de l'aire une partie principale, $hf(x)$, et une autre partie négligeable (infinitement petit d'ordre supérieur, dira-t-on plus tard). Or cette partie principale de l'accroissement infinitésimal est la *différentielle* de l'aire. En portant son attention sur cette différentielle, et en faisant dépendre de certaine façon la grandeur elle-même de la nature de la différentielle, Cavalieri appliquait par avance à sa manière les idées fondamentales du Calcul différentiel. Ce ne furent pourtant pas les travaux relatifs aux quadratures qui préparèrent le plus directement le Calcul différentiel : celui-ci allait se dégager plus naturellement encore des recherches sur les tangentes et sur la question des maxima et des minima.

Chez les Géomètres grecs, le problème des tangentes aux courbes était resté, par la façon dont il se posait, en dehors

de toute considération d'infiniment petit ou de limite. La tangente se définissait par cette propriété de n'avoir, au moins dans le voisinage de son point de contact, aucun autre point commun avec la courbe. Dès les travaux de DESCARTES, la tangente se détermine comme la droite qui coupe la courbe en deux points confondus, c'est-à-dire qui joint deux points de la courbe infiniment voisins. Sa direction est celle d'une corde infinitésimale, ou encore la prolongation rectiligne d'un arc infiniment petit.

DESCARTES donne une solution générale du problème de la tangente, fondée sur le calcul. Il cherche à construire la normale en exprimant qu'un cercle ayant son centre sur l'axe coupe la courbe en deux points confondus, c'est-à-dire que l'équation donnant les abscisses des points de rencontre des deux lignes admet l'abscisse du point de contact comme racine double. Un peu plus tard, il indiquait pour la tangente à la roulette une construction fort simple qui tenait dans cette propriété : la normale passe à chaque instant par le point de contact du cercle générateur avec la base sur laquelle il a roulé. Par cette élégante solution, DESCARTES créait un chapitre intéressant de Géométrie infinitésimale, « la théorie du centre instantané de rotation ».

Après lui, ROBERVAL imagine la méthode des mouvements composés, par laquelle il fait pressentir NEWTON. Une courbe est considérée comme décrite par un point dont le mouvement résulte de deux autres, par exemple, de deux mouvements rectilignes par lesquels le point s'éloigne ou se rapproche séparément de deux points donnés distincts, ou

d'un point et d'une droite, etc. La tangente est la direction dans laquelle s'échapperait le mobile qui décrit la courbe s'il l'abandonnait, ne se mouvant plus qu'en vertu de sa vitesse au point que l'on considère. En d'autres termes, la direction de la tangente est celle de la vitesse résultante; et celle-ci, dans un grand nombre de cas, se déduira aisément des vitesses composantes. Qu'il s'agisse de l'ellipse, par exemple : le point qui la décrit s'éloigne d'un foyer F de la quantité dont il se rapproche de l'autre foyer F' ; les vitesses composantes en M seront égales en valeur absolue et dirigées l'une suivant MF' , l'autre suivant le prolongement de FM ;

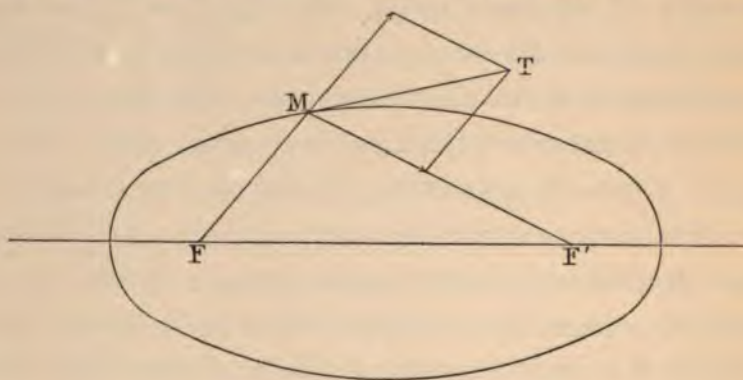


Fig. 1.

la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses, c'est-à-dire la bissectrice extérieure de l'angle FMF' , sera la tangente cherchée. ROBERVAL ne prétendit pas résoudre ainsi dans sa généralité le problème des tangentes; il présenta sa méthode comme visant plutôt une série de cas particuliers; mais, au fond, en faisant intervenir la notion de vitesse en un point, et en la composant de

plusieurs autres, il apportait un principe que NEWTON n'aurait qu'à généraliser en l'appliquant, pour toutes les courbes, à deux mouvements dirigés l'un suivant l'abscisse et l'autre suivant l'ordonnée. Supposons, dira NEWTON, que le mouvement sur l'abscisse soit uniforme, tandis que la loi du mouvement sur l'ordonnée se trouve déterminée par la fonction même qui caractérise la courbe. Soit M un point de celle-ci : pour un déplacement MN dans la direction des abscisses, le déplacement sur l'ordonnée est en réalité NQ ;

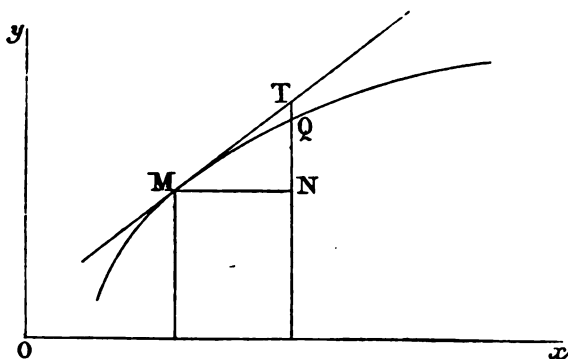


Fig. 2.

mais si la vitesse sur l'ordonnée était restée ce qu'elle était en M , le mobile serait, non en Q , mais en T , où la tangente en M vient couper l'ordonnée du point Q . NT est alors ce que Newton nomme la *fluxion* de l'ordonnée, MN étant celle de l'abscisse. Il est clair qu'elles sont l'une à l'autre comme l'ordonnée est à la sous-tangente, de sorte que la connaissance du rapport des fluxions des coordonnées donnera la solution du problème des tangentes. Ainsi il est bien vrai qu'avec ROBERVAL nous étions assez près (du moins si l'on a

en vue le principe mécanique de la conception) de la méthode des fluxions. Est-il besoin de dire que celle-ci n'était pas tout entière dans ce principe, et qu'elle devait se compléter avec Newton lui-même par le calcul général des fluxions des fonctions données soit par leur expression algébrique, soit par des équations non résolues?

D'un autre côté, les travaux de FERMAT, de HUYGENS, de BARROW préparaient plus directement la méthode leibnizienne des différentielles.

FERMAT, dans ses recherches sur les maxima et les minima, se laisse guider par cette remarque qu'une fonction, l'ordonnée d'une courbe, par exemple, quand elle parvient à un maximum ou à un minimum, a dans le voisinage un accroissement nul. Au fond, cela revient à dire (et c'est ce qu'exprimait Descartes) que la parallèle à l'axe des abscisses coupe alors la courbe en deux points dont les ordonnées sont égales. Mais ce qui nous intéresse avec Fermat, c'est l'expression nouvelle qu'il donne à cette idée. Soit e l'accroissement infiniment petit qu'on donne à x , calculons ce que devient y , et écrivons que cette nouvelle valeur de l'ordonnée est égale à la première; un certain nombre de termes communs aux deux membres de l'égalité disparaîtront, e se trouvera naturellement en facteur dans tous les autres : supprimons-le une fois partout, et enfin barrons tous les termes qui contiennent encore e , nous obtiendrons une équation donnant les valeurs de x qui correspondent aux maxima ou aux minima. Nous voyons

ici intervenir ce principe qui jouera chez Leibniz un rôle fondamental : on peut ne conserver d'une équation entre infiniment petits de divers ordres que les termes d'ordre moindre. Fermat appliquait naturellement sa méthode au problème des tangentes.

D'ALEMBERT, LAGRANGE, LAPLACE, FOURIER n'ont pas hésité à voir dans cette méthode de FERMAT l'origine du Calcul différentiel, au point de regarder ce géomètre comme le véritable inventeur des « nouveaux calculs ». La distance est pourtant appréciable encore entre FERMAT et LEIBNIZ. Le procédé de FERMAT donne lieu, dans chaque cas particulier, à des calculs plus ou moins compliqués, mais ne conduit encore à formuler aucune règle pratique.

A la vérité, HUYGENS aura bientôt fait, en se l'appropriant, d'en tirer la loi de formation de l'expression de la sous-tangente à toute courbe représentée par une équation entière $f(x, y) = 0$. « Tous les termes de l'équation, dit-il, étant transportés dans un même membre, que ceux où se trouve y soient multipliés respectivement par leurs degrés en y ; ensuite, que semblablement tous les termes qui contiennent x soient respectivement multipliés par leurs degrés en x , et que le facteur x en soit enlevé; si l'on divise le premier résultat par le second, on aura la sous-tangente. » On reconnaît là la suite de calculs indiquée par notre formule $\frac{yf'_y}{f'_x}$. Non seulement le problème des tangentes trouve ainsi une solution pour tous les cas où la courbe est algébrique, mais cette solution conduit à énoncer la règle de formation

des polynômes dérivés. Cette fois le pas était si considérable que lorsque LEIBNIZ publia sa méthode, Huygens ne s'aperçut pas tout de suite de ce qu'elle contenait de nouveau. « J'ai eu de temps en temps quelque chose de votre nouveau calcul algébrique..., » lui écrivait-il en 1690 (six ans après la publication des recherches de Leibniz); « mais, y trouvant de l'obscurité, je ne l'ai pas assez étudié pour l'entendre, comme aussi parce que je croyais avoir quelque méthode équivalente, tant pour trouver les tangentes des lignes courbes où les règles ordinaires ne servent pas, ou très difficilement, que pour plusieurs autres recherches¹ ». Et deux mois après, il écrivait de nouveau : « J'ai tâché depuis ma dernière lettre d'entendre votre calcul différentiel, et j'ai tant fait que j'entends, mais seulement depuis deux jours, les exemples que vous en avez donnés,... et j'ai même reconnu les fondements de ce calcul et de toute votre méthode, que j'estime très bonne et très utile. *Cependant je crois avoir quelque chose d'équivalent*, comme je vous ay écrit dernièrement². » Ce n'est que trois ans plus tard qu'il écrivit enfin : « Vous connaîtrez, Monsieur, que j'ai fait quelques progrès dans votre excellent calcul différentiel, dont je goûte de plus en plus l'utilité³. » HUYGENS et SLUZE complètent, sans les modifier beaucoup, les résultats de HUYGENS.

D'un autre côté, BARROW avait été conduit pour la déter-

1. Lettre du 24 août 1690 (*Math. Schriften*, II, 45).

2. Lettre du 9 oct. 1690 (*Math. Schriften*, II, 47).

3. Lettre du 17 sept. 1693 (*Math. Schriften*, II, 161).

mination de la tangente à une méthode qui, si elle n'aboutissait pas, comme les précédentes, à des règles générales de calcul, réalisait un progrès d'un autre genre, en faisant porter les calculs sur l'accroissement de l'ordonnée y en même temps que sur l'accroissement de la variable x . BARROW, le premier, considère le triangle formé par l'arc infinitésimal de la courbe et par les accroissements infiniment petits de l'abscisse et de l'ordonnée. En utilisant la relation géométrique qui définit la courbe, et qui lie par conséquent, en même temps que les coordonnées x, y d'un point, les coordonnées $x - a, y - e$ du point voisin, puis en supprimant de cette relation d'une part tout ce qui se détruit du fait que x, y sont les coordonnées d'un point de la courbe, d'autre part tous les termes qui contiennent les accroissements a et e au second degré, on parvient à une équation homogène par rapport à ces quantités infinitésimales; et comme le triangle infinitésimal est semblable à celui que forment l'ordonnée, la tangente et la sous-tangente, l'équation obtenue donne, avec le rapport $\frac{e}{a}$, celui de l'ordonnée à la sous-tangente, d'où celle-ci se déduit aisément.

Les idées essentielles du Calcul différentiel étaient si bien au fond de semblables travaux, qu'après eux LEIBNIZ lui-même ne semble pas comprendre toute l'importance de son œuvre nouvelle. La note par laquelle il la rendait publique dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig (1684) était fort courte, et annonçait par son titre une méthode qui semblait n'avoir pas d'autre avantage sur les précédentes

que de dispenser de chasser les dénominateurs des équations et de se débarrasser des radicaux : « *Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque pro Tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* » Cette note posait la notation différentielle, indiquait les règles à suivre pour le calcul de la différentielle d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, d'un radical, et appliquait ce nouveau calcul à quelques exemples de courbes. NEWTON était en possession de sa méthode des fluxions depuis longtemps, mais il ne l'avait pas rendue publique, et certainement LEIBNIZ ne la connaissait pas.

Le Calcul infinitésimal se trouvait donc simultanément conçu sous des formes quelque peu distinctes et plus particulièrement adaptées aux tempéraments de NEWTON et de LEIBNIZ : l'un avait vu l'image du continu dans le fait concret du mouvement, et s'était arrêté, pour fonder sa méthode, à la notion mécanique de vitesse; l'autre, plus métaphysicien, avait voulu marquer le moment infinitésimal de tout devenir. Mais, en tous cas, ce qui se dégage de notre brève étude, c'est que l'œuvre de ces deux hommes apparaît comme une chose absolument naturelle après les travaux du XVII^e siècle. Toutes les idées essentielles des nouveaux calculs étaient déjà nettement posées; les problèmes le plus directement intéressés à leur avènement, avant tout le problème des tangentes et celui des quadratures, avaient été l'objet d'une foule de recherches convergentes; les notions infinitésimales qu'impliquaient ces recherches

étaient de mieux en mieux exprimées par la langue de Descartes : bref, le calcul nouveau allait se présenter comme le terme normal de tout un ensemble de conceptions mathématiques déjà mûres. La science des Géomètres était prête à s'y adapter avec tant d'aisance, qu'elle marchait spontanément vers cet achèvement naturel.

HISTOIRE DES ORIGINES DE LA LOI NEWTONIENNE DE LA GRAVITATION

Par SIEGMUND GÜNTHER,

Professeur à l'École technique supérieure de Munich.

Dans son ouvrage capital ¹, I. NEWTON a formulé avec une précision lapidaire la proposition qui a régi depuis lors la Mécanique céleste comme un principe directeur irréfragable, sans jamais l'entraîner dans aucun conflit réel avec l'expérience. Cette proposition s'énonce, comme on sait : Deux corps s'attirent mutuellement avec une force dirigée suivant la ligne qui les joint, et qui est en raison directe du produit des masses, en raison inverse du carré de la distance. Nous venons en même temps d'énoncer cette vérité générale, que la *gravitation* ou la *pesanteur* est une propriété constante et universelle de tous les corps sans exception, et c'est cette vérité qui ruina définitivement la philosophie péripatético-scholastique de la nature. En accomplissant ce grand progrès et en mettant la clef de voûte à

1. NEWTON, *Principia philosophiæ naturalis mathematica*, livre III, 1, prop. 2 et 8, trad. allemande de *Wolffers*, pp. 385, 388 sqq. (Berlin, 1872).

l'édifice doctrinal élevé par COPPERNIC et KEPLER, NEWTON s'est acquis un si grand mérite, qu'il n'en serait nullement diminué si l'on montrait que, lui aussi, comme tous les grands penseurs, il a eu des précurseurs, et si l'on vérifiait à son égard le vieux proverbe : « *Nulla proles sine matre creata* ». Selon l'expression d'un physicien moderne¹, l'œuvre intellectuelle de NEWTON avait été préparée par KEPLER, GALILÉE et HUYGENS, mais son œuvre imaginative fut encore la plus importante, en ce qu'il établit l'identité de l'accélération des corps célestes avec l'accélération de chute découverte par GALILÉE. Lors donc que nous entreprenons d'exposer dans son ensemble l'histoire des origines de la théorie de la gravitation universelle, c'est sans aucune arrière-pensée d'amoindrir en quoi que ce soit la conquête intellectuelle de Newton. Il ne faut pas non plus oublier de dire dès le début que HANKEL² et LASSWITZ³ ont accumulé des matériaux très riches et très complets pour cette recherche historique, de sorte qu'elle n'a plus besoin que de compléments de détail. Mais, malgré ces excellents travaux antérieurs, un exposé d'ensemble du sujet peut paraître encore nécessaire.

L'idée qu'il règne dans la nature un penchant réciproque des corps à s'unir entre eux n'était pas étrangère aux anciens physiciens, comme le prouvent certaines assertions

1. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt*, p. 177 sqq. (Leipzig, 1889).

2. HANKEL, art. *Gravitation*, ap. ERSCH et GRUBER, *Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste*, 1^{re} section, 88^e partie, p. 113 (Leipzig, 1868).

3. LASSWITZ, *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton* (Hamburg-Leipzig, 1890).

occasionnelles les *Ioniens* et des *Éléates* ¹. Nous en rencontrons déjà une expression plus précise chez PLATON, dans le *Timée* ². Là se trouve clairement formulée la conception idéaliste-anthropomorphiste : une *âme du monde* sert d'intermédiaire entre les idées et le monde sensible, toutes les choses sont animées, et les affinités électives qui en résultent expliquent les attractions qu'exercent la pierre d'aimant et l'ambre frotté. On pensait exactement de la même manière en Chine aux temps anciens ³; car, dans un poème didactique composé sur l'aimant par un certain Kuo-Pho vers 300 ap. J.-C., on trouve le passage suivant :

« L'aimant attire le fer comme l'ambre les petits grains de sénevé; c'est comme un souffle de vent qui les pénètre tous deux secrètement et se transmet avec la vitesse d'une flèche ».

A cette interprétation des phénomènes, qu'on peut appeler *réaliste*, car elle correspond toujours jusqu'à un certain point aux faits, s'oppose la définition purement *nominaliste* qu'Aristote donne de l'essence de toute attraction, et qu'on trouve dans sa *Physique*, dans sa *Métaphysique*, dans le *De Generatione et Corruptione*, et surtout dans le livre caractéristique *De Cælo* ⁴. Le Stagirite est également opposé à une explication *animiste* et à une explication *atomiste* de la pesanteur; pour lui, il y a seulement des corps *absolu-*

1. A. HELLER, *Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit*, t. I, p. 14 sqq. (Stuttgart, 1882).

2. LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 66 sqq.

3. KLAPROTH, *Lettre à M. de Humboldt sur l'invention de la boussole*, p. 128 (Paris, 1834).

4. LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 100 sqq.

ment lourds et des corps *absolument légers*, et, comme le lieu naturel des premiers est la terre, il n'y a pas besoin d'une autre interprétation pour les phénomènes de chute: ils sont une simple conséquence de la définition donnée.

Cette conception règne souverainement dans tout le moyen-âge, et est encore manifeste chez COPPERNIC ¹. Selon lui, la pesanteur est une tendance (*appetentia*) incarnée par la Providence divine dans toutes les parcelles de matière, en vertu de laquelle elles se réunissent en forme de sphère; mais chaque sphère n'existe que pour soi, et il n'admet que partiellement une relation entre des sphères distantes. COPPERNIC était encore persuadé que toute matière a une place propre à laquelle elle appartient, et il ne s'écarterait d'ARISTOTE qu'en ce qu'il considérerait comme centre de la tendance commune, non plus la Terre abaissée au rang de planète, mais le soleil.

La théorie des *effluves atomiques* a été développée par LUCRÈCE ², en suivant, il est vrai, des modèles anciens, notamment EMPÉDOCLE. De l'aimant, ainsi que du morceau de fer qu'on en approche, s'échappe un courant de matière très finement divisée, et ces courants repoussent l'air interposé, ce qui paraît écarter l'obstacle à leur réunion. Le poète romain a aussi essayé de faire comprendre la vision par des pellicules extrêmement minces qui, entièrement conformes

1. N. COPPERNIC, *De revolutionibus orbium coelestium*, livre I, p. 9 (Nürnberg, 1543). — N. COPPERNICUS aus THORN, *Ueber die kreisförmigen Bewegungen der Weltkörper*, éd. allem. de Menzzer, p. 23 (Thorn, 1879). Cf. LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 544.

2. LUCRETIVS, *De natura rerum*, passim; A. HELLER, *op. cit.*, t. I, p. 154 sqq.

à la surface de l'objet, se détachent de celle-ci et sont assimilées par la rétine de l'œil; théorie que S^t AUGUSTIN a combattue ingénieusement dans ses *Lettres à Dioscurus* et à *Nebridius*¹. Des auteurs modernes se sont encore servis de semblables effluves : FRACASTORO², qui les considérait comme indispensables, « parce qu'aucune action ne peut avoir lieu que par un contact immédiat »; GILBERT³, qui voit dans l'*Humor* le lien qui unit toutes choses; enfin MAGNENUS⁴, qui assigne dans tous les phénomènes naturels le rôle principal à un *Spiritus* qui s'échappe des pores. Cette même théorie du transport immédiat, qui se montrait d'ailleurs fort utile dans le domaine du monde moléculaire, fut étendue à la Chimie par BOYLE⁵, qui admit qu'autour de chaque corps une matière impondérable qui s'échappe de ses pores forme une atmosphère spécifique. Par opposition aux anciens qui accordaient fort logiquement à leurs effluves un libre passage à travers le monde entier, Otto de GUERICKE⁶ voulut limiter leur sphère d'action; ainsi la pesanteur, transmise par l'air qui émane des corps terrestres, n'irait pas jusqu'à la lune, mais à peine à la moitié de sa distance. Nous verrons bientôt chez KEPLER une interprétation essentiellement différente du processus d'une émanation maté-

1. LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 26 sqq.

2. FRACASTORO, *Opera omnia*, p. 82 (Venezia, 1555). LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 307.

3. W. GILBERT, *De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete tellure physiologia nova* (London, 1600). LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 320.

4. MAGNENUS, *Democritus reviviscens, seu vita et philosophia Democriti*, p. 288 sqq. (Pavia, 1646). LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 509.

5. R. BOYLE, *Exercitationes de atmosphærio corporum* (Genève, 1680). LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 272 sqq.

6. O. v. GUERICKE, *Experimenta nova (ul vocantur) Magdeburgica de vacuo spatio*, p. 70 sqq. (Amsterdam, 1672). LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 296 sqq.

rielle ou immatérielle; mais auparavant il convient de prendre connaissance des fluctuations qu'a subies la conception de la pesanteur.

Le fait que des corps de faible masse ne sont pas attirés par un troisième corps aussi fortement que des corps de masse plus grande a été nettement reconnu par le célèbre mathématicien néerlandais STEVIN¹, dans un cas particulier qui peut être considéré comme exceptionnellement important. Il affirmait en effet que les marées ne peuvent apparaître d'une manière sensible qu'en mer libre, et non dans de petits bassins, parce que ceux-ci contiennent une trop petite masse pour qu'elle soit mise en mouvement par l'attraction ou la pression de la lune (car le mode d'action n'était pas encore parfaitement tiré au clair). Si l'on désigne par A et B les deux parties qui composent le théorème fondamental de NEWTON, on peut dire que c'est STEVIN qui, le premier, a eu l'intuition profonde de l'essence de A. L'opposition aristotélicienne du *lourd* et du *léger* n'avait évidemment rien à faire ici. GALILÉE a définitivement banni cette opposition, et certes ce n'est pas là le moindre de ses nombreux mérites. Il est extrêmement instructif de comparer, parmi les essais rassemblés par FAVARO dans la grande édition nationale des œuvres de GALILÉE², sous le titre de « *Juvenilia* », ceux qui sont réunis sous la rubrique *De motu*. On y voit comment le jeune homme, à peine sorti

1. A. GIRARD, *Les œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges*, p. 177 sqq. (Leide, 1634). KÆSTNER, *Geschichte der Mathematik*, t. III, p. 400 sqq. (Göttingen, 1799). GÜNTHER, *Handbuch der Geophysik*, t. II, p. 469 sqq. (Stuttgart, 1899).

2. *Le Opere di Galileo Galilei*, éd. A. Favaro, t. I, p. 243 sqq. (Firenze, 1890).

de l'école, est encore complètement prisonnier de la doctrine aristotélicienne, jusqu'à ce qu'il s'en délivre peu à peu et s'élève à cette proposition ¹ : « *Gravitatis corpus nullum expers esse, contra Aristotelis opinionem* ». Dans un dialogue composé un peu plus tard ², cette thèse est exprimée de nouveau avec encore plus de précision : « Si loquimur de gravitate et levitate absoluta, dico, corpora omnia, sive mixta sive immixta sint illa, habere gravitatem; si vero de gravitate vel levitate respectiva sermonem habemus, dico, corpora omnia itidem habere gravitatem, alia tamen majorem, alia minorem; istam autem minorem gravitatem esse, quam levitatem appellamus; et sic dicimus ignem leviolem esse quam aërem, non quia gravitate careat, sed quia minorem habet gravitatem, quam habet aër; aërem vero eodem modo leviolem aqua dicimus ». C'est à cette occasion que nous entendons pour la première fois le langage de la Physique rationnelle moderne, appliqué à des questions qu'il nous semble sans doute tout naturel de voir traiter en ce sens; mais c'est précisément à GALILÉE que nous le devons. TORRICELLI, le plus éminent disciple du maître, a excellemment réduit à l'absurde la thèse aristotélicienne dans un écrit qui est peu connu ³. Les Néréides au fond de la mer ont voulu aussi avoir une philosophie de la nature sur le modèle du Stagirite, et une

1. *Le Opere di Galileo Galilei*, etc., t. I, p. 355.

2. *Ibid.*, p. 367 sqq.; GALILÉE'S *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Welt-systeme*, éd. allem. de E. Strauss, p. 35 sqq. (Leipzig, 1891).

3. TORRICELLI, *Lezioni accademiche* (posthume; Firenze, 1715), V^e leçon, qui contient aussi d'autres considérations sur la philosophie des sciences naturelles. KÆSTNER, *op. cit.*, t. III, p. 403 (Göttingen, 1799).

des premières vérités qu'elles ont découvertes serait celle-ci : Le bois est un corps léger, car il monte. Les concepts de *lourd* et de *léger* dépendent par conséquent du milieu où l'on se meut; pour les hommes, c'est l'air; pour les Néréides, c'est l'eau, et par là est établie la relativité de ces concepts.

Ainsi, vers 1600, l'opinion commençait à dominer chez la plupart des savants, que la pesanteur est une propriété inhérente également à tous les corps de la nature. *L'attraction*, dit GILBERT¹, *est une action réciproque*. Le lieu n'a rien à y voir : « Est igitur gravitas corporum inclinatio ad suum principium, a tellure quae est egressa ad tellurem ». Peu après, D. GORLAEUS, un grand savant, de la vie duquel malheureusement on ne sait presque rien², s'est exprimé dans le même sens³ : la pesanteur est une « vis impressa » des corps, attribuée directement à l'action divine, et la légèreté est une privation plus ou moins accentuée de la pesanteur. GORLAEUS a également une pensée parfaitement juste, quand il dénie à l'air toute tendance à produire et à entretenir le mouvement, tandis que, d'après la doctrine d'Aristote, un mouvement dans l'espace vide d'air serait tout bonnement impossible.

Par là nous approchons, tant dans les faits que dans le temps, du penseur dont nous pouvons dire sans réserve qu'il a eu avant NEWTON l'idée la plus claire et la plus pro-

1. W. GILBERT, *op. cit.*, p. 47. LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 319 sqq.

2. LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 332 sqq.

3. GORLAEUS, *Exercitationes philosophicae quibus universa fere discutitur philosophia theoretica*, p. 146 sqq. (Leide, 1620). LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 457 sqq.

fonde de l'essence de l'*attraction universelle*; c'est incontestablement J. KEPLER. Avec son habitude de ne rien cacher à ses lecteurs, et de leur ouvrir des aperçus sur le travail de son esprit, il nous fait parcourir avec lui les étapes graduellement progressives de sa connaissance, et nous remarquons très clairement, comme nous l'avons exposé plus amplement ailleurs¹, qu'il est arrivé finalement à reconnaître l'*identité parfaite de la gravitation et de l'attraction magnétique*. Sans doute, l'image qu'il s'était faite de l'essence de la communication des forces était toute différente de celle qui régnait dans l'esprit de NEWTON, et qui est aussi en substance à la base des conceptions modernes. Pour le dire en deux mots, il croyait, comme le montre un écrit polémique dirigé contre FERELIUS², que la rotation du soleil, qui ne devait être constatée que plus tard par l'observation des taches du soleil, mais dont GIORDANO BRUNO avait déjà prévu et construit *a priori* la nécessité, devait fournir le ressort propre de tous les mouvements planétaires : « Les planètes sont des aimants, et sont mues à l'entour du soleil par une force magnétique, mais le soleil seul vit ». Voici comment KEPLER s'imaginer ce mode d'action : de l'équateur de la sphère solaire émanent de tous côtés dans l'espace des filets magnétiques sensibles, et, quand ils rencontrent quelque part un corps résistant, ils l'enveloppent

1. GÜNTHER, *Johannes Kepler und der tellurisch-kosmische Magnetismus*, ap. PENCES *Geographische Abhandlungen*, t. III, Heft 2, p. 44 (288) sqq. (Wien-Olmütz, 1888). LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 543 sqq.

2. KEPLER, *Tertius interveniens* (Francfurt-a-M., 1610), KEPLERI *Opera omnia*, éd. Frisch, t. I, p. 568 sqq. (Erlangen-Francfurt-a-M., 1858).

et le forcent à suivre une route qui devrait être proprement circulaire, mais qui est *elliptique* par suite de la « libration », dont nous ne pouvons ici expliquer l'essence. KEPLER ne pouvait pas, en vertu de sa manière de penser, découvrir la seconde partie de la loi de Newton, car les tentacules en question ne remplissent pas l'espace à trois dimensions, mais seulement un plan, et par conséquent l'action exercée à la distance r n'est pas proportionnelle à r^{-2} , mais à r^{-1} . En langage moderne, le potentiel de la force d'attraction de Kepler est *logarithmique*. Au contraire, le grand astronome a clairement conçu la première partie, et il a indiqué une expérience intuitive et réalisable pour démontrer les relations qui existent entre les actions de masses. Dans sa traduction du livre d'ARISTOTE *De Cælo*, KEPLER s'exprime en effet comme suit¹ : « J'explique cette question par l'exemple de deux aimants inégaux ; qu'on les place dans de petits bateaux égaux, et qu'on les laisse flotter sur un large bassin, ils nageront l'un vers l'autre, le plus faible avancera beaucoup et le plus fort avancera peu ». L'exposition systématique la plus claire se trouve dans l'*Epitome*². A quel point KEPLER avait des idées justes sur l'essence de l'attraction, c'est ce que montre cette assertion, que seule la forme sphérique assure la chute libre vers le centre³ : « Si terra non esset rotunda, gravia non undique ferrentur

1. GÜNTHER, *op. cit.*, p. 62 (306).

2. KEPLER, *Epitome Astronomiæ Copernicanæ* (Linz, 1618), ap. *Opera omnia*, t. VI, p. 344 sqq.

3. KEPLER, *Opera omnia*, t. I, p. 159 sqq. GÜNTHER, *op. cit.*, p. 47 (291). LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 545.

recte ad medium terræ punctum, sed ferrentur ad puncta diversa a lateribus diversis ».

Passons maintenant à ses plus proches successeurs. P. GASSENDI, comme on l'appelle d'ordinaire, bien que son nom fût sans aucun doute GASSEND¹, était un contemporain de KEPLER, un peu plus jeune que lui. Nous lui devons la restauration aussi hardie qu'ingénieuse de l'atomisme antique dans sa pureté, quoique sous un vêtement approprié au temps. Son mérite incontestablement grand a été mis en lumière par LASSWITZ². Comme le mouvement des atomes était le seul moyen d'explication admis pour tous les phénomènes naturels, GASSENDI ne pouvait se dispenser de ramener à la même cause la pesanteur et la chute libre, et nous voyons, dans le recueil de lettres qui porte le titre *De motu impresso a motore translato*³, qu'il avait pleinement conscience de toute l'importance et de la difficulté de la tâche entreprise. L'analogie avec le magnétisme était connue, mais par là on n'allait pas bien loin, car une telle explication demi-spiritualiste, qui paraissait assez naturelle à KEPLER, devait être rejetée par une manière de penser plus exacte, et ainsi naquirent tous ces doutes contre lesquels, comme nous le voyons dans la monographie connue d'ISENKRAHE⁴, durent se débattre tous les auteurs

1. LALANDE-DE ZACH, *Briefliche Nachrichten*, ap. *Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, t. II, p. 239; GÜTLER, *Gassend oder Gassendi*, ap. *Archiv für Geschichte der Philosophie*, t. X, p. 238 sqq.

2. LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 126 sqq.; *der Verfall der kinetischen Atomistik im XVII. Jahrhundert*, ap. *Annalen der Physik und Chemie*, 2^e série, t. III, p. 373 sqq.

3. GASSENDI, *Opera omnia in sex tomos divisa*, éd. Averanius, t. III, p. 449 sqq. (Lyon, 1658). LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 148 sqq.

4. ISENKRAHE, *Das Rätsel der Schwerkraft* (Braunschweig, 1879).

modernes qui essayèrent de trouver dans le choc des atomes d'éther la vraie cause de la pesanteur. GASSENDI¹ affirme, en complète opposition avec ARISTOTE, que ce n'est pas le *lieu* de la terre dans l'espace qui attire la pierre, mais son *corps*, n'importe où il se trouve; que la pesanteur est une force qui n'est pas inhérente en principe aux particules matérielles, mais qui leur est communiquée du dehors. L'accélération de la chute se laissait fort bien déduire², mais les conceptions que le philosophe français s'était formées sur les conditions prochaines de l'attraction subie par le corps tombant ne le satisfaisaient plus lui-même. Il fallait s'imaginer qu'une chaîne d'atomes invisibles se tend entre la terre et la pierre, ou que les rayons de la gravitation tirent vers la terre la pierre qu'ils ont saisie, ainsi que des cordes élastiques. Tout cela ne pouvait satisfaire un penseur vraiment pénétrant, qui se refusa constamment à admettre les atomes crochus et d'autres expédients semblables au moyen desquels ses successeurs étaient assurément en mesure de tout expliquer commodément, mais au prix de la simplicité interne et du naturel. GASSENDI était enclin à admettre une certaine *analogie entre les rayons de la gravitation et les rayons lumineux*, et par suite la *réfrangibilité* des premiers. Il n'est pas revenu plus tard sur cette question, et il a en somme renoncé à la possibilité d'une explication tout à fait satisfaisante de la gravitation par l'atomisme; mais les premières tentatives d'une telle

1. GASSENDI, *Opera omnia*, t. I, p. 346 sqq.

2. *Ibid.*, t. I, p. 308 sqq. LASSWITZ, t. I, p. 153.

explication que l'on trouve dans l'histoire méritent toujours la plus grande attention. A peu près en même temps, BERIGARD a eu la même pensée; c'est un des premiers qui aient décidément pris parti pour la proposition découverte par GALILÉE (mais qu'il avait peut-être aussi trouvée indépendamment), à savoir que tous les corps tombent également vite malgré la différence de leurs poids¹. Le *poids* d'un corps est, d'après BERIGARD, une conséquence de ce fait que la terre et les corps qui paraissent lourds s'envoient mutuellement des courants de corpuscules²; mais il n'explique pas davantage comment ces courants doivent produire l'effet indiqué.

Les grands mathématiciens français du xvii^e siècle se sont tous occupés du phénomène de la pesanteur, mais ils en ont beaucoup plus envisagé le côté quantitatif. Il faut naturellement faire exception pour DESCARTES, qui ramenait la pesanteur à de simples *tourbillons* et à la triple espèce de matière qui remplit l'espace³; mais il n'est pas arrivé à une description tant soit peu claire, pour ne rien dire d'une explication causale. On n'était même pas d'accord parmi les Cartésiens, encore plus tard, sur la question de savoir si les tourbillons dont l'action devait produire les marées agissaient sur l'eau par *pression* ou par *traction*⁴; c'était là un

1. BERIGARD, *Circulus Pisanus de veteri et peripatetica philosophia*, in *Aristotelis libros de celo*, p. 86 sqq. (Udine, 1647).

2. LASSWITZ, *op. cit.*, t. I, p. 496.

3. DESCARTES, *Principia philosophiæ*, 3^e partie, §§ 145, 240. LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 69 sqq., 119 sqq. MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, t. II, p. 215 sqq., 327 sqq. (Paris, 1758).

4. ROSENBERGER, *Die Geschichte der Physik in Grundzügen*, t. II, p. 107 sqq. (Braunschweig, 1884). GÜNTHER, *Handbuch der Geophysik*, t. II, p. 469.

recul marqué par rapport à la conception claire que KEPLER s'était faite des marées, du flux et du reflux zénithal et nadiral comme produits par une attraction magnétique¹. Des opinions de FERMAT et de PASCAL nous ne savons malheureusement que peu de chose; en tout cas, l'assertion par laquelle CHASLES étonna un jour le monde, à savoir que PASCAL aurait communiqué par lettre tout le secret de la gravitation à NEWTON alors âgé de onze à douze ans, a lamentablement échoué. Toute l'année 1867 des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* est remplie des mystérieuses découvertes de CHASLES, et des réfutations que lui adressèrent DUHAMEL, FAYE, BREWSTER, et particulièrement FAUGERE; selon BREWSTER, c'est un écrivain du XVIII^e siècle, DESMAIZEAUX, qui serait le véritable auteur de cette légende, « que le chevalier Newton devait tout son savoir à Pascal, » et c'est de son tissu de mensonges que l'inconnu² paraît avoir composé les documents faux avec lesquels il a si cruellement trompé l'excellent historien de la Géométrie. HANKEL³ a fait un exposé lumineux de tout cet incident. En réalité, quand on se borne à la correspondance authentique de PASCAL, qui n'est pas riche d'indications sur ce sujet⁴, il en ressort que dans le cercle de ses amis on n'avait pas d'opinion arrêtée sur la nature de la pesanteur, bien que l'hypothèse de la *réciprocité* de toute attraction parût l'emporter en proba-

1. KEPLER, *Opera omnia*, t. VIII, p. 61 sqq. GÜNTHER, *Johann Kepler*, p. 63 (307).

2. VRAIN-LUCAS (Note du trad.).

3. HANKEL, *op. cit.*, p. 330 sqq. *Die Entdeckung der Gravitation, et Pascal, ein litterarischer Bericht*, ap. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XIV, p. 165 sqq.

4. Blaise PASCAL, *Œuvres*, t. IV, p. 390 (La Haye, 1779). LASSWITZ, t. II, p. 547 sqq.

bilité. Le fait que PASCAL aurait formulé la deuxième partie de la loi de Newton dans une lettre adressée à BOYLE en 1652 est apocryphe¹, ou tout au moins nullement établi; s'il était authentique, il faudrait reconnaître PASCAL comme le premier qui aurait conçu en toute clarté la loi générale de l'attraction des masses. Pourtant, s'il faut en croire MERSENNE², FERMAT aurait eu connaissance du principe de l'équivalence de l'action et de la réaction, ainsi que du fait qu'un point matériel est plus faiblement attiré à l'intérieur d'une sphère qu'à l'extérieur, parce que certaines forces attractives se neutralisent mutuellement. Le théorème analogue, suivant lequel une couche sphérique homogène n'exerce aucune attraction sur un point de sa surface intérieure, n'a été démontré rigoureusement que par NEWTON³, mais il ne vaut que pour sa loi de gravitation. L'attitude de DESCHALES⁴ est très vacillante : il ne veut se compromettre ni avec les Cartésiens ni avec les Atomistes. Un autre contemporain, également estimé comme mathématicien, paraît beaucoup plus avancé, car LASSWITZ⁵ dit de lui : « PERSONNE DE ROBERVAL a essayé de généraliser la force attractive attribuée par KEPLER aux parties de la matière, et de fonder un système du monde sur cette force considérée comme une propriété essentielle de la matière ». Le même ROBERVAL,

1. R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, p. 446 (München, 1877); *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, VII, p. 45.

2. MERSENNE, *Harmonicorum libri XII*, lib. II, prop. 12 (Paris, 1636). J. C. FISCHER, *Geschichte der Naturlehre*, t. I, p. 271 sqq. (Göttingen, 1801).

3. NEWTON, *Principia...*, lib. I, prop. 112; éd. allem. de Wolfers, p. 191.

4. C. F. MILLIET DESCHALES, *Cursus seu mundus mathematicus*, t. I, p. 437 sqq. (Lyon, 1674). LASSWITZ, t. II, pp. 487 sqq.

5. LASSWITZ, t. II, p. 549.

dans son ouvrage d'ailleurs fort remarquable¹, a fait une tentative tout à fait originale *pour identifier la chaleur et la pesanteur*. Le soleil, en envoyant ses rayons calorifiques dans l'espace en apparence libre, produit une raréfaction de la matière qui y est partout répandue; déjà très subtile en soi, elle se disperse encore davantage, et ce n'est qu'aux places aux environs desquelles la chaleur se fait sentir moins fortement que les molécules s'agglomèrent, comme en vertu d'un instinct inné, pour former des sphères massives. On ne voit pas bien pourquoi la dissipation de la matière dans tout l'espace ne va pas en progressant uniformément, ni comment des centres d'attraction peuvent se former. Il n'est pas question d'une loi suivant laquelle l'action décroîtrait, il y a seulement ce fait que la gravitation n'existerait pas si le soleil perdait sa force calorifique.

Parmi les savants du xvii^e siècle qui se sont occupés à l'occasion de spéculations sur la nature de la pesanteur, le Néerlandais DEUSING mérite une place; c'est lui qui proposa un système du monde très singulier, qui était un compromis entre ceux de COPPERNIC et de TYCHO-BRAHÉ². Sur notre sujet il étudie la question: « Qua ratione motus naturalis gravium ac levium paullatim magis intendatur³ ». Les uns soutiennent que le poids du corps qui tombe augmente en s'approchant de la terre, ce qui est inadmissible; d'autres admettent une tendance latente à la réunion, qui serait

1. ROBERVAL, *Aristarchi Samii de mundi systemate* (Paris, 1644).

2. DEUSING, *De vero systemate mundi dissertatio mathematica* (Amsterdam, 1643).

3. DEUSING, *Naturæ theatrum universale*, p. 342 sqq. (Harderwijk, 1644).

d'autant plus grande que le corps serait plus proche du lieu auquel il appartient. Si cette dernière hypothèse était juste, il faudrait (cette objection est fort ingénieuse) que deux corps qui partent de la même hauteur tombent également vite, quel que fût leur état de mouvement antérieur; mais cela n'est pas exact, comme on le constate à première vue. Bien moins encore faut-il penser avec ARISTOTE à l'action médiatrice du milieu, par exemple de l'air. En poursuivant l'ordre d'idées ainsi indiqué, DEUSING se trouve amené à une proposition très remarquable, qui anticipe une terminologie universellement adoptée aujourd'hui, mais qui paraît avoir toujours échappé aux historiens. On lit en effet ceci : « His igitur præmissis, dico *potentialem* nisum unius ejusdemque corporis, nec aucti nec imminuti, eodem semper loco se habere, hoc est, nec augeri nec imminui; est enim qualitas promanans a natura ipsius corporis, quod talem nisum habet, quæ cum in eodem corpore, quod idem tale est, eodem semper modo se habere est necesse. *Actualis* autem gravitas unius ejusdemque corporis non in mediis tantum densitate differentibus diversa est; sed ad unius ejusdemque medii densitatem pro diuturnitate motus majorem semper rationem induit¹ ». Sans faire violence à cet exposé, on peut, en se rappelant le sens que l'énergétique moderne attache aux mots soulignés, en tirer la conséquence suivante, comme si Deusing lui-même l'avait formulée à sa manière : Tout corps, tant qu'il occupe la même place, possède la même *énergie*

1. DEUSING, *Naturæ theatrum universale*, p. 345.

potentielle, est un réservoir de force qui, dès qu'il vient à tomber, développe une *énergie actuelle*, et celle-ci à son tour est absolument la même, quelle que soit la constitution du milieu, qui ne peut modifier, en raison de sa densité, que la vitesse du corps. Si cette interprétation est adéquate à la pensée de l'auteur, elle prouve une fois de plus combien d'éclairs de génie on peut trouver dans les écrits souvent abstrus sur la philosophie de la nature, quand on se donne la peine de les chercher.

Le plus grand nombre des explications qui ont été discutées jusqu'ici portaient exclusivement sur la nature de l'attraction des masses comme telle, sans avoir égard à l'influence de la distance, en un mot, sur la première partie de la loi de NEWTON. Il ne pouvait en être autrement, tant que c'était principalement des *physiciens* et des *philosophes* qui s'occupaient de la solution du problème; l'*astronome* devait s'y prendre tout autrement, justement parce qu'il ne s'intéressait pas à ce problème pour lui-même, mais parce qu'il espérait pouvoir tirer de ses recherches une utilité pratique et une connaissance plus approfondie du mécanisme des mouvements célestes. C'est pourquoi la partie B n'était pas indifférente à KEPLER, et la même raison s'applique aux deux savants qui se trouvèrent dans le même cas avant NEWTON. Ce sont J. BOULLIAU (*Bullialdus*) et A. BORELLI.

On a voulu faire du premier un précurseur immédiat du grand Anglais : il aurait anticipé toute sa découverte, seulement il n'en aurait pas aperçu toute l'importance:

mais cette version, qui a passé dans beaucoup d'ouvrages, ne peut pas résister à l'examen des sources, comme LASSWITZ l'a récemment montré¹. Sans doute, il croyait à une gravitation universelle, mais, chose étrange, il niait entièrement l'attraction exercée par le soleil sur la terre. L'hypothèse que ses écrits² essaient d'établir d'une manière trop ample, avec des attaques obliques et vraiment inconvenantes contre KEPLER, se résume en ceci, que les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers, mais dont le second foyer, inoccupé, devrait être regardé comme le véritable centre du mouvement. Sur un seul point il a absolument raison contre KEPLER, et, s'il avait poursuivi l'idée qu'il indique dans une remarque critique sur la *vis motrix* de son grand prédécesseur, il aurait pu être en quelque sorte un Newtonien avant Newton. C'est ce qui ressort du texte de cette remarque³ : « Virtus autem illa, qua solprehendit seu harpagat planetas, corporalis quæ ipsi pro manibus est, lineis rectis in omnem mundi amplitudinem emissa quasi species solis cum illius corpore rotatur; cum ergo sit corporalis, imminuitur et extenuatur in majori spatio et intervallo, ratio autem hujus imminutionis eadem est, ac luminis, in ratione dupla intervallo-
rum sed eversa ». Il n'y a pas à équivoquer sur le sens de cette proposition : *Puisque la diffusion du flux de la gravitation est la même que celle du flux lumineux,*

1. LASSWITZ, *op. cit.*, t. II, p. 552.

2. BOULLIAU, *Astronomia Philolaica* (Paris, 1645); *Astronomiæ Philolaicæ fundamenta clarius explicata et asserta* (Paris, 1657).

3. BOULLIAU, *Astronomia Philolaica*, p. 23.

son action s'affaiblit dans le rapport inverse du carré de la distance à partir de son origine. BOULLIAU aurait dû s'attacher à ce point, mais il ne le fit pas, parce qu'il ne voulait pas reconnaître le soleil comme le centre des forces attractives, et par là il se priva et priva la science des avantages qui auraient pu découler du développement logique de son idée.

Il en est autrement de BORELLI; connaissant clairement le fait que, dans le système solaire, qu'il concevait en Copernicien convaincu (bien que réservé dans la forme), il ne pouvait y avoir des mouvements différents, il posa en principe que les lois valables pour les satellites de Jupiter devaient régir aussi les planètes, et, par suite, ce qu'il réussit à prouver pour les premiers valait immédiatement pour tout le système¹. Ensuite, il prouvait que chaque orbite planétaire doit être une ellipse, par les mêmes raisons, en substance, qui, depuis Newton, sont exposées dans tout manuel de Mécanique². La planète a naturellement une tendance à s'approcher du soleil, comme la pierre qui tombe tend vers la terre, et le morceau de fer vers l'aimant; et elle obéirait à cette tendance, si elle n'était pas soumise à une seconde force qui l'oblige à décrire une route circulaire autour du soleil³. Il importe peu théoriquement que BORELLI s' imagine que ce mouvement circu-

1. BORELLI, *Theoricæ Mediceorum Planetarum ex causis physicis deductæ*, p. 3 sqq. (Firenze, 1666).

2. *Ibid.*, p. 74 sqq.

3. « Prædictum planetam a vertigine solarium radiorum in orbem ferri circa solem per circulorum peripherias ab occasu ad ortum... »

laire est produit par la rotation du soleil autour de son axe. Il compose fort correctement entre elles deux petites impulsions dirigées suivant le rayon et la tangente, et la résultante apparaît en général comme la tangente d'une ellipse. Son raisonnement n'arrive pas jusqu'à la loi suivant laquelle cette *appropinquatio ad solem* se réalise, et cela n'était pas non plus nécessaire à son dessein immédiat. BORELLI arriva donc extrêmement près de Newton sur un point secondaire, mais, comme il renonçait d'avance à analyser la manière dont la planète s'approche du soleil, il ne pouvait découvrir la vraie nature de la pesanteur universelle.

Deux Anglais à peu près du même temps méritent aussi une mention; car, quoiqu'ils soient encore bien éloignés de la vérité, leurs théories se présentent comme des échantillons historiques très intéressants, l'une de la pure *philosophie corpusculaire*, l'autre de la *théorie des actions à distance* en voie de formation. Comme ROBERVAL, KENELM DIGBY¹ conçoit l'attraction comme un phénomène thermique; les rayons du soleil rebondissent sur la terre échauffée, et en emportent avec eux des particules. Ainsi s'élève un courant composé d'atomes lumineux et terrestres, et comme la lumière se dégage de la combinaison, les particules plus lourdes ne peuvent continuer leur mouvement, et retombent sur la terre. Par là elles entraînent en bas avec elles les masses qui se trouvent sur leur parcours,

1. KENELMUS DIGBY, *Demonstratio immortalitatis animæ rationalis, sive tractatus duo philosophici...*, Tractatus I, p. 85 sqq. (Francfurt-a-M., 1664). LASSWITZ, t. II, p. 196 sqq.

et cela perpendiculairement à la surface de la terre, parce que la direction de la chute doit, d'après la loi de la réflexion, faire des angles égaux avec les rayons caloriques incident et réfléchi. La conception de THOMAS HOBBS a avec la précédente une certaine parenté, si différents que soient les points de départ. Ce n'est pas l'échauffement, mais la rotation naturelle de la terre qui fait monter les molécules d'air, et comme elles sont plus légères que les autres corps, il en résulterait un espace vide d'air et même vide de matière, ce que HOBBS, disciple sur ce point d'ARISTOTE (*Horror vacui*), ne peut souffrir. Une partie des atomes d'air enlevés retourne donc vers la terre, et tous les corps qu'ils rencontrent en descendant doivent les accompagner vers le bas, s'ils n'ont pas une tendance particulière. Les *impetus* s'ajoutent aux *impetus*, d'où résulte l'accélération reconnue par Galilée d'une manière exacte. Jusqu'ici HOBBS¹ est simplement atomiste; mais il s'affranchit du concours du choc des atomes en attribuant en même temps à chaque corps, même au repos, un *conatus* qui les pousse dans tous les cas vers la terre, à moins qu'un obstacle ne soit présent. « C'est ici, dans le *conatus*, dit LASSWITZ, qu'est le berceau des actions à distance² ».

Mais le temps n'était pas encore venu pour celles-ci de sortir de leur état embryonnaire, car HUYGENS, dont nous

1. TH. HOBBS, *Opera philosophica quæ latine scripsit omnia*, éd. Molesworth (London, 1839), t. I (*De corpore*), p. 182 sqq.; t. IV (*De gravitate*), p. 305 sqq. LASSWITZ, t. II, p. 220 sqq., 235 sqq. GÜHNE, *Ueber Hobbes' naturwissenschaftliche Ansichten* (Dresden, 1886).

2. LASSWITZ, t. II, p. 341.

avons maintenant à parler, était, comme le montrent sa correspondance ultérieure et un écrit posthume¹, un atomiste convaincu, qui même « marque par ses travaux le point culminant de la théorie corpusculaire ». Selon lui, on ne doit faire appel qu'au *mouvement*, si l'on veut comprendre les phénomènes naturels, et tous les corps ont naturellement (c'est là le seul axiome indémontrable) un mouvement rectiligne ou un mouvement circulaire; et ce dernier, brusquement arrêté, devient centrifuge. C'est ce qu'il essaie de montrer par une expérience qu'ISENKRAHE² et MACH³ ont expliquée, ainsi que tout ce cycle d'idées, mais pas dans le même sens. HUYGENS, comme HOBBS, ramène la pesanteur à un « *conatus* », la matière subtile de l'éther tendant à s'éloigner du centre et à y pousser à sa place la matière grossière : si l'on saupoudre de cire la surface de l'eau contenue dans un cylindre tournant, et qu'on arrête brusquement le vase, le liquide continue encore à tourner quelque temps, tandis que les particules solides approchent du centre en décrivant des spirales. En dehors de l'éther proprement dit et des corps sensibles, il y a un *fluide gravifique* qui peut traverser sans difficulté les pores de tous les corps, fussent-ils aussi petits que ceux du verre, et qui se meut avec une vitesse énorme. Il n'y a rien à objecter à la définition de la pesanteur comme une grandeur proportionnelle au nombre des plus petites parties contenues dans un

1. HUYGENS, *De causa gravitatis* (Amsterdam, 1728), ap. *Opera reliqua*, t. I, p. 85 sqq.

2. ISENKRAHE, *op. cit.*, p. 87 sqq.

3. MACH, *op. cit.*, p. 149 sqq.

corps donné. Mais, en général, malgré la liberté de ses conceptions, HUYGENS restait encore en quelque mesure sous l'influence du tourbillon cartésien, en tant qu'il admettait sans raison suffisante une *trichotomie des états matériels*. Ce n'est que dans un appendice écrit plus tard, après avoir pris connaissance de l'ouvrage de NEWTON, qu'il abandonna définitivement l'alliance avec DESCARTES ¹. Il adopta la loi B, mais il regrettait, dans une lettre à Leibniz, de n'avoir pas réussi à trouver une explication causale de ce fait ². Il voulait trouver une cause mécanique pour la décroissance de la force en raison inverse du carré de la distance; mais la solution de ce problème lui échappa, comme à tous ceux qui depuis essayèrent de le suivre dans ce sentier épineux.

LEIBNIZ ne fut pas plus heureux, encore que bien des germes précieux soient contenus dans ceux de ses écrits qui concernent la question ³. D'accord avec PERRAULT ⁴, il admet la pression de l'éther comme une cause suffisante de tous les mouvements, mais il distingue radicalement, à peu près comme HUYGENS, la *verticité* qui entraîne circulairement la matière, et l'*attraction* qui tend vers un point fixe. Dans sa représentation de la *verticité*, LEIBNIZ s'approche jusqu'à un certain point du concept moderne des *lignes de force*, qui a acquis depuis FARADAY droit de cité dans la science.

1. HUYGENS, *De gravitate*, Additamentum, p. 116 sqq.

2. LASSWITZ, t. II, p. 350 sqq.

3. LEIBNIZ, *Hypothesis physica nova* (1671); *Specimen dynamicum pro admirandis naturæ legibus* (1695), ap. *Mathematische Schriften*, éd. Gerhardt, t. VI, p. 17 sqq., 240 sqq.

4. PERRAULT, *Discours des causes de la pesanteur des corps, de leur ressort et de leur dureté*. (Paris, 1680.)

L'éther enveloppe le corps d'un aimant de la même manière que les méridiens enveloppent une sphère, et la direction des forces, en particulier ici la direction de l'aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre, est tangente à la ligne de force, mais perpendiculaire à la trajectoire des particules d'éther. LEIBNIZ n'eut pas l'occasion d'analyser plus profondément les phénomènes de la gravitation.

Nous arrivons à l'homme remarquable, versatile, qui, avec son génie indéniable, donne toujours lieu à des jugements très divers, qui fut le collègue immédiat de NEWTON dans la Société Royale de Londres et en même temps son rival. On peut dire à bon droit de ROBERT HOOKE que son caractère varie dans l'histoire d'après le point de vue, et, en fait, son activité multiple, comparée avec l'inflexibilité logique que Newton manifeste dans la lutte pour la vérité, est bien moins propre à nous inspirer une bonne opinion de lui. Mais si nous nous plaçons au point de vue objectif, nous ne pouvons certes pas nous associer à la condamnation sans réserve de R. WOLF ¹, qui va jusqu'à qualifier de « brigand » ce savant, qui, à la vérité, fut souvent impliqué dans des procès de priorité ². HANKEL nous paraît le juger plus équitablement, quand il reproche aussi à NEWTON son animosité contre son concurrent, et quand il lui fait un grief de lui avoir trop marchandé le mérite qu'il dut reconnaître malgré lui à Hooke. En mettant l'œuvre de Hooke sur le même rang que celle d'autres savants, Newton lui faisait

1. R. WOLF, *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur*, t. 1, . 301 (Zurich, 1890).

2. *Ibid.*, p. 560.

grand tort, car, bien que ces autres savants fussent des chercheurs extrêmement habiles, ils n'avaient pourtant pas travaillé avec le même succès au problème en question. Nous pouvons dire avec HANKEL¹: « L'étude de HOOKE sur les forces centrales ² est un travail remarquable par la clarté et la rigueur logique ». Il émet trois propositions préliminaires, qui sont toutes parfaitement exactes : Tous les corps sont lourds, non seulement en ce sens qu'ils attirent d'autres corps extérieurs, qui peuvent d'ailleurs obéir réellement à cette attraction, mais ils sont tous lourds les uns à l'égard des autres; tous les corps en mouvement rectiligne persistent dans cet état, tant qu'une force déviatrice ne les oblige pas à suivre une trajectoire courbe, qui peut être un cercle, une ellipse ou une autre ligne; enfin l'attraction croît en approchant du corps attirant. Seulement il y a dans les deux dernières thèses une certaine indétermination, et HOOKE se découvrait en pleine lumière, quand il affirmait que d'autres occupations pressantes l'avaient empêché de consacrer son temps et ses forces à rechercher la loi d'attraction. Depuis que cet écrit avait été publié, il s'était écoulé treize ans avant que NEWTON se décidât à rompre le silence; et, si nous le croyons volontiers quand il affirme qu'il avait clairement présent à l'esprit le nouveau principe dès 1669, nous pensons pourtant qu'il ne pouvait lui être indifférent d'avoir été devancé par HOOKE. Comme nous l'avons dit, il n'est pas juste envers lui, lorsque, passant en revue ses prédécesseurs

1. HANKEL, *Gravitation*, p. 330 sqq.

2. HOOKE, *An Attempt to prove the Motion of the Earth* (London, 1674).

en quelques mots (d'ailleurs historiquement discutables), il s'exprime sur sa gravitation comme suit : « Les savants modernes admettent, soit des tourbillons, comme KEPLER et DESCARTES, soit quelque autre principe de choc ou d'attraction, comme BORELLI, HOOKE et d'autres de nos compatriotes¹ ». Par ces derniers, NEWTON entendait, comme on s'en aperçoit ailleurs, WREN et HALLEY, qui, pourtant, n'avaient pas encore produit de travaux originaux dans ce domaine.

Quoi qu'il en soit, l'histoire *des origines* de la loi de gravitation prend fin avec HOOKE, et une nouvelle ère commence pour la Mécanique céleste et pour la Physique du globe. Malheureusement ce progrès eut par compensation ce résultat fâcheux, que la *Cinétique*, appelée à un si grand avenir, fut éliminée de l'ordre du jour scientifique, et à sa place trôna la *théorie des actions à distance*, que Newton lui-même ne proposait au début qu'avec hésitation, et dont il ne fit que plus tard, sous l'influence de COTES et de BENTLEY, une des colonnes de son système, sans s'inquiéter de faire ainsi rentrer par une porte de derrière les *qualités occultes* auparavant bannies, comme LEIBNIZ le soutenait contre CLARKE, et comme HANKEL² le prouve avec pénétration.

1. NEWTON, *Principia*, éd. Wolfers, p. 514.

2. HANKEL, *op. cit.*, p. 354 sqq. C. NEUMANN, *Die Prinzipien der Elektrodynamik* (Tübingen, 1868); *Recueil des Lettres entre Leibniz et Clarke*, ap. LEIBNIZ, *Opera philosophica*, éd. Erdmann, p. 746 sqq.

SUR L'HISTOIRE DES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

Par HENRI BOUASSE,
Professeur à l'Université de Toulouse.

Lorsque CLAUSIUS, reprenant une proposition de Sadi CARNOT, à savoir que la chaleur ne passe pas toute seule d'un corps froid sur un corps chaud, en eut extrait un principe nouveau, il trouva juste de conserver au principe le nom de celui qui avait énoncé la proposition. Il est assez inutile de discuter s'il montra en cela une modestie exagérée; mais il est important de déterminer quelles relations existent entre le principe de Carnot et celui de Clausius; c'est le but principal que nous poursuivons dans ce mémoire. Un patriotisme mal entendu ne doit pas, contre toute raison, rapprocher deux principes très différents; aussi bien, le principe de Carnot est en soi une découverte remarquable par les problèmes qu'il posait, et Clausius a reconnu, par le nom qu'il a laissé à son principe, ce qu'il devait au premier.

Nous voulons préciser aussi dans ce travail pourquoi

l'hypothèse du calorique-matière s'est maintenue si longtemps, et comment une seule expérience de Joule a pu démolir en un instant l'édifice que l'on savait assurément mal bâti, mais que l'on considérait encore comme d'une solidité à toute épreuve.

I

A la fin du xviii^e siècle, les deux notions de quantité de force vive et de travail avaient été précisées, après quels tâtonnements et quelles discussions, ce n'est pas le lieu de le dire. La distinction de la force, du travail et de la puissance avait été particulièrement difficile à établir : « Archimède ne demandait qu'un levier et un point fixe pour soulever le globe de la terre, » écrivait Lazare CARNOT dans son admirable *Traité de l'équilibre et du mouvement* (1803) ; « comment peut-il se faire, dit-on, qu'un homme aussi fort qu'Archimède ne puisse pas, quand même il serait muni de la plus belle machine du monde, élever un poids de cent livres, en une heure de temps, à une hauteur médiocre donnée ? » C'est que l'effet d'une machine au repos est de produire une force, ou plutôt d'équilibrer des forces entre elles. « Si Archimède avait eu ce qu'il demandait, ce n'est pas lui qui aurait soutenu le globe de la terre, c'est son point fixe ; tout son art aurait consisté, non à redoubler l'effort pour lutter contre la masse du globe, mais à mettre en opposition deux grandes forces, l'une active, l'autre passive, qu'il aurait eues à sa disposition. »

Un travail ne peut pas se créer, même à l'aide des machines les plus perfectionnées. Une machine est caractérisée par une certaine puissance : elle fournit un certain travail en un certain temps; si, par exemple, elle élève 75 kilogrammes de la hauteur verticale d'un mètre toutes les secondes, on dit qu'elle a une puissance d'un cheval-vapeur. La machine humaine bien entretenue possède une puissance moyenne connue : un homme, avec un treuil, ne peut guère élever, par jour, plus de 100 tonnes à un mètre. Or le globe possède à peu près une densité moyenne de 5,5; si on veut bien admettre le problème bizarre d'Archimède, qui soumet la terre à une force d'attraction égale en tous ses points à celle que produit la terre à sa surface, le poids de la terre est le produit de la densité par le volume, soit 7×10^6 tonnes. En une journée Archimède tournant une manivelle élèvera donc la terre suspendue à un câble d'une longueur qui est à 1 mètre comme 1 est à 7×10^6 : quantité tout à fait inappréciable.

Quand on se fut fait une idée nette de la force, du travail et de la puissance, on comprit aisément le rôle du principe du travail virtuel que l'on peut énoncer ainsi : il y a équilibre dans une machine, quand tout petit mouvement compatible avec les liaisons entraîne un travail total nul, ou ne peut être obtenu que par une dépense supplémentaire de travail : ce dernier travail est nécessairement dû à des forces extérieures à la machine. Le principe redonne, dans tous les cas où il s'applique, la proposition bien connue

que, ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse, ou plus exactement en déplacement.

A la fin du XVI^e siècle, tout le monde admettait l'équivalence d'un travail et d'une force vive. C'était une première forme, incomplète il est vrai, du principe de la conservation de l'énergie. Dès le début du siècle, LEIBNIZ avait prouvé cette équivalence dans des cas particuliers. Malheureusement le problème avait été embrouillé comme à plaisir par de simples questions de mots. Devait-on évaluer la force des corps en mouvement autrement que celle des corps en repos? question sans solution parce qu'elle n'a pas de sens. Si, comme le voulait Leibniz, on mesure cette force par le travail que les corps, en mouvement et ramenés au repos, peuvent produire, personne ne pouvait nier que la force vive fût la mesure cherchée. Mais alors pourquoi s'obstiner à parler de la force des corps en mouvement? pourquoi ne pas énoncer simplement ce fait d'expérience que les corps sont comme des réservoirs de travail, des magasins d'énergie dont la mesure est précisément leur force vive? Personne ne le contestait.

Enfin la théorie des machines se constituait : le principe de l'impossibilité du mouvement perpétuel s'énonçait d'une manière précise.

« Qu'il soit question de faire tourner la meule d'un moulin, soit par le choc de l'eau, soit par le vent, soit par la force des animaux, ce n'est pas à faire que le choc de l'eau, de l'air ou l'effort de l'animal soit le plus grand que vous devez vous attacher, mais à faire consommer à ces agens le plus

grand moment d'activité possible » (leur faire effectuer le plus grand travail possible). « Veut-on faire un vide quelconque dans l'air? de quelque manière qu'on s'y prenne, il faudra, pour y parvenir, consommer un moment d'activité » (dépenser un travail) « aussi grand que celui qui serait nécessaire pour élever à trente-deux pieds de hauteur un volume d'eau égal au vide qu'on veut occasionner.... Dans une machine en repos, où il n'y a d'autre force à vaincre que l'inertie des corps, voulez-vous faire naître un mouvement quelconque par degrés insensibles? le moment d'activité » (travail) « que vous aurez à consommer sera égal à la somme des forces vives que vous y ferez naître; et s'il est seulement question de changer le mouvement qu'elle a déjà, le moment d'activité » (travail) « à consommer sera seulement la quantité dont cette somme augmentera par le changement, » etc. LAZARE CARNOT conclut ainsi ce passage admirable que j'écourte : « Il importe donc fort peu, quant à la dépense d'activité » (travail) « à consommer, que les forces employées soient grandes ou petites, qu'elles emploient telles ou telles machines, qu'elles agissent simultanément ou non; ce moment d'activité est toujours égal au produit d'une certaine force par une vitesse et par un temps (ce qui équivaut au produit d'une force par un déplacement) ou la somme de plusieurs produits de cette nature; et cette somme doit toujours être la même de quelque manière qu'on s'y prenne; les agents ne gagneront donc jamais rien d'un côté (force ou déplacement) qu'ils ne le perdent de l'autre (déplacement ou force) ».

Il est difficile d'exprimer avec plus de vigueur les dernières conséquences du principe posé par LEIBNIZ. A la vérité, vers 1803 et même en 1785, lors de l'apparition de la première édition du livre de LAZARE CARNOT, ces notions étaient déjà dans le domaine public ; mais elles y flottaient un peu vagues. En 1798 l'illustre COULOMB publiait un mémoire sur la puissance mécanique des hommes considérés comme machine : développant les mêmes principes que Carnot, il en donnait d'admirables applications.

Dans certains cas, le principe de la conservation des forces vives, ou de l'équivalence de la force vive et du travail, prend une autre forme. Le travail est considéré comme en réserve, comme pouvant s'exécuter : il existe comme énergie potentielle avant même que les forces aient commencé à agir. Un corps de 1 kilogramme posé sur une table, à 1 mètre du sol, représente pour nous un travail disponible de 1 kilogrammètre : quand le corps tombe, sa force vive ou son énergie cinétique croît, son énergie potentielle décroît. Nous pouvons dire que la somme de ces deux énergies de nature différente reste constante, et le principe de l'équivalence de la force vive et du travail devient celui de la constance de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Mais tant s'en faut que les deux énoncés soient aussi généraux l'un que l'autre. Pour parler d'une réserve d'énergie, d'un travail disponible, encore faut-il que ces quantités soient bien déterminées. Si j'ai de l'or dans mes coffres, je puis énoncer le chiffre de ma fortune ; si j'ai du

blé, je ne le puis, ignorant quel sera son cours au moment de ma liquidation. De même, s'il est convenu que je puis utiliser tout le travail représenté par un kilogramme placé à un mètre du sol, je puis dire que je possède un kilogram-mètre; quel que soit le chemin parcouru pour arriver au sol, le travail est toujours le même : la pesanteur admet un potentiel. S'il en était autrement, suivant le chemin parcouru, je recueillerais un travail différent; il serait donc absurde de parler d'une réserve déterminée d'énergie. Le premier soin des physiciens est donc de savoir si une force admet ou non un potentiel. Or cela revient à savoir si la différentielle qui se trouve sous un signe somme est exacte ou non. Ces deux propositions ne sont pas plus claires l'une que l'autre : qui comprend l'une comprend l'autre. Et c'est pitié de voir des gens déclarer solennellement qu'ils sont réfractaires aux mathématiques, et parler d'énergie potentielle ou cinétique avec une désinvolture qui serait ridicule, si elle n'était pas lamentable.

Le principe de l'équivalence du travail et de la force vive n'est pas identique au principe de la conservation de l'énergie. Car si la transformation intégrale de l'une de ces formes d'énergie dans l'autre est théoriquement possible, il ne résulte pas de là qu'elle le soit pratiquement. En fait elle ne l'est jamais. Chaque fois qu'il se produit un frottement ou un choc, il y a destruction de force vive, l'augmentation d'énergie cinétique est inférieure au travail dépensé.

Pour qu'il y ait conservation de l'énergie, il faudrait au moins une troisième forme d'énergie équivalente aux deux

autres. Or, à la fin du XVIII^e siècle, on admettait bien qu'il était impossible de créer de l'énergie; mais il ne semblait étonnant à personne qu'on pût en perdre.

L'impossibilité du mouvement perpétuel était un dogme : « L'acception générale et philosophique des mots *mouvement perpétuel* doit comprendre, non pas seulement un mouvement susceptible de se prolonger indéfiniment après une première impulsion reçue, mais l'action d'un appareil, d'un assemblage quelconque, capable de créer la puissance motrice » (travail ou énergie) « en quantité illimitée, capable de tirer successivement du repos tous les corps de la nature, s'ils s'y trouvaient plongés, de détruire en eux le principe de l'inertie, capable enfin de puiser en lui-même les forces nécessaires pour mouvoir l'univers entier, pour prolonger, pour accélérer incessamment son mouvement. Telle serait une véritable création d'énergie¹ ».

Quant à la destruction de force vive, on n'en disait mot. Elle paraissait si naturelle, qu'après avoir cherché dans les échanges de chaleur, considérée comme matière, une nouvelle forme d'énergie, Carnot arrivait encore à conclure que, pour ainsi dire dans tous les cas, la somme des énergies potentielle et cinétique et de la nouvelle forme d'énergie qu'il croyait avoir découverte, était constamment décroissante. Notre étonnement cessera si nous voulons bien nous souvenir qu'aujourd'hui encore nous admettons comme générale une dégradation, une diminution de valeur de l'énergie dont nous affirmons que la quantité est constante.

1. SADI CARNOT, *Puissance motrice du feu*, 1824.

Il semblait donc naturel aux contemporains de Prony que l'on pût absorber des milliers de kilogrammètres dans un frein qui chauffait, fumait, et qu'on devait constamment arroser pour qu'il ne s'enflammât pas. Mais il leur paraissait digne d'une explication que l'on pût créer du travail avec les machines à vapeur. Depuis la découverte des machines à feu, on disait que la force du calorique poussait le piston : mais on comprenait que ce n'était pas là une explication, mais l'énoncé du fait lui-même ; on devait se poser « cette question à la fois curieuse et importante : la puissance motrice de la chaleur était-elle immuable en quantité, ou variait-elle avec l'agent dont on faisait usage pour la réaliser, avec la substance intermédiaire choisie comme sujet d'action de la chaleur? »

Avant d'étudier la tentative célèbre de Sadi CARNOT, à qui nous empruntons ces lignes, exposons les idées qui avaient cours sur la théorie de la chaleur à la fin du XVIII^e siècle.

II

Discutons d'abord le problème suivant : Un corps passe d'un état bien déterminé à un autre état bien déterminé ; faut-il lui fournir nécessairement une quantité de chaleur, évaluée en calories, indépendante de la succession des états parcourus pour passer du premier au dernier ? En d'autres termes, les états étant définis par un certain nombre de variables indépendantes, la quantité de chaleur dQ à fournir pour passer d'un état à l'état voisin, est-elle une différen-

tielle exacte d'une fonction de ces variables? Le mot *état* est pris ici, non seulement dans le sens restreint d'état solide, liquide ou gazeux, mais dans le sens très général de manière d'être.

Soit, par exemple, un kilogramme d'un gaz parfait, d'air pour préciser; nous savons que sa pression évaluée en kilogrammes par mètre carré, son volume évalué en mètres cubes, et sa température évaluée en degrés centigrades sont reliés par l'équation

$$pv = 29,3 (273^\circ + t)$$

qui résume les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

Il est clair que si deux des quantités p , v , t sont choisies arbitrairement, la troisième est calculable. Si je veux que ce kilogramme d'air exerce une pression de 1 atmosphère, soit 10333 kilogrammes par mètre carré, et cela à la température de 0° , je déterminerai le volume à lui donner en posant

$$t = 0, \quad p = 10333, \quad v = \frac{29,3 \times 273}{10333}.$$

Ce kilogramme d'air est donc dans un état défini sans ambiguïté, si je me donne arbitrairement les valeurs de deux des quantités p, v, t : v, t par exemple. Il est loisible de considérer v et t comme des variables indépendantes, et p comme une fonction de ces variables. Ce choix est cependant arbitraire; je peux aussi bien dire que v est fonction de p et de t choisies comme variables indépendantes.

Le problème posé prend, dans le cas particulier d'un gaz parfait, l'énoncé suivant.

Le gaz étant défini par 2 variables t et v , pour passer de l'état caractérisé par les valeurs numériques t_1 et v_1 à l'état caractérisé par les valeurs numériques t_2 et v_2 , faut-il fournir une quantité de chaleur indépendante des valeurs de t et de v intermédiaires, ou généralement de la manière dont se fait le passage du premier au second état?

La réponse est négative, comme nous l'apprennent les premières expériences de JOULE (1842). Comprimons par exemple à 10 atmosphères du gaz dans un réservoir ayant la capacité de 1 mètre cube : soit un autre réservoir d'une capacité égale, mais complètement vide. Faisons-les communiquer. Le gaz se détend; sa température définitive et sa température initiale sont les mêmes : il passe donc de 10 atmosphères à 5 atmosphères. Quelles que soient les phases intermédiaires de l'expérience, on n'a produit, somme toute, aucun travail extérieur, puisque la capacité où le gaz se précipite est vide : rien ne s'oppose à la détente. Cette transformation du gaz parfait de 10 atmosphères à 5 atmosphères, sans changement de température et sans travail extérieur, est irréversible : il est impossible en effet de ramener le gaz à l'état initial par des opérations inverses.

Nous pouvons effectuer la même opération par voie encore isothermique, mais réversible. Supposons le gaz enfermé dans un cylindre fermé à un de ses bouts par un fond fixe et à l'autre par un piston qui se meut sans frottement. Ce cylindre, dont le fond fixe est perméable à la chaleur, est plongé dans un vaste réservoir d'eau dont la température

est maintenue invariable par un procédé quelconque. Si les opérations sont assez lentes, la température du gaz sera maintenue automatiquement constante grâce aux échanges à travers le fond. Le cylindre est placé verticalement, de telle manière que le piston pèse sur le gaz : pour ne pas tenir compte de la pression de l'atmosphère, je remplace son effet par des poids placés sur le piston, dont je suppose la surface égale à 1 mètre carré. Par hypothèse, au début de l'expérience, le gaz occupe 1 mètre cube et sa pression est 10 atmosphères. Il exerce donc sur le piston une force de 103 330 kilogrammes : je surcharge celui-ci jusqu'à ce que l'équilibre existe.

J'enlève alors progressivement ces poids : le gaz se dilate à température constante, grâce à la perméabilité thermique du fond du cylindre. Je continue à enlever des poids jusqu'à ce que la charge totale soit de 51 665 kilogrammes, c'est-à-dire jusqu'à ce que la pression soit réduite à 5 atmosphères. Le volume du gaz est alors doublé, le piston s'est élevé de 1 mètre. Il est facile de voir que dans cette opération un certain travail a été accompli. En effet, les 51 665 kilogrammes que j'ai enlevés peu à peu l'ont été à des hauteurs variant entre 0 et 1 mètre à partir de la position initiale du piston. Je peux imaginer que je les ai fait glisser sans frottement de la surface du piston sur des supports convenablement disposés pour les recevoir : ils représentent maintenant une certaine énergie potentielle et par conséquent un certain travail a dû être dépensé pendant la dilatation du gaz.

L'évaluation de ce travail est aisée. Soit S la surface du piston (1 mètre carré), et soit x le déplacement linéaire du piston à partir d'une certaine position prise pour origine. La force à chaque instant est pS , d'après la définition même de la pression; le déplacement du point d'application de cette force est dx ; le travail est donc $pSdx$, puisque la pression est normale au piston, c'est-à-dire puisque le déplacement dx est compté dans la direction de la force. Or Sdx est la variation de volume dv ; le travail élémentaire est donc $p dv$, et le travail total effectué entre deux positions du piston dont la distance est fixée, est donné par l'intégrale $\int p dv$. Pour qu'il soit énoncé en kilogrammètres, p doit représenter des kilogrammes par mètre carré et v des mètres cubes. La transformation étant isothermique, on a

$$pv = 29,3 (273^\circ + t) \quad p = \frac{29,3 (273^\circ + t)}{v}$$

et enfin

$$\int p dv = 29,3 (273^\circ + t) \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v}$$

les limites sont v_0 ou 1 mètre cube, et v_1 ou 2 mètres cubes. On sait que l'intégrale indéfinie que nous avons à évaluer est *log. nép. v*; en définitive :

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = 2,302 (\log. \text{vulg. } v_1 - \log. \text{vulg. } v_0)$$

Le travail effectué par le gaz est égal à 71 587 kilogrammètres. L'expérience prouverait que 167 calories (soit une calorie par 425 kilogrammètres) ont traversé le fond perméable du cylindre.

L'opération est réversible : je peux faire glisser en sens inverse les poids et les amener sur le piston ; le gaz reprendra peu à peu son volume primitif ; le réservoir réabsorbera 167 calories, et tout reviendra à l'état initial.

Voici donc deux transformations qui amènent un kilogramme du gaz d'un même premier état (10 atmosphères, 1 mètre cube) au même second état (5 atmosphères, 2 mètres cubes) et qui exigent des quantités de chaleur différentes, l'une 0 calorie, l'autre 167. Il est vrai que dans la première aucun travail n'est effectué, que dans la seconde nous recueillons 71 587 kilogrammètres. Ainsi le passage d'un état à un autre état exige des quantités de chaleur qui dépendent des états intermédiaires.

LAPLACE, LAVOISIER, les CARNOT ignoraient ces faits : ils admettaient une hypothèse opposée, à savoir que la chaleur qu'un corps absorbe ou dégage pour passer d'un premier état à un second est indépendante des états intermédiaires. On peut expliquer cette erreur, dont les conséquences étaient lourdes, par la faiblesse des ressources de l'art expérimental en leur temps. Il est cependant probable qu'ils auraient correctement résolu le problème, si seulement ils l'avaient posé : mais ils admettaient comme postulat la matérialité du calorique. En 1827, POUILLET écrivait dans son *Traité de physique* : « Il y a donc un agent qui est distinct de la substance propre des corps, qui émane de leur masse, qui franchit les plus grandes distances, qui établit une communication continuelle entre eux et nous, et qui est la cause des sensations de chaleur que nous éprouvons » : c'est un

fluide impondérable, mais c'est un fluide. Personne ne doutait que pour faire un corps composé déterminé, il ne fallût toujours les mêmes proportions des composants, quels que pussent être les composés intermédiaires : les choses devaient se passer de même pour « la matière de la chaleur », comme disait LAVOISIER. Un corps chauffé est un composé de nature particulière ; on ne peut faire ni gain ni perte de calorique ; le calorique est un corps comme les autres, qui ne diffère d'eux qu'en ce que la balance ne le décele pas.

Voici en quels termes LAVOISIER exprime la théorie du calorique qui régnait à son époque : « Je dirai presque que tous les corps de la nature sont pour la matière de la chaleur ce qu'une éponge est pour l'eau ; pressez l'éponge, vous diminuez les petites cellules qui retiennent l'eau ; faites en sorte de la dilater, aussitôt les cellules augmentées, se trouvant en état de loger une plus grande quantité d'eau, l'absorberont de nouveau. Les variations que tous les corps éprouvent par l'effet du chaud et du froid sont une suite de ce phénomène ; on ne peut les échauffer, c'est-à-dire y introduire une plus grande quantité de la matière de la chaleur, sans en écarter les parties, et c'est cet écartement qui fait place à la matière de la chaleur. Réciproquement, toutes les fois qu'on parvient à les amplifier, à augmenter leur volume d'une manière quelconque, ils acquièrent en même temps une plus grande capacité pour contenir la matière de la chaleur, et ils sont alors disposés à en recevoir de tous les corps environnants. Il est possible que ce soit à cet effet

que tienne la chaleur très sensible que prennent les métaux, lorsqu'on les écroutit ou qu'on en diminue le volume d'une manière quelconque; c'est une manière de presser l'éponge et d'exprimer le fluide qu'elle contient ». Le mémoire où je relève cette théorie est de 1783, postérieur de trois ans au grand mémoire fait en collaboration avec LAPLACE sur la chaleur, dans lequel on a voulu retrouver le germe de notre principe actuel de l'équivalence.

Les contemporains de Lavoisier et de Carnot avaient heureusement des idées plus saines sur la solution du problème suivant : Quand un travail extérieur est produit par la dilatation ou le changement d'état physique des corps, existe-t-il un rapport constant entre la chaleur à fournir et le travail recueilli? Deux exemples très élémentaires prouvent qu'un rapport constant n'existe pas, et les faits étaient connus au commencement du XIX^e siècle.

Dans le cylindre que nous avons décrit précédemment, mettons un kilogramme d'eau à 100°, et chargeons le piston de manière qu'il exerce la pression de 1 atmosphère. Puisqu'il a 1 mètre carré de surface, le poids total est de 10 333 kilogrammes. Fournissons de la chaleur de manière à vaporiser cette eau, la température restant constante et égale à 100°. La pression reste constante, égale à 1 atmosphère, il y a toujours équilibre, et l'eau a absorbé 537 calories quand la vaporisation est complète. Bien entendu, pour que l'opération s'effectue réellement, il faut que la pression soit légèrement inférieure à 1 atmosphère. L'opération est réversible; il suffit que la pression soit tant

soit peu supérieure, la vapeur se condense et les 537 calories sont restituées au réservoir.

Le travail effectué pendant la vaporisation est très aisément calculable. Un kilogramme d'eau occupe sensiblement 1 litre à 100°; à l'état de vapeur saturée à 100°, il occupe 1650 litres. Le volume s'est accru de 1649 litres. Le piston, ayant 1 mètre carré de surface, s'est déplacé de 1^m, 649. Le travail a donc été de

$$10333 \times 1,649 = 17\,034 \text{ kilogrammètres}$$

pour 537 calories, soit un travail de 32 kilogrammètres approximativement par calorie dépensée, au lieu de 425 recueillis par l'emploi de la dilatation du gaz parfait.

Nous pouvons obtenir des résultats plus frappants. Supposons qu'au début de l'opération l'eau soit à la température de 0°; la température restant constante et la pression étant de 1 atmosphère, retirons de la chaleur. Il suffit, pour que l'opération soit réalisable, que le réservoir indéfini de chaleur qui entoure par hypothèse le cylindre, soit à une température inférieure à 0°, mais aussi voisine qu'on voudra. Nous privons le kilogramme d'eau de 80 calories et nous l'amenons ainsi à l'état de glace à 0°. Pendant cette opération, il y a dilatation, le piston est repoussé, du travail extérieur est produit : nous avons ainsi à la fois gain de chaleur et gain de travail. Il résulte de ces exemples que, pour trouver entre les phénomènes caloriques et les autres formes de l'énergie un rapport d'équivalence, il faut imposer des conditions à la série des transforma-

tions utilisées. Carnot le comprit et limita ses recherches au cas des cycles fermés.

III

Puisque le calorique était considéré comme une matière ne pouvant être ni créée ni détruite, et se combinant aux corps pour former avec eux des composés analogues aux autres composés chimiques, dès que Carnot se fut posé la question d'une équivalence possible, elle se trouva par le fait même résolue. Il parvint nécessairement à la conclusion suivante dont j'emprunte les termes à son illustre commentateur CLAPEYRON :

« Une quantité d'action mécanique » (travail) « et une quantité de chaleur pouvant passer d'un corps chaud à un corps froid sont des quantités de même nature et qu'il est possible de remplacer les unes par les autres; de la même manière qu'en mécanique un corps pouvant tomber d'une certaine hauteur et une masse animée d'une vitesse sont des quantités du même ordre et que l'on peut transformer les unes dans les autres par des agents physiques. »

Voilà l'hypothèse fondamentale : elle n'a évidemment aucun sens si nous l'appliquons à une modification quelconque de l'agent qui sert à transformer le phénomène calorifique en travail; nous savons déjà par les exemples du paragraphe précédent que le calorique peut produire du travail sans qu'il y ait chute de température, mais nous savons aussi qu'il serait vain de chercher une équivalence

sans imposer des conditions à la série des modifications.

Carnot n'applique son hypothèse qu'à l'ensemble des modifications qui constitue un cycle fermé, c'est-à-dire pour lequel le corps revient en définitive à son état initial : il se trouve naturellement amené à définir un cycle particulièrement simple qu'on appelle encore *cycle de Carnot*. Avant d'aller plus loin, nous devons expliquer ce qu'on appelle généralement un *cycle*.

Supposons que le corps soit complètement défini par deux variables indépendantes : c'est le cas d'un gaz dont l'état du kilogramme est connu sans ambiguïté dès qu'on se donne deux des quantités : volume, température, pression. Nous pouvons représenter cet état par un point figuratif choisi dans un plan ; car la connaissance de ce point équivaut à celle de ses coordonnées, de même que le choix d'un lieu sur une carte équivaut au choix d'une longitude et d'une latitude, et réciproquement.

Quand le corps se transforme, la succession de ses états est représentée par la succession des points figuratifs, c'est-à-dire par une courbe : on peut donc dire également que le corps se transforme ou qu'il parcourt un certain chemin. Ainsi dans le plan des p, v , c'est-à-dire dans lequel on prend pour coordonnées la pression et le volume, dire que la température reste constante revient aussi à dire que le produit $p v$ est constant, d'après la loi de Mariotte et de Gay-Lussac ; cela revient encore à dire que le gaz parcourt une hyperbole équilatère. Dans ce plan, les *isothermes* du gaz sont donc des hyperboles équilatères.

Nous pouvons de la même façon définir des faisceaux de courbes correspondant à des conditions imposées à l'avance : ainsi, partant d'un état déterminé, si nous imposons la condition que la quantité de chaleur fournie soit nulle et cependant que le gaz, dans ses dilatations ou contractions, accomplisse tout le travail extérieur possible, nous définirons une *adiabatique*. En partant d'un autre état, nous définirons une autre courbe du même faisceau. Il est clair que les courbes d'un même faisceau ne peuvent pas se couper.

On dit que le cycle est *fermé*, lorsque le point figuratif des états successifs du corps décrit un chemin fermé : ce chemin enveloppe une aire. Il serait facile de montrer qu'en choisissant pour plan celui des p, v , cette aire représente le travail effectué pendant le parcours du cycle.

S'il fallait trois variables indépendantes pour définir complètement le corps, le point représentatif serait pris non plus sur un plan (à 2 dimensions), mais dans un espace à 3 dimensions : en d'autres termes, la courbe figurative d'une série d'états serait gauche. Évidemment, ce mode de représentation est limité à 3 variables ; mais rien n'empêche de généraliser, sinon les figures, du moins le langage, et de parler d'espace à n dimensions où l'on supposerait figurés les états successifs d'un corps défini par n variables indépendantes. Pratiquement, seules les représentations planes sont commodes, parce qu'elles sont en vraie grandeur. D'autre part, les nécessités expérimentales imposent, dans l'étude d'un corps défini par plusieurs variables, de maintenir constantes pour une série d'expériences toutes les

variables sauf une : les propriétés fonctions de cette variable sont représentées chacune dans un plan. A chaque série d'expériences correspond donc tout naturellement une série de figures planes. Puisque Carnot attribuait l'effet mécanique du calorique à une chute de température, c'est-à-dire au passage d'une certaine quantité de chaleur d'une température plus élevée à une température plus basse (de même que de l'eau tombant d'un niveau supérieur à un niveau inférieur produit du travail), il devait nécessairement borner ses recherches au cycle limité par deux isothermes et deux adiabatiques.

C'est en effet dans ce cas que le phénomène se présente dans toute sa simplicité. On peut le diviser en 4 temps : 1^{er} temps, le corps décrit l'isotherme t_1 , en se dilatant par exemple ; 2^e temps, sur une adiabatique la dilatation continue, le corps se refroidit et rejoint l'isotherme t_2 ; 3^e temps, sur l'isotherme t_2 le corps se contracte ; 4^e temps, sur une seconde adiabatique, le corps se contracte, se réchauffe et revient à l'état initial. Somme toute, il y a eu du travail extérieur accompli, une certaine quantité de chaleur a passé de la température t_1 à la température inférieure t_2 ; il reste à trouver entre ces deux quantités, travail et chute de chaleur, qui par hypothèse sont de même nature, un certain rapport d'équivalence. L'avantage de ce cycle est évident : puisque sur les adiabatiques il n'y a aucun échange de chaleur, elles n'interviennent pas dans le calcul des échanges ; et d'autre part ce calcul est facilité par le fait que la température est constante tout le long d'une isotherme.

Il ne faudrait pas croire qu'en bornant ses investigations à ce cycle, Carnot diminuait la généralité du problème; car on démontre aisément que tout cycle peut être décomposé en un nombre plus ou moins grand de cycles de Carnot.

La production de la puissance motrice étant due, non à une consommation réelle de calorique, mais à son transport d'un corps chaud sur un corps froid, il est impossible, sans dépenser du travail, de faire passer de la chaleur d'un corps froid sur un corps chaud : c'est la conséquence que Carnot tire immédiatement de son hypothèse; le passage vaut d'être rapporté, pour des raisons qu'on comprendra plus loin :

« Réciproquement, dit-il, partout où l'on peut consommer de la puissance motrice, il est possible de faire naître une différence de température, il est possible d'occasionner une rupture d'équilibre dans le calorique. La percussion, le frottement des corps ne sont-ils pas en effet des moyens d'élever leur température, de les faire arriver spontanément à un degré plus haut que celui des corps environnants, et par conséquent de produire une rupture d'équilibre dans le calorique, là où existait auparavant cet équilibre? C'est un fait d'expérience que la température des fluides gazeux s'élève par la compression et s'abaisse par la raréfaction. »

Que ce soit là un bien mauvais raisonnement, personne n'osera le contester. L'expérience prouve que la température des fluides gazeux s'élève par la compression et s'abaisse par la raréfaction. Mais ce fait n'a aucun rapport ou plutôt semble en contradiction avec le principe que Carnot voulait

vérifier. D'après ce principe, partout où l'on peut consommer du travail, on peut faire passer de la chaleur d'un corps froid sur un corps chaud, mais non pas chauffer un corps, ce qui est contraire au principe de la constance du calorique. Le principe de Carnot exige que, dans la percussion, si le marteau s'échauffe, quelque autre corps se refroidisse : mais l'expérience montre que tout s'échauffe ; et les contemporains de Carnot ne l'ignoraient pas. De même pour le gaz comprimé : si l'enveloppe ou le piston s'étaient refroidis quand le gaz s'échauffe, le phénomène aurait pu servir d'étai au principe en question ; mais l'expérience montre, et montrait tout aussi bien en 1824, que le gaz, le piston et le corps de pompe s'échauffent simultanément.

D'ailleurs, en toute rigueur, si ces expériences ne prouvaient rien en faveur de la théorie de Carnot, on pourrait soutenir qu'elles ne prouvaient rien contre elle ; car le cycle n'était pas fermé. Enfin, l'on pouvait même soutenir qu'elles ne prouvaient rien contre le principe admis de la constance du calorique : le métal frappé est dans des états différents avant et après le martelage ; le gaz n'occupe pas le même volume. Cependant on peut répéter ces expériences de telle manière qu'elles deviennent concluantes ; quand Joule les reprit en 1840 avec des précautions suffisantes, il démolit d'un coup et l'hypothèse de la matérialité du calorique et l'hypothèse de Carnot.

De tels sophismes, qui ne diminuent en rien le mérite de Carnot, sont un phénomène historique habituel. L'inventeur

fait flèche de tout bois pour défendre sa théorie; il aligne souvent des faits qui, bien interprétés, la détruiraient. Les contemporains sont généralement plus frappés de ces preuves que des arguments les plus solides. La science avance cahin-caha, et c'est un spectacle hautement comique.

Il semble que la conséquence réciproque s'impose : à savoir que nécessairement il se produit du travail quand la chaleur passe d'un corps chaud sur un corps froid. Nul procédé n'empêche une pierre qui tombe de donner du travail, ne permet de réduire à néant la force vive que son mouvement et sa masse représentent. A la vérité, quand une balle de plomb frappe une plaque de fer, elle s'écrase et s'arrête : il y a une perte apparente d'énergie, qui paraissait toute naturelle aux contemporains de Lavoisier. Mais simultanément la balle s'échauffe. Or, on invente une théorie de la puissance motrice de la chaleur; il semblerait qu'elle dût précisément rendre compte de ces phénomènes, expliquer ces pertes d'énergie. Nous venons de voir qu'elle le tente sans succès. Malheureusement, si elle ne bouche pas un trou, il est certain qu'elle en creuse un autre. Tout le monde sait que lorsque deux corps à des températures différentes sont en contact, la chaleur passe du plus chaud au plus froid, et que ce retour à l'équilibre n'est pas une source d'énergie; aucun procédé ne permet de faire monter des poids grâce à cet échange.

CARNOT en prend bravement son parti : « ... Il y a perte de force vive, de force mécanique ou de quantité d'action toutes les fois qu'il y a contact immédiat entre deux corps

de températures différentes et que la chaleur passe de l'un à l'autre sans intermédiaire. Donc, dans tout appareil destiné à réaliser la force motrice que développe la chaleur, il y a perte de forces toutes les fois qu'il y a communication directe de chaleur entre les corps de températures différentes. Par suite l'effet produit maximum ne pourrait être réalisé que par un appareil dans lequel il ne s'établirait de contact qu'entre les corps de température égale. » On se rapproche de cet idéal sans l'atteindre ; pour que la chaleur passe d'un corps sur un autre, la température du premier doit être légèrement supérieure à celle du second.

L'aire des recherches a diminué : il ne s'agit plus maintenant que de cycles fermés et tels que le corps qui sert d'agent de transformation de la chute du calorique en travail soit toujours en équilibre thermique avec les sources de calorique. Dès lors, « il est naturel de se faire une question à la fois curieuse et importante : la puissance motrice de la chaleur est-elle immuable en quantité, ou variable avec l'agent dont on fait usage pour la réaliser, avec la substance intermédiaire choisie comme sujet d'action de la chaleur? »

Il est clair que cette question ne peut être faite que pour une quantité de calorique donnée, la différence des températures étant donnée. Elle ne peut être faite aussi que si les conditions du maximum de rendement sont réalisées. La première est déjà connue : il ne se fera entre les corps employés à réaliser la puissance motrice de la chaleur aucun échange de calorique que si leurs températures sont

très voisines. Quand on réalise par exemple avec un gaz un cycle de Carnot, pendant le parcours des adiabatiques, on supposera les parois et le fond du cylindre parfaitement imperméables au calorique : le long des isothermes, on supposera le fond du cylindre perméable à la chaleur, mais le réservoir de chaleur sera précisément à la température de l'isotherme ou à une température infiniment peu supérieure ou inférieure. La seconde condition consiste en ce que l'agent de transformation est à chaque instant en équilibre mécanique avec les corps extérieurs : il produit ainsi pour une transformation donnée le maximum de travail. Nous avons donné plus haut deux exemples; dans le premier cette condition n'est pas satisfaite, elle l'est au contraire dans le second.

Le cycle est alors fermé et réversible : Carnot remarque qu'une machine qui, sous les conditions de réversibilité, peut transformer une chute de température en force motrice, peut aussi bien, fonctionnant en sens inverse, utiliser de la force motrice pour créer une différence de température entre deux corps. Je donnerai plus loin à propos du principe de Clausius quelques exemples. De cette remarque et du principe de l'impossibilité du mouvement perpétuel, il conclut sans peine que « le maximum de puissance motrice résultant de l'emploi de la vapeur est aussi le maximum de puissance motrice réalisable par quelque moyen que ce soit. » Il existe donc un équivalent mécanique de la chute du calorique, et cet équivalent est unique.

Ainsi nous sommes conduits à admettre que le passage d'une calorie de t_0 à t_1 degrés fournit une énergie bien déterminée, indépendante de la machine servant d'intermédiaire. Nous ne savons pas encore si le passage de 100° à 99° est équivalent au passage de 1° à 0° ; le rapport d'équivalence peut dépendre de la température.

Soit donc dt un intervalle infiniment petit de température; la quantité de calorique dq passant de t à $t - dt$ degrés fournit un travail proportionnel à dq , à l'abaissement infiniment petit dt et à une certaine fonction de la température $\mu(t)$; nous posons donc que le travail est égal à $\mu(t).dq.dt$, la fonction μ restant à déterminer.

Supposons que la quantité dq passe de t à $t - dt$ pendant le parcours d'un cycle de Carnot dont les isothermes sont aux températures t et $t - dt$; puis qu'elle passe de $t - dt$ à $t - 2dt$, suivant un autre cycle de Carnot juxtaposé au premier, compris entre les mêmes adiabatiques et les isothermes $t - dt$ et $t - 2dt$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'isotherme limitrophe du dernier cycle de Carnot soit à la température t_1 . Le travail total accompli a pour expression :

$$\mu(t) dq dt + \mu(t - dt) dq dt + \dots = dq \int_{t_1}^t \mu dt.$$

Il correspond à la chute de la quantité dq de calorique de la température t à la température t_1 réalisée au moyen d'un cycle unique de Carnot dont les isothermes sont à ces deux températures et les adiabatiques confondues avec celles qui limitent les cycles élémentaires.

D'après le raisonnement précédent, il revient au même

de faire passer en une opération dq de t à t_1 degrés, ou en deux fois dq de t à t_0 degrés et de t_0 à t_1 degrés. En d'autres termes, l'identité mathématique :

$$\int_{t_1}^t \mu dt = \int_{t_0}^t \mu dt - \int_{t_0}^{t_1} \mu dt$$

est l'expression d'une réalité physique d'après les principes admis.

Il nous est possible maintenant d'étendre ces résultats à un cycle fermé réversible quelconque.

Admettons qu'un corps décrive un cycle fermé d'opérations, et qu'à t degrés il absorbe une quantité de chaleur dq , à laquelle je donne le signe $+$, conservant le signe $-$ pour le cas où la chaleur est dégagée. Nous ne savons pas à quelle température il la restituera. Je dis que je peux toujours admettre qu'il la restituera à la température t_0 invariable, et écrire pour cette quantité de chaleur absorbée une valeur d'équivalence $dq \int_{t_0}^t \mu dt$. En effet, soit t_1 la température à laquelle il dégage cette quantité de chaleur : d'après la convention ci-dessus, je donnerai à cette quantité la valeur d'équivalence $-dq \int_{t_0}^{t_1} \mu dt$.

La somme de ces valeurs d'équivalence est :

$$dq \left[\int_{t_0}^t \mu dt - \int_{t_0}^{t_1} \mu dt \right] = dq \int_{t_1}^t \mu dt$$

qui est précisément la valeur exacte. Donc la convention est légitime¹.

1. On arriverait à la même conclusion en découpant le cycle quelconque par un faisceau d'adiabatiques très voisines, et en identifiant les cycles obtenus à des cycles de Carnot.

Enfin posons :

$$\int_{t_0}^t \mu dt = \varphi(t) - \varphi(t_0)$$

Pour un cycle fermé et réversible quelconque, le travail total accompli est $\int \varphi(t) dq$, l'intégrale étant effectuée le long du contour et les éléments dq étant pris positivement si dq est absorbée, négativement si dq est dégagée. En effet,

$$\int \varphi(t_0) dq = \varphi(t_0) \int dq = 0$$

puisque $\int dq = 0$ pour tout cycle fermé.

Le problème serait complètement résolu, si nous connaissions la forme de la fonction μ . Reprenons une des expériences que nous avons décrites plus haut. Dans un cylindre se trouve un kilogramme d'eau à t degrés, que nous vaporisons sous la pression p . Soit u_1 le volume spécifique (volume du kilogramme) de l'eau, u_2 le volume spécifique de la vapeur. Le changement de volume pendant la vaporisation est $u_2 - u_1$; la vapeur étant saturée, la pression p reste invariable. Le travail produit est $p(u_2 - u_1)$: soit L la chaleur fournie pendant cette opération; c'est la chaleur latente de vaporisation.

Cette première opération effectuée, je diminue légèrement la pression; de p elle devient $p - dp$. La vapeur cesserait d'être saturée, si je n'enlevais pas une petite quantité de chaleur dq_1 , pour ramener la température, qui est t , à la valeur $t - dt$ qui correspond à la pression $p - dp$ de vapeur saturée. J'enlève alors de la chaleur jusqu'à ce

que toute l'eau soit condensée; elle abandonne une quantité de chaleur peu différente $L - \frac{dL}{dt}dt$, pendant que les forces intérieures accomplissent un travail négatif $(u_2 - u_1)(p - \frac{dp}{dt}dt)$. Enfin je rétablis la pression p et je restitue la quantité de chaleur dq_2 pour ramener la température à sa valeur initiale t .

De ces quatre échanges de chaleur, il y en a deux, dq_1 et dq_2 , qui sont aussi petits que je veux, puisque je peux prendre dq aussi petit que je veux, tandis que cette diminution de l'intervalle dt ne modifie pas la chaleur absorbée pendant le premier temps, et ne fait que rendre la chaleur dégagée pendant le troisième aussi voisine que je veux de la précédente. Donc, à la limite, quand dt tend vers 0, je peux dire que tout revient au passage d'une quantité de chaleur L de la température t à la température $t - dt$: la valeur d'équivalence de ce passage est $L_\mu dt$.

Quant au travail effectué, il n'est qu'approximativement égal à $(u_2 - u_1)\frac{dp}{dt}dt$, parce qu'à la température $t - dt$ la variation de volume n'est pas rigoureusement $u_2 - u_1$ mais bien $u_2 - u_1 - \frac{d}{dt}(u_2 - u_1)dt$: cette expression du travail est toutefois d'autant plus exacte que dt est plus petit.

J'ai donc le droit de poser rigoureusement :

$$L_\mu dt = (u_2 - u_1) \frac{dp}{dt} dt$$

à la condition que dt tende vers 0 : mais comme le facteur

dt entre dans les deux membres et que l'égalité serait rigoureuse à la limite, je peux enfin poser :

$$L = \frac{1}{\mu} (u_2 - u_1) \frac{dp}{dt}$$

C'est la formule célèbre de Clapeyron.

Le raisonnement précédent est le type des raisonnements sur les infiniment petits : leur caractère essentiel y apparaît nettement avec toute son étrangeté, je dirai même son absurdité apparente.

Les quantités L , u_2 , u_1 , $\frac{dp}{dt}$ qui entrent dans la formule de Clapeyron sont déterminables par l'expérience. A la température t , L est la chaleur de vaporisation (537 calories à 100°); u_2 et u_1 sont les volumes spécifiques de la vapeur et de l'eau (1650 litres et 1 litre à 100°); enfin $\frac{dp}{dt}$ est la limite vers laquelle tend $\frac{\Delta p}{\Delta t}$, c'est-à-dire la limite du rapport de l'accroissement de la pression de la vapeur saturée et de l'accroissement de température. Donc les valeurs numériques de la fonction μ de la température sont accessibles à l'expérience. A l'époque de Clapeyron, les données expérimentales n'étaient ni assez nombreuses ni assez précises pour que le calcul aboutît. Grâce aux expériences de Regnault, on sait que μ est proportionnel à l'inverse de la température, comptée à partir d'un zéro fictif pour lequel le gaz parfait aurait un volume nul, si la loi de dilatation restait toujours la même : ce zéro fictif se trouverait à

— 273°. On appelle cette température température absolue T et l'on a $T = t + 273^\circ$.

La formule de Clapeyron peut donc s'écrire :

$$L = AT(u_2 - u_1) \frac{dp}{dt}$$

où A est une constante numérique, et on trouve en définitive :

$$\int_{t_0}^t \mu dt = \frac{1}{A} \int_{t_0}^t \frac{dT}{T} = \frac{1}{A} (\log T - \log T_0) = \frac{1}{A} \log \frac{T}{T_0}$$

Soit donc parcouru un cycle fermé réversible : convenons de prendre positivement les quantités de chaleur absorbées par l'agent de transformation du calorique en travail, et négativement les quantités dégagées : le travail total est représenté par l'intégrale $\frac{1}{A} \int \log T. dq$, l'intégrale étant prise le long du parcours qui limite le cycle.

Telle est la conséquence la plus générale du principe de Carnot.

IV

Les expériences de JOULE démolissaient bientôt cette admirable mais peu solide construction. Elles prouvaient que, pour faire passer un corps d'un état à un autre état, il est nécessaire de fournir des quantités de chaleur différentes suivant les états intermédiaires et suivant que le parcours est réversible ou non : elles étaient inconciliables avec l'hypothèse du calorique-matière. Joule montrait qu'on peut véritablement faire varier la chaleur en quantité,

à la condition de dépenser du travail. Il reproduisait simplement les expériences de frottement bien connues depuis Rumford, mais dans des circonstances telles qu'il fût possible à la fin de l'opération de ramener tous les corps exactement à l'état qu'ils possédaient au début. L'argumentation de Lavoisier devenait insoutenable : le dégagement de chaleur n'était pas dû à quelque modification interne de la structure des corps, puisque cette structure reprenait en définitive son état initial. L'expérience consistait tout simplement à frotter un liquide sur lui-même.

On admit alors un principe d'équivalence tout différent de celui de Carnot. Dans tous les cas où la chaleur produit du travail, une quantité de chaleur proportionnelle au travail produit disparaît, et réciproquement la même quantité de chaleur peut être créée par la consommation de cette même quantité de travail. Il y a donc équivalence entre trois formes d'énergie : force vive, travail, chaleur.

Nous allons préciser les différences du principe de Carnot et de ce nouveau principe d'équivalence en les énonçant mathématiquement.

Quelle que soit la nature de la chaleur, dans un état déterminé, un corps *doit en contenir* une quantité déterminée. Cela va de soi si le calorique est une matière combinée avec le corps comme l'hydrogène avec l'oxygène pour donner de l'eau. Ce n'est pas moins certain, si la chaleur est de l'énergie potentielle ou cinétique; dire qu'un corps dans un état déterminé *contient* une quantité déterminée de calorique, revient à dire que ses particules sont à des

distances et s'attirent avec des forces déterminées (énergie potentielle), ou possèdent des mouvements de vibration, de rotation ou de translation dont les forces vives moyennes sont déterminées (énergie cinétique). Nous appelons *énergie interne* et nous désignons par la lettre U la quantité totale de calorique que possède le corps : U est une fonction des variables indépendantes qui définissent l'état du corps, le volume et la température par exemple. Nous pouvons donc poser : $U = f_1(v, t)$. Dans l'hypothèse de la matérialité du calorique, nous pouvons poser de même : $Q = f(v, t)$, Q étant la quantité de ce calorique-matière alors contenue dans le corps.

Passons de l'état défini par les valeurs v et t des variables indépendantes à l'état défini par des valeurs peu différentes $v + dv$, $t + dt$: on doit fournir une quantité de chaleur $Q = Mdv + cdt$. Si la température reste constante pendant la transformation, on doit fournir une quantité Mdv proportionnelle à la variation de volume. Mais le coefficient M peut être lui-même une fonction des variables indépendantes v et t ; la proportionnalité ne subsiste donc qu'au voisinage d'un état donné, et si la variation de volume est notable, la quantité de chaleur à fournir pendant cette variation est $\int dQ = \int_{v_1}^{v_2} Mdv$, la température restant constante.

Il en est de même dans le cas plus général où ni l'une ni l'autre des variables ne reste constante ; le long d'un parcours qui conduit de l'état caractérisé par les valeurs v_1 , t_1 , à l'état caractérisé par les valeurs v_2 , t_2 , on doit

fournir une quantité de chaleur :

$$\int dQ = \int (Mdv + cdt)$$

l'intégrale étant prise le long du chemin parcouru.

LAPLACE et tous les physiciens du commencement du siècle admettaient pour chaque corps une expression $Q = f(v, t)$ déterminée une fois pour toutes : dQ était donc une différentielle exacte : ils connaissaient immédiatement la forme des facteurs M et c ; un calcul simple donne en effet : $M = \frac{df}{dv}$, $c = \frac{df}{dt}$.

L'intégrale $\int dQ$, prise entre les valeurs v_1, t_1 et v_2, t_2 , est indépendante du chemin parcouru ; elle est égale à la différence $f(v_2, t_2) - f(v_1, t_1)$ qui ne dépend que des points de départ et d'arrivée.

Avec le nouveau principe, il n'en va pas de même. Quand on passe du premier état au second état, il faut bien fournir ou absorber une quantité de chaleur correspondant à la variation de l'énergie interne U , qui joue pour cette partie de la chaleur le même rôle que la chaleur totale Q dans l'ancienne théorie ; mais en outre, il s'en absorbe ou il s'en dégage une quantité proportionnelle au travail extérieur, et par conséquent variable suivant les états intermédiaires et la réversibilité plus ou moins parfaite de la transformation. Dans l'hypothèse du calorique-matière, dQ est une différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes ; dans la théorie du calorique-énergie, dU est une différentielle exacte des mêmes variables. En appelant dW le tra-

vail extérieur exécuté pendant la transformation, on a $dQ = dW + dU$; or dW n'est pas une différentielle exacte, du moins généralement, donc dQ ne l'est plus.

Cette différence fondamentale posée, nous trouvons devant nous les problèmes qui s'étaient présentés aux contemporains de Laplace.

Existe-t-il une relation entre la chaleur que contient un corps et sa température? cette température est-elle une mesure de la chaleur contenue? On a remarqué depuis longtemps qu'un corps peut absorber du calorique sans que sa température se modifie; le calorique, disait-on, passe à l'état latent : on dit encore aujourd'hui que dans les changements d'état physique (liquéfaction, vaporisation) la chaleur est latente. Dans l'ancienne théorie, on exprimait que la température n'a pas pour mesure la quantité de calorique-matière combinée; dans la nouvelle, qu'elle n'a pas non plus pour mesure la quantité d'énergie intérieure contenue sous une forme ou sous une autre. Ces remarques s'appliquent à la simple élévation de la température. « Puisque la dilatation, dit LAVOISIER, la fusion, la vaporisation sont autant d'effets de la chaleur, on peut présumer avec beaucoup de vraisemblance que dans la production du premier de ces effets, comme dans celle des autres, il y a une quantité de chaleur qui s'absorbe et qui par conséquent cesse d'être sensible au thermomètre. »

Dans la théorie du calorique, on ne pouvait donc pas poser : $dQ = cdt$, c étant une constante ou une fonction de t ;

il est de même impossible de poser *généralement* : $dU = cdt$ dans la théorie de la chaleur-énergie. La relation qui existe entre la variation de température et celle des quantités des différentes formes d'énergie contenues dans un corps, est une des plus obscures qui existent. En définitive, dans les deux théories, Q et U sont des fonctions plus ou moins complexes de toutes les variables indépendantes, et non pas seulement de la température.

L'expérience permet bien de déterminer les quantités M, c, M_1, c_1 des expressions

$$dQ = Mdv + cdt \quad \text{et} \quad dU = M_1dv + c_1dt,$$

c'est-à-dire les *variations* des quantités Q et U : mais il est tout à fait impossible de déterminer ces quantités elles-mêmes. En d'autres termes, nous ne pouvons pas connaître quelle réserve totale d'énergie possède un corps ; nous pouvons seulement déterminer les variations de cette réserve. Il nous est, bien entendu, loisible de faire des hypothèses : Lavoisier et Laplace, se posant déjà la question pour la calorique-matière, cherchaient à suppléer par la théorie ce que l'expérience ne dira jamais.

En définitive, dans l'une et l'autre théorie nous pouvons poser

$$dQ = Mdv + cdt,$$

M et c étant deux certaines fonctions de v et de t , arbitraires dans la théorie de la chaleur-énergie, liées par une certaine relation dans celle de la chaleur-matière. Mais nous avons montré que l'on peut aussi bien prendre

comme variables indépendantes la pression et la température, ou la pression et le volume.

On peut donc poser identiquement :

$$dQ = Mdv + cdt = Ndp + Cdt = ndp + mdv.$$

Par définition, C est la chaleur spécifique à pression constante, c'est-à-dire que Cdt est la chaleur à fournir pour élever la température de dt , la pression étant constante, mais naturellement le volume variant de manière que les conditions d'existence du corps soient satisfaites. De même c est la chaleur spécifique à volume constant.

Puisque les trois expressions de dQ représentent exactement la même chose, on doit pouvoir exprimer les 6 facteurs M, N, m, n, C, c au moyen de 2 d'entre eux et de la relation fondamentale qui existe entre les variables p, v, t .

En particulier on peut exprimer dQ en fonction de C et de c . Dans le cas des gaz parfaits, où l'on a entre p, v et T la relation $p v = RT$, il vient

$$dQ = \frac{1}{R} (C v dp + c p dv)$$

Or cette formule est vraie quelle que soit l'hypothèse choisie : ainsi Laplace l'a donnée le premier dans la théorie de la chaleur-matière, et nous en faisons encore usage. On en tire immédiatement l'équation différentielle des adiabatiques ou, ce qui revient au même, l'équation du faisceau de ces adiabatiques.

Préciser à qui revient la découverte du principe de l'équivalence serait une tâche bien délicate. JOULE et MAYER

sont généralement cités : il est juste de reconnaître que vers 1840 l'idée était dans l'air ; les mémoires où ces physiciens développaient leur hypothèse ne causèrent aucune surprise. Une fois admis le principe d'une équivalence entre la chaleur et le travail, d'une transformation possible entre ces formes d'énergie, restait à déterminer le rapport d'équivalence ; sa valeur numérique est nécessairement unique et indépendante du moyen de transformation, en vertu de l'impossibilité du mouvement perpétuel.

Reprenons l'équation fondamentale :

$$EdQ = dW + dU.$$

Voici par quel ingénieux procédé MAYER, médecin à Heilbronn, proposait de calculer l'équivalent mécanique E de la calorie. Prenons 1 kilogramme de gaz parfait à l'état I défini par la température t et le volume v_0 . Amè nons-le, par des procédés différents, à l'état II défini par le volume v_1 et la même température t . Entre ces états extrêmes (v_0, t) et (v_1, t) , le volume et la température ont varié arbitrairement ; les pressions p_0 et p_1 au début et à la fin de l'opération sont données par les formules $p_1 v_1 = p_0 v_0 = R(273 + t)$ qui résument les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

Entre les états I et II nous avons :

$$E \int_1^{\text{II}} dQ = \int_1^{\text{II}} dW + \int_1^{\text{II}} dU.$$

Or dU est une différentielle exacte :

$$\int_1^{\text{II}} dU = U_{\text{II}} - U_1,$$

donc

$$E \int_I^{II} dQ = \int_I^{II} dW + U_{II} - U_I$$

Ce qui veut dire que pour passer de I à II il faut fournir une quantité de chaleur équivalente au travail extérieur $\int_I^{II} dW$ et à la variation de l'énergie intérieure $U_{II} - U_I$.

Or parmi la série des transformations qui permettent de passer de l'état I à l'état II, nous pouvons choisir l'isotherme : la température reste la même, non seulement au commencement et à la fin, mais encore pendant toute l'opération. L'expérience de Joule citée plus haut nous apprend que s'il ne se produisait pas de travail, le gaz dans la détente conserverait de lui-même une température invariable. En d'autres termes, si $\int_I^{II} dW = 0$, on doit avoir $\int_I^{II} dQ = 0$.

Donc $U_I = U_{II}$: l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend donc que de sa température et non pas de son volume.

L'équation précédente se réduit donc à $E \int_I^{II} dQ = \int_I^{II} dW$, quel que soit le chemin qui nous fera passer de I à II. Mayer admet implicitement la conclusion à laquelle nous venons de parvenir.

Cela posé, le gaz est refroidi sous volume constant v_0 de t à t' jusqu'à ce que sa pression p_0 atteigne la valeur p_1 . La température t' est donnée par la formule $p_1 v_0 = R (273 + t')$; on recueille une quantité de chaleur $c(t - t')$. Puisque le volume n'a pas varié, le travail intérieur est nul.

On chauffe alors le gaz sous pression constante; il

absorbe une quantité de chaleur $C(t - t')$, et le travail produit est $p_1(v_1 - v_0)$. On parvient ainsi en deux temps à l'état II. La chaleur totale absorbée est $(C - c)(t - t')$, et le travail recueilli est $p_1(v_1 - v_0)$. On a donc :

$$E(C - c)(t - t') = p_1(v_1 - v_0) = p_1v_1 - p_1v_0.$$

Remplaçant p_1v_1 et p_1v_0 par leur valeur, il vient :

$$E(C - c) = R, \quad E = \frac{R}{C\left(1 - \frac{c}{C}\right)}$$

Les expériences directes donnent $C, \frac{c}{C}$; on connaît la valeur numérique de R ; on peut donc calculer la valeur E de l'équivalent mécanique de la calorie.

Je ne décrirai pas les nombreuses méthodes expérimentales qui ont été employées à la détermination de l'équivalent mécanique; leur principe est toujours le même : dépenser un certain travail, recueillir de la chaleur, et s'arranger de manière qu'à la fin de l'expérience les corps aient repris leur état initial. JOULE travailla toute sa vie à perfectionner les méthodes qu'il avait imaginées; un grand nombre de physiciens ont donné depuis des valeurs de plus en plus approchées de cette constante. Aujourd'hui le principe est définitivement admis, et l'on sait que l'équivalent est toujours le même quelle que soit la machine employée à transformer la chaleur en travail ou le travail en chaleur.

On connaissait donc trois formes équivalentes de l'énergie : la force vive, le travail, la chaleur. Rien ne prouvait qu'il n'en existait pas d'autres. HELMHOLTZ et CLAUSIUS,

vers 1850, en trouvèrent de nouvelles dans les phénomènes électriques et magnétiques. On pourrait soutenir que l'énergie qui provient des actions des corps électrisés ou magnétiques entre eux est une forme de l'énergie potentielle connue depuis longtemps; mais ce qui était vraiment neuf consistait à déterminer ce que représente d'énergie dépensée un courant qui passe dans un conducteur (phénomène de Joule), à quelle réserve d'énergie équivaut l'existence d'un système de courants (phénomènes d'induction).

On peut enfin formuler dans sa généralité la loi de la conservation de l'énergie : Il existe des formes multiples et équivalentes de l'énergie : leur somme reste constante. L'équation qui exprime ce principe peut ne pas être encore complète : nous ignorons peut-être encore bien des formes de l'énergie ; la proposition précédente n'est en définitive qu'un postulat. Mais, tout en reconnaissant son caractère purement hypothétique, nous conviendrons que jusqu'aujourd'hui nous n'avons aucune raison de douter de son exactitude, et qu'elle nous rend les plus précieux services.

V

Alors qu'il semblait ne rien subsister des travaux de Carnot, CLAUSIUS fut frappé par la vérité expérimentale d'une proposition que Carnot avait énoncée : la chaleur ne passe pas toute seule d'un corps froid sur un corps chaud. Pour Carnot, cette proposition n'était qu'une conséquence de son hypothèse fondamentale : le passage de la chaleur

d'un corps froid sur un corps chaud est une véritable création d'énergie, qui ne peut s'effectuer d'elle-même; qui doit, d'après l'impossibilité du mouvement perpétuel, avoir quelque part sa contre-partie.

Clausius prit la conséquence comme postulat, et se demanda si l'on n'en pourrait pas tirer quelque nouveau principe. Il y aurait lieu de discuter la valeur de ce postulat. Puisque l'hypothèse de Carnot est certainement fausse, rien ne nous oblige *a priori* à considérer comme exacte une de ses conséquences : c'est donc une question de fait à résoudre. L'expérience prouve que l'hypothèse de Clausius est incontestable, du moins jusqu'aujourd'hui.

Voici comment Clausius explique lui-même la portée de son hypothèse : « L'axiome exprime d'abord que dans l'échange immédiat de chaleur qui s'opère par conductibilité et par rayonnement entre deux corps, le corps le plus chaud ne peut jamais recevoir du plus froid plus de chaleur qu'il ne lui en communique. Mais cet axiome n'est pas relatif à ce phénomène seul : il s'étend à tous ceux par lesquels il peut s'effectuer un passage de la chaleur entre des corps de températures différentes; parmi ces phénomènes, on doit surtout remarquer ceux dans lesquels l'échange de chaleur est opéré par le moyen d'un ou plusieurs corps variables qui, dans leurs changements d'état, tantôt reçoivent de la chaleur d'un autre corps, tantôt en communiquent à un autre. En examinant de plus près les résultats de ces phénomènes, on trouvera qu'il peut arriver que d'un côté la chaleur passe d'un corps froid à un corps chaud, tandis que

d'un autre côté, dans la même opération, une autre quantité de chaleur est transportée d'un corps chaud à un corps plus froid, sans que du reste il se présente aucune modification permanente. Dans ce cas, on n'a pas affaire à un simple passage de chaleur d'un corps froid à un corps plus chaud, mais à deux passages de chaleur corrélatifs et de sens contraires, l'un ascendant, l'autre descendant, et qui se compensent mutuellement.

« De plus, il peut arriver qu'un passage de chaleur ascendant ne soit pas lié, dans une seule et même opération, à un passage de chaleur descendant, mais qu'au lieu de celui-ci, il se présente une autre modification permanente qui jouit de la propriété de ne pouvoir être anéantie, à moins qu'elle ne soit remplacée par une autre modification permanente de même nature ou qu'elle n'occasionne un passage de chaleur descendant¹. »

Imaginons donc une opération où les échanges de chaleur se font seulement aux températures t_1 et t_2 ; ce qui revient à dire que l'agent de transformation décrit un cycle de Carnot.

La transformation qui consiste dans le passage d'une quantité de chaleur de la température t_1 à la température t_2 , a une certaine valeur d'équivalence. Si en définitive aucune autre modification permanente n'a lieu, si le cycle des opérations est fermé, il faut qu'on retrouve dans la suite des transformations une transformation équivalente, qui peut

1. Sur une autre forme du second principe de la théorie mécanique de la chaleur, ap. *Journal de Liouville*, t. XX, p. 63 (1854).

être, soit un autre passage de chaleur d'une température à une autre (ce qui n'est pas le cas), soit une transformation équivalente de chaleur en travail.

Supposons donc que, par le moyen d'un cycle de Carnot, la quantité de chaleur Q_1 soit absorbée à t_1 degrés, et la quantité Q_2 restituée à t_2 degrés : la quantité de chaleur Q_2 passe de t_1 à t_2 degrés, la quantité $Q_1 - Q_2$ disparaît par le moyen d'un cycle décrit entre t_1 et t_2 degrés.

D'après le principe de Clausius, il doit exister entre ces transformations un certain rapport $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2)$ qui ne dépend que des températures t_1 et t_2 , et non de l'agent qui décrit le cycle de Carnot supposé réversible. Car s'il n'en était pas ainsi, en associant des machines où l'agent de transformation serait différent, et qui marcheraient les unes dans un sens (transformant du travail en chaleur), les autres dans le sens inverse (transformant de la chaleur en travail), on parviendrait, avec une dépense de travail nulle, et tous les organes reprenant à la fin de l'opération leur état initial, à faire passer de la chaleur d'un corps froid sur un corps chaud, ce qui par hypothèse est impossible.

Il découle nécessairement des principes posés que pour déterminer la fonction $f(t_1, t_2)$ pour tous les corps, il suffit de le faire dans un cas particulier, celui des gaz parfaits par exemple.

Nous avons trouvé plus haut l'équation différentielle des adiabatiques :

$$C_v dp + c_p dv = 0.$$

Si nous admettons que les chaleurs spécifiques C et c sont constantes, nous pouvons intégrer cette équation : on a :

$$\log p + \gamma \log v = \log K$$

en posant $\gamma = \frac{C}{C}$, K est une certaine constante. Deux adiabatiques ne diffèrent entre elles que par la valeur de cette constante K .

Supposons que nous soyons sur l'isotherme de température t_1 dont l'équation est $p v = R (273 + t_1)$ et que nous allions de son point d'intersection avec l'adiabatique K_0 à son point d'intersection avec l'adiabatique K_1 .

Au premier de ces points, la pression et le volume sont p_0 et v_0 ; nous avons donc simultanément

$$p_0 v_0 = R (273 + t_1) \quad \log p_0 + \gamma \log v_0 = \log K_0$$

Au second point, la pression et le volume sont p_1 et v_1 ; nous avons donc simultanément

$$p_1 v_1 = R (273 + t_1) \quad \log p_1 + \gamma \log v_1 = \log K_1$$

Retranchant les deux dernières équations de chacun de ces groupes l'une de l'autre, il vient :

$$\log \frac{p_1}{p_0} + \gamma \log \frac{v_1}{v_0} = \log \frac{K_1}{K_0}$$

Or les premières équations nous donnent :

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{v_0}{v_1}$$

d'où

$$\log \frac{p_1}{p_0} = \log \frac{v_0}{v_1} = - \log \frac{v_1}{v_0}$$

d'où enfin

$$(\gamma - 1) \log \frac{v_1}{v_0} = \log \frac{K_1}{K_0} \quad \log \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{\gamma - 1} \log \frac{K_1}{K_0}$$

Le long de ce parcours, un certain travail a été effectué :

$$\int_{v_0}^{v_1} p dv = R(273 + t_1) \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = R(273 + t_1) \log \frac{v_1}{v_0} = \frac{R(273 + t_1)}{\gamma - 1} \log \frac{K_1}{K_0}$$

Le résultat est très simple et s'énonce ainsi : quand on passe sur une isotherme d'une certaine adiabatique à une certaine autre adiabatique données une fois pour toutes, le travail effectué est proportionnel à la température absolue $T_1 = 273 + t_1$ de l'isotherme.

Mais nous savons que l'énergie d'un gaz parfait est constante tout le long d'une isotherme ; la chaleur absorbée ne sert donc qu'à produire le travail extérieur ; nous la connaissons immédiatement en divisant ce travail par l'équivalent mécanique E . Puisque ce travail dans les conditions posées est proportionnel à la température absolue, il en est de même de la chaleur.

En définitive, pour le cycle de Carnot nous avons :

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

que nous pouvons écrire :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

c'est la fonction que nous cherchions.

La forme $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ se généralise immédiatement. Elle peut

d'abord s'écrire $\sum \frac{Q}{T} = 0$, en convenant de prendre les chaleurs positivement quand elles sont absorbées, négativement quand elles sont dégagées. Or on démontre aisément qu'un cycle réversible quelconque peut toujours être considéré comme une juxtaposition de cycles de Carnot. La proposition précédente s'appliquant à chacun de ces cycles, on a en définitive pour tout cycle réversible $\int \frac{dQ}{T} = 0$, l'intégrale étant étendue à tout le parcours.

On peut prendre la question d'une manière toute différente.

Soit l'équation $dQ = dW + dU$ qui exprime le principe de l'équivalence; amenons le corps de l'état 1 à l'état voisin 2 : il absorbe de la chaleur dont une part correspond à la variation dU de l'énergie interne, l'autre au travail dW effectué. On peut se demander si le corps qui transforme la chaleur en travail a une faculté de transformation indéfinie, si pour une variation donnée de son état et par conséquent de son énergie interne dU , il existe un certain maximum de chaleur transformée en travail, en un mot, s'il existe une certaine relation entre dU et le maximum de dW .

Le principe de Clausius peut s'énoncer ainsi : tout corps possède une certaine propriété, l'*entropie*, complètement déterminée si l'état du corps est déterminé. En passant de l'état 1 à l'état 2 voisin, l'entropie S varie de dS . Le produit TdS est le maximum de chaleur que le corps peut absorber pendant cette transformation, $TdS - dU$ est le maximum

de travail qui peut être effectué pendant cette même transformation. Si les conditions de réversibilité de la transformation sont satisfaites, ce maximum de travail est effectivement réalisé : sinon, il y a moins de chaleur absorbée et moins de travail effectué qu'il ne se pourrait.

Ces propositions s'étendent à un parcours fini et à un cycle fermé quelconque : le maximum de travail accompli est $\int (TdS - dU)$ étendue à tout le parcours : si le parcours est fermé, cette intégrale est égale à $\int TdS$, puisque $\int dU$ est évidemment nulle. Un cycle étant donné, nous pouvons calculer pour tous les points de ce cycle les valeurs de T et de S et par conséquent l'intégrale $\int TdS$: c'est la valeur maxima du travail qu'il est possible d'obtenir au moyen du corps et du cycle considérés. Lorsque le cycle n'est pas réversible, le travail effectivement recueilli est plus petit que cette limite.

Si nous admettons le principe de Clausius sous cette forme, ce que nous prenions tout à l'heure comme postulat devient une conséquence. Puisque S est une propriété des corps complètement connue pour chaque état, $\int dS$, étendue à une suite fermée quelconque de modifications, est nécessairement nulle; de même que, si nous prenons un liquide à 0° , l'échauffons ou le refroidissons n'importe comment pour le ramener à 0° , la somme des variations de sa densité est évidemment nulle. Mais, lorsque le cycle est réversible, par hypothèse $dQ = TdS$ sur chaque élément du parcours;

donc pour le cycle tout entier $\int \frac{dQ}{T} = 0$. Lorsqu'au contraire les transformations ne sont pas toutes réversibles, pour celles qui ne le sont pas, tout le travail possible n'est pas effectué, toute la chaleur que le corps pourrait absorber ne l'est pas; on a donc $dQ < TdS$. Donc quand le cycle n'est pas réversible pour tous ses éléments ou pour quelques-uns, on a

$$\int \frac{dQ}{T} < 0$$

ce qui généralise nos premières conclusions.

Comme corollaires, nous déduirions les propriétés du cycle de Carnot et le fait qu'il est impossible que la chaleur passe d'elle-même d'un corps froid sur un corps chaud.

Nous avons trouvé qu'il y a équivalence entre différentes formes d'énergie, ce qui veut dire qu'on peut concevoir une quantité déterminée d'une de ces formes intégralement transformée en une quantité déterminée d'une autre de ces formes; cela ne veut pas dire que cette transformation soit intégralement possible. Ainsi le travail mécanique, l'énergie électrique peuvent se transformer intégralement en chaleur; au contraire, le principe de Clausius nous apprend que nous ne pouvons transformer une quantité de chaleur en travail qu'à la condition de faire passer une certaine autre quantité de chaleur d'une température plus élevée à une température moins élevée : cette chute de température n'est pas une perte d'énergie, mais c'est bien une dégradation d'énergie. On peut donc établir entre les différentes formes d'énergie

une sorte de hiérarchie, au degré inférieur de laquelle se trouve la chaleur, c'est-à-dire la forme en laquelle toutes les autres formes reviennent d'elles-mêmes. Nous rencontrons donc, à côté de la loi de la conservation de l'énergie, la loi non moins importante de la dégradation de l'énergie.

Ainsi les physiciens ont toujours été conduits à admettre que quelque chose se perd. Lavoisier, Carnot croyaient que la somme de l'énergie n'était pas constante; nous croyons que l'énergie, en changeant de forme, perd, non de sa quantité, mais de sa valeur, devient de moins en moins utilisable. La proposition célèbre : « rien ne se perd, rien ne se crée », qui se trouve depuis si longtemps dans la science (bien avant Lavoisier), n'est exacte que si nous l'appliquons au cas, pour lequel elle a été énoncée à l'origine, de la constance de la somme des masses des corps, à travers les combinaisons dans lesquelles ils peuvent entrer : elle est encore exacte appliquée à la somme de l'énergie; elle est fausse appliquée à la valeur de cette énergie. De la chaleur passe d'elle-même des corps chauds sur les corps froids, les frottements, les chocs transforment nécessairement une partie de l'énergie cinétique en chaleur, les conducteurs électriques s'échauffent : ce sont là des pertes réelles et inévitables.

Il resterait à tirer du principe de Clausius ses conséquences les plus importantes : nous n'entrerons pas dans cette voie : ce serait écrire un traité de Thermodynamique. Cependant nous voudrions, avant de terminer cette étude,

présenter quelques remarques sur ce qu'on appelle les phénomènes réciproques, et les distinguer de ce qu'on désigne sous le nom de déplacements d'équilibre. Ces deux ordres de phénomènes ont de commun qu'ils peuvent être considérés comme des applications de la loi générale de modération, comme des conséquences de ce fait que la nature ne s'emballe pas, qu'un phénomène tend à produire parmi ses effets une cause de sa propre limitation. Mais tandis que l'existence des phénomènes réciproques ne dépend en rien du principe de Carnot, les déplacements d'équilibre en sont un corollaire nécessaire ou à peu près tel.

Pour définir les phénomènes réciproques, le mieux est de rappeler l'expérience fondamentale de l'induction électromagnétique. Soit un aimant en équilibre dans le champ de forces magnétiques créé par un courant; toute variation de l'intensité du courant change généralement la position d'équilibre de l'aimant. Réciproquement, tout déplacement de l'aimant crée, dans le circuit que traverse le courant, une force électromotrice qui tend à faire varier l'intensité du courant. Le sens des phénomènes est régi par la loi de Lenz. La force électromotrice, créée dans le circuit par le déplacement de l'aimant, tend à faire varier le courant de manière à produire des forces magnétiques s'opposant au déplacement de l'aimant. Réciproquement, quand les forces magnétiques, dues au courant, déplacent l'aimant, ce déplacement engendre des forces électromotrices dans le circuit qui font varier le courant de manière à diminuer son

effet. Il y a entre les phénomènes réciproques comme un changement de rôle, une réaction, un passage de la fonction de cause à la fonction d'effet.

Quand les physiciens connaissent un phénomène, leur premier soin est de rechercher le phénomène réciproque : on est alors inventeur à bon compte. Malheureusement tous les phénomènes n'ont pas de réciproque. L'existence d'un champ magnétique produit une rotation du plan de polarisation de la lumière qui passe parallèlement aux lignes de force : on a beau faire tourner un plan de polarisation, on ne crée pas un champ magnétique. Le passage d'un faisceau lumineux polarisé dans un verre d'eau sucrée entraîne aussi la rotation du plan de polarisation : on n'a jamais sucré l'eau en la faisant traverser par un rayon lumineux dont le plan de polarisation tourne.

Puisque l'existence du phénomène réciproque n'est pas générale, il est clair qu'elle ne découle pas nécessairement ni du principe de l'équivalence ni de celui de Clausius. L'apparence contraire se produit parfois, pour des raisons qu'il est facile de mettre en évidence.

HELMHOLTZ, dans son fameux mémoire sur la conservation de l'énergie, semble déduire les phénomènes d'induction entre un aimant permanent et un courant, comme conséquence nécessaire du principe de la conservation de l'énergie seule; mais il fait implicitement l'hypothèse que toute l'énergie est empruntée au courant : l'existence du phénomène réciproque se déduit, non du principe de l'équivalence, mais de cette seconde hypo-

thèse accessoire. Même remarque dans le cas général de l'induction.

Pour certaines questions, l'application du principe de l'équivalence ou du principe de Clausius amène la découverte du phénomène réciproque; il n'en faut pas conclure que cette existence soit une conséquence de l'un ou l'autre principe. Si je dis que tous les hommes sont mortels et que Pierre est homme, la conclusion que Pierre est mortel n'est contenue ni dans la première proposition, ni dans la seconde prises séparément : elle résulte seulement de l'ensemble des prémisses, parce que cet ensemble répond complètement à la question, à savoir, si Pierre est mortel. Mais ce même ensemble ne nous apprend rien sur une autre question, par exemple, sur l'intelligence plus ou moins grande de Pierre. De même, si deux équations ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème, il se peut que l'ensemble des deux principes de l'équivalence et de Clausius ne puisse pas nous faire prévoir l'existence du phénomène réciproque.

Voici maintenant en quoi consistent les déplacements d'équilibre. Imaginons qu'un système soit en équilibre stable pour certaines valeurs de la température et des variables indépendantes nécessaires pour caractériser son état actuel. On considère un état d'équilibre voisin; les variables auront donc des valeurs voisines de leurs valeurs précédentes, et puisque par hypothèse elles sont indépendantes, nous pourrions fixer à notre gré leurs petites variations. D'autre part, si le phénomène est complètement

connu, il est évident que nous pourrions calculer en fonction des valeurs des variables, pour les deux états voisins, les valeurs des paramètres qui fixent toutes les propriétés du corps, et par conséquent leurs variations, quand on passe du premier au second état. Mais il pourrait se faire, et c'est précisément ce qui a lieu, qu'indépendamment des propriétés particulières du système considéré, on puisse prévoir le sens des phénomènes qu'entraînera une variation de signe connu des variables indépendantes.

Nous pouvons prendre comme exemple le système formé par un liquide et sa vapeur en présence l'un de l'autre : les conditions d'équilibre sont exprimées par la formule de Clapeyron :

$$L = AT(u_2 - u_1) \frac{dp}{dt}.$$

L'expérience nous apprend que L est positif (c'est-à-dire qu'il faut fournir de la chaleur pour vaporiser le liquide) et que $u_2 > u_1$ (c'est-dire que le volume spécifique de la vapeur est plus grand que le volume spécifique du liquide); nous concluons que dp/dt est positif. En d'autres termes, la pression que la vapeur doit exercer sur le liquide à une certaine température, pour que l'équilibre se maintienne, croît quand la température s'élève. Ce serait l'inverse, si $u_2 < u_1$ (par exemple dans la transformation de la glace en eau). Nous pouvons ainsi prévoir pour tous les systèmes analogues le sens des phénomènes qu'entraîne une variation de pression, par exemple. On peut montrer dans tous les cas que le système primitivement en équilibre tend à

retourner à l'équilibre en éliminant les causes perturbatrices. Il nous est impossible d'insister sur ces questions de déplacement d'équilibre et de montrer comment elles sont, au moins en partie, résolues par l'application des principes de l'équivalence et de Clausius : nous renverrons à l'admirable *Traité de Mécanique chimique* de M. DUHEM.

LOGIQUE DES SCIENCES

LA LOGIQUE SYMBOLIQUE ET SES APPLICATIONS

Par HUGH MAC COLL,
de l'Université de Londres.

I. — *Logique pure.*

La logique *pure*, ou logique *abstraite*, s'occupe des règles générales du raisonnement, c'est-à-dire des règles qui restent valides quel que soit le sujet de recherche. Or, quel que soit le sujet de recherche, tout raisonnement, pour pouvoir s'exprimer, demande des *propositions*. Donc, pour rendre notre raisonnement parfaitement général, et nos formules universellement applicables, nous devons prendre la classification des différentes espèces de propositions et les rapports entre elles comme le premier but de notre recherche, et appeler ce travail la Logique *pure*. Par « proposition », je veux dire tout son ou symbole (ou combinaison de sons ou de symboles) qu'on emploie pour donner quelque information, ou pour se rappeler quelque information déjà reçue. Le « Cröa » poussé par un corbeau en sentinelle, pour avertir ses camarades qu'il vient de voir un homme avec un fusil, est, dans ce sens, une proposition.

Le pavillon qui indique la nationalité d'un vaisseau qui passe, est aussi une proposition. De telles propositions simples et indivisibles, sans sujet et sans prédicat, furent probablement les sources primitives des langues humaines (voir § 26). Mais, quoi qu'il en soit, il est certain que les propositions, qu'elles soient simples et indivisibles, ou complexes et divisibles, sont les *unités* sur lesquelles nous basons, et avec lesquelles nous exprimons, tous nos raisonnements. La conclusion naturelle est donc que, dans la Logique la plus générale, la Logique *abstraite*, ces unités que nous appelons *propositions* devraient être représentées par les signes les plus élémentaires; et ces signes, ce sont les lettres de l'alphabet. Pour la classification des propositions, et pour exprimer leurs liens de rapport, nous pouvons emprunter aux Mathématiques, non seulement des signes spéciaux, comme $+$, $:$, etc., mais aussi des combinaisons, telles que A^B , A_B , $\frac{A}{B}$, etc., sans trop nous occuper des significations primitives de ces signes ou de ces combinaisons. Il est même permis, au courant du même argument, de *varier par une nouvelle définition* le sens que nous donnons à tel signe ou à telle combinaison. Certes, c'est une liberté dont il ne faut pas abuser; nous ne devons changer le sens de nos symboles que dans les cas (qui sont toutefois assez nombreux) où les avantages du changement en dépassent les inconvénients; mais il n'y a à cela aucune objection de principe. Exactement comme on peut dire en Mathématiques : « soit un tel nombre représenté

par x », on peut dire en Logique : « soit une telle proposition complexe représentée par telle ou telle combinaison ». La seule chose à considérer, c'est l'utilité ou l'inutilité de la nouvelle convention (voir § 26).

Cette question de notation est très importante. En général, nos yeux s'habituent difficilement aux symboles absolument nouveaux ou inusités; c'est pourquoi, dans mon système de notations, je m'en passe entièrement, préférant employer en des sens variables les symboles, simples ou complexes, que nous trouvons déjà emmagasinés et à notre disposition dans le riche arsenal des Mathématiques. Ai-je tort ou raison? C'est à ceux qui connaissent mieux que moi les travaux de mes confrères à en décider¹; et pour leur fournir les moyens d'arriver à une conclusion, je vais maintenant expliquer mon système et donner quelques exemples de son application.

1. Le symbole A^B affirme² que la proposition A appartient à la classe B . Le symbole A^{BC} est un abrégé de $(A^B)^C$; il affirme que la proposition A^B appartient à la classe C . Par exemple, si P veut dire *probable*, et C veut dire *certain*, alors A^P veut dire *A est probable*, et A^{PC} veut dire *il est certain que A est probable*; tandis que A^{CP} veut dire *il est probable que A est certain* (voir § 23). Le symbole A^{BCD} veut dire $(A^{BC})^D$, et ainsi de suite.

1. Parmi ces logiciens, je crois devoir nommer spécialement M. Louis Couturat, dont les critiques justes et bien raisonnées m'ont donné récemment l'occasion d'éclaircir certains points que mes premières recherches avaient laissés un peu obscurs.

2. Dans la Logique concrète ou appliquée, A peut représenter une chose (longueur, surface, etc.) qui n'est pas une proposition (voir § 27).

2. Quand un symbole A représente une *classe*, les symboles A_1, A_2, A_3 , etc., représentent des *individus* appartenant à cette classe (voir § 26).

3. Les lettres grecques $\tau, \iota, \epsilon, \eta, \theta$ représentent les termes *vrai, faux, certain, impossible, variable*. Toutes les propositions intelligibles¹ peuvent être divisées en deux classes, les *vraies* (τ) et les *fausses* (ι). Toutes les propositions intelligibles peuvent être aussi divisées en trois classes : les *certaines* ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, etc.), les *impossibles* (η_1, η_2, η_3 , etc.) et les *variables* ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$, etc.). Une proposition est *certaine* quand sa probabilité est *un*, c'est-à-dire quand elle résulte nécessairement de nos données ou de nos définitions. Une proposition est *impossible* quand sa probabilité est *zéro*, c'est-à-dire quand elle contredit quelque donnée ou définition. Une proposition est *variable*, quand sa probabilité n'est ni *un* ni *zéro*, mais quelque fraction entre les deux. Par exemple, en parlant d'un point pris au hasard parmi les cinq points marqués dans le cercle E (Fig. 1), supposons que les lettres A, B, C (comme propositions) affirment respectivement que le point qui se présentera sera dans le cercle A, qu'il sera dans le cercle B, qu'il sera dans le cercle C. Il est évident que nous aurons $A^\epsilon B^\theta C^\eta$; c'est-à-dire : A est *certain*, B *variable*, C *impossible*.

Une proposition peut être *vraie* sans que sa probabilité soit *un*, et *fausse* sans que sa probabilité soit *zéro*. Par exemple, dans le cas actuel, la proposition B (dont la pro-

1. Toute proposition *non-intelligible* (qui ne dit rien dans notre univers du discours) peut être représentée par le symbole 0. (Voir p. 147, note 1.)

babilité est $\frac{2}{5}$) peut être *vraie*, mais elle n'est jamais *certaine*; et elle peut être *fausse*, mais elle n'est jamais *impossible*.

4. Le symbole $A^\alpha B^\beta$, comme proposition, affirme deux choses, que A appartient à la classe α , et que B appartient à

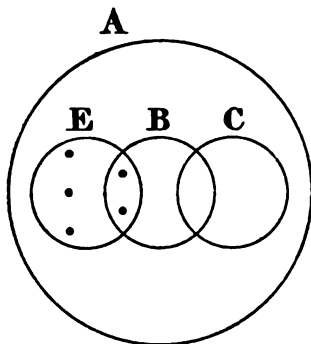


Fig. 1.

la classe β ; tandis que le symbole $A^\alpha + B^\beta$ n'affirme qu'une chose, que A appartient à la classe α , ou B à la classe β ; de sorte que, dans ce cas, on peut considérer le symbole $+$ comme le *synonyme* de la conjonction *ou*. Le symbole $A^\alpha + B^\beta$ affirme qu'une *au moins* des deux propositions A^α et B^β est vraie. On peut appeler A^α et B^β les *facteurs* du *produit* $A^\alpha B^\beta$, et les *termes* de la *somme* $A^\alpha + B^\beta$. Des propositions comme $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ ou $A^\alpha + B^\beta + C^\gamma$ doivent être interprétées de la même manière. Il est évident que le signe $+$ n'exprime nullement une *addition*, de sorte que *somme* en Logique n'a pas le même sens que *somme* en Mathématiques. Le symbole $A^{\alpha, \beta}$ est synonyme de $A^\alpha + B^\beta$; et $(A, B)^\alpha$ est synonyme de $A^\alpha + B^\alpha$.

Soit A un nom *générique* (proposition ou chose concrète) appartenant à chaque individu (A_1, A_2, A_3 , etc.) de la classe. Alors le symbole A^B affirme¹ qu'un individu (sans dire lequel) de la classe A appartient aussi à la classe B.

Le symbole A^{B_1} affirme non seulement que A est un B, mais aussi que A est le B spécial de la série B_1, B_2, B_3 , etc., que nous avons nommé B_1 . Donc nous avons $A^B = A^{B_1} + A^{B_2} + A^{B_3} + \text{etc.}$ Les formules suivantes² sont évidentes :

$$\begin{aligned} A^{\epsilon\eta} &= A^\epsilon, & A^{\eta\epsilon} &= A^\epsilon + A^\theta, \\ A^{\epsilon\epsilon} &= A^\eta, & A^{\epsilon\epsilon} &= A^\eta + A^\theta, \\ A^{\epsilon\theta} &= A^\theta, & A^{\theta\epsilon} &= A^\epsilon + A^\eta, \\ \epsilon^\eta &= \eta, & \epsilon^\theta &= \eta, & \theta^\epsilon &= \eta, & \theta^\eta &= \eta, \\ \eta^\epsilon &= \eta, & \eta^\eta &= \epsilon, & \epsilon^\epsilon &= \eta, & \eta^\epsilon &= \epsilon, & \epsilon^\tau &= \epsilon, \\ (A^\tau B^\tau)^\epsilon &= A^\epsilon + B^\epsilon, & (A^\tau + B^\tau)^\epsilon &= A^\epsilon B^\epsilon. \end{aligned}$$

Toutes ces équivalences, comme toutes les formules valides, sont des *certitudes formelles* (voir § 21).

5. L'exposant τ (qui affirme qu'une proposition est *vraie*) est souvent sous-entendu³; et l'exposant ϵ (qui affirme qu'une proposition est *fausse*) est souvent remplacé par un accent de négation. Les symboles A, A^τ , A' , A^ϵ , par exemple, peuvent exprimer respectivement *Il ira en Amérique, Il*

1. Dans un de mes mémoires dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, j'ai posé comme définition que le symbole A^B (quand A indique une classe) affirme que *tout* individu de la classe A appartient à la classe B; mais, après expérience, je trouve cette convention incommode.

2. Il est sous-entendu dans ces formules que les propositions A et B n'appartiennent pas à la classe 0; mais elles peuvent appartenir à la classe η sans détruire la validité des formules. (Voir § 3, note 1. Voir aussi p. 147, note 1.)

3. Comme *termes* et comme *facteurs*, τ et ϵ sont équivalents respectivement à ϵ et η ; mais pas toujours comme *exposants*. Car comme *terme* ou *facteur* (puisque A veut dire A^τ), $\tau = \tau^\tau = \epsilon$, et $\epsilon = \epsilon^\tau = \eta$.

est vrai qu'il ira en Amérique, Il n'ira pas en Amérique, Il est faux qu'il ira en Amérique. Avec cette convention, les trois formules :

$$(AB)' = A' + B', \quad (A + B)' = A'B', \quad A(B + C) = AB + AC$$

sont synonymes respectivement de :

$$(A^\tau B^\tau)' = A^\tau + B^\tau, \quad (A^\tau + B^\tau)' = A^\tau B^\tau, \quad A^\tau (B^\tau + C^\tau) = A^\tau B^\tau + A^\tau C^\tau.$$

(Mais voir p. 147, note 1.)

Des cas cependant pourraient se présenter où la suppression de l'exposant τ changerait le sens. Par exemple, puisque A^A (quelle que soit la classe A) est une certitude (voir § 4), il résulte que τ^τ est une certitude. Donc τ^τ , qui veut dire $(\tau)^\tau$, est aussi une certitude. Mais si nous supprimons l'exposant τ dans la certitude τ^τ , elle devient τ^τ , qui n'est pas nécessairement une certitude ; car une proposition τ , vraie dans le cas actuel C_1 , n'est pas nécessairement vraie dans tous les cas possibles C_1, C_2, C_3 , etc. Supposons¹ (voir la fig. 2) que les propositions *vraies* τ_1, τ_2 , etc. (vraies dans le cas actuel C_1) soient représentées par des points dans les deux carrés supérieurs ; les propositions *fausses* τ_1, τ_2 , etc. (fausses dans le cas actuel C_1) par des points dans les deux carrés inférieurs ; les *variables* θ_1, θ_2 , etc. (vraies dans

$\tau\varepsilon$	$\tau\theta$
$\tau\eta$	$\tau\theta$

Fig. 2.

1. Ces quatre carrés représentent les quatre modalités de la Logique traditionnelle. Les propositions dans le carré $\tau\varepsilon$ sont *vraies maintenant et toujours* ; celles dans le carré $\tau\eta$ sont *fausses maintenant et toujours* ; celles dans le carré $\tau\theta$ sont *vraies maintenant mais pas toujours* ; celles dans le carré $\tau\theta$ sont *fausses maintenant mais pas toujours*. (Voir § 17.) Le symbole τ' (sans l'exposant τ sous-entendu) n'est pas synonyme de τ^τ ($=\tau$), mais de τ ; et τ' n'est pas synonyme de τ^τ ($=\tau$), mais de τ . L'accent de négation n'est pas un exposant.

certains cas, fausses dans d'autres) par des points dans les deux carrés de droite; et les *certitudes* ε_1 , ε_2 , etc., et les *impossibilités* η_1 , η_2 , etc., respectivement par des points dans les deux carrés de gauche. Il est évident qu'un point τ pris au hasard dans les deux carrés $\tau\varepsilon$ et $\tau\eta$ ne sera pas nécessairement un des points dans le carré $\tau\varepsilon$; c'est-à-dire $\tau\varepsilon$ n'est pas une certitude. Sans exposants (exprimés ou sous-entendus) les symboles τ , τ' , ι , ι' (comme A et A') sont des *sujets sans attributs*; mais avec l'exposant τ sous-entendu, nous avons :

$$\tau = \tau^\tau = \varepsilon, \tau' = (\tau')^\tau = \iota^\tau = \eta, \iota = \iota^\tau = \eta, \iota' = (\iota')^\tau = \tau^\tau = \varepsilon.$$

6. Les symboles $A : B$ et $B ! A$ sont synonymes¹ de $(AB')^\eta$, et par conséquent de $(A' + B)^\varepsilon$. Le symbole $A : B$ affirme que *si A est vrai B est vrai*; $B ! A$ affirme que *B est vrai si A est vrai*; $(AB')^\eta$ affirme qu'*il est impossible que A soit vrai et (en même temps) B faux*; et $(A' + B)^\varepsilon$ affirme qu'*il est certain que A est faux ou B vrai*. Si l'antécédent A représente les données d'un argument, le conséquent B représente la conclusion. Puisqu'il ne faut pas confondre A^ε avec A^τ , ni A^η avec A' , il ne faut pas non plus confondre $A : B$, c'est-à-dire $(A' + B)^\varepsilon$, avec $A' + B$. La proposition $A : B$, comme son synonyme $(A' + B)^\varepsilon$, affirme que $A' + B$ est vrai (et, par conséquent, AB' faux) *dans tous les cas admissibles*; tandis que la proposition $A' + B$, comme son synonyme $(AB')'$, affirme seulement que $A' + B$ est vrai (et

1. A noter que $A : B$ est l'abrégé de $A^\tau : B^\tau$, qui veut dire $(A^\tau B^\tau)^\eta$, dont l'abrégé est $(AB')^\eta$.

par conséquent AB' faux) *dans un certain cas*. Nous appelons la proposition $A : B$ une *implication*, parce qu'elle affirme que A *implique* B .

7. Le symbole $A : B : C$ veut dire $(A : B)(B : C)$, et $A ! B ! C$ veut dire $(A ! B)(B ! C)$. Une série d'*implications déductives* $A : B : C : D$, etc., ou d'*implications inductives* $A ! B ! C ! D$, etc., doit être interprétée de la même manière.

8. Le symbole $(A = B)$, ou son synonyme $(A :: B)$, veut dire $(A : B)(B : A)$. On appelle $B : A$ (comme son synonyme $A ! B$) l'*inverse* de $A : B$. Le symbole $A \equiv B$ affirme que A est *synonyme* de B .

9. Pour éviter autant que possible l'emploi des parenthèses, il est commode de poser certaines conventions pour fixer la *portée* des signes de relation, $+$, $:$, $!$, $::$, $=$. Convenons donc que les trois signes, $:$, $!$, $::$ ont tous la même portée, et que chacun a plus de portée que le signe $+$, et moins de portée que le signe $=$.

Ainsi, l'implication $A + B : C$ veut dire $(A + B) : C$, et non pas $A + (B : C)$; et la double implication $A = B :: C$ veut dire $A = (B :: C)$, et non pas $(A = B) :: C$, qu'on peut exprimer sans parenthèse par $A :: B = C$. Les formules suivantes sont évidentes ou faciles à prouver :

- | | |
|-----|------------------------------------|
| (1) | $\varepsilon : A = A^\varepsilon,$ |
| (2) | $A : \eta = A^\eta,$ |
| (3) | $A : \varepsilon = \varepsilon,$ |
| (4) | $\eta : A = \varepsilon,$ |
| (5) | $\varepsilon + A = \varepsilon,$ |
| (6) | $\eta + A = A,$ |

- (7) $A : B = B' : A',$
- (8) $A : BC = (A : B) (A : C),$
- (9) $A + B : C = (A : C) (B : C),$
- (10) $(A = \epsilon) = A^\epsilon,$
- (11) $(A = \eta) = A^\eta,$
- (12) $\epsilon : \eta = \eta,$
- (13) $\epsilon : \theta = \eta,$
- (14) $\tau : A = A^\epsilon,$
- (15) $A : \iota = A^\eta,$
- (16) $A : \tau = \epsilon,$
- (17) $\iota : A = \epsilon,$
- (18) $\tau + A = \epsilon,$
- (19) $\iota + A = A,$
- (20) $(A = \tau) = A^\epsilon, \text{ et non } A^\tau,$
- (21) $(A = \iota) = A^\eta, \text{ et non } A^\iota,$
- (22) $\tau : \iota = \eta,$
- (23) $\tau : \theta = \eta,$
- (24) $\epsilon A = A,$
- (25) $\eta A = \eta.$

Nous prouvons (4), (5), (9), (13), (14), (17), (20), (21) comme suit :

- (4) $\eta : A = (\eta A')^\eta = \eta^\eta = \epsilon.$
- (5) $\epsilon + A = (\epsilon' A')' = (\eta A')^\iota = \eta^\iota = \epsilon.$
- (9) $A + B : C = C' : (A + B)' = C' : A'B' = (C' : A') (C' : B')$
 $= (A : C) (B : C), \text{ en vertu des formules 7 et 8.}$
- (13) $\epsilon : \theta = (\epsilon \theta')^\eta = (\theta')^\eta = \theta^\epsilon = \eta.$
- (14) $\tau : A = \tau^\tau : A^\tau = \epsilon : A = A^\epsilon \text{ (voir p. 140, note 3).}$
- (17) $\iota : A = \iota^\tau : A^\tau = \eta : A = \epsilon \text{ (voir p. 140, note 3).}$
- (20) $A :: \tau = A^\tau :: \tau^\tau = A :: \epsilon = (A : \epsilon) (\epsilon : A) = \epsilon (\epsilon : A) = \epsilon : A = A^\epsilon$
- (21) $A :: \iota = A^\tau :: \iota^\tau = A :: \eta = (A : \eta) (\eta : A) = A^\eta \epsilon = A^\eta.$

La proposition $(A=B)$ affirme que A est *équivalent* à B , mais non nécessairement que A et B sont *synonymes* (voir § 8); car nous avons les équivalences $(\epsilon_1 = \epsilon_2)$ et $(\eta_1 = \eta_2)$, quelles que soient les certitudes ϵ_1 et ϵ_2 , ou les impossibilités η_1 et η_2 . Nous prouvons la seconde comme suit :

$$\begin{aligned} (\eta_1 = \eta_2) &= (\eta_1 : \eta_2) (\eta_2 : \eta_1) = (\eta_1 \eta'_2)^\eta (\eta_2 \eta'_1)^\eta = (\eta_1 \epsilon_1)^\eta (\eta_2 \epsilon_2)^\eta \\ &= \eta_1^\eta \eta_2^\eta = \epsilon \end{aligned}$$

car la négation d'une impossibilité est une certitude. Évidemment $(A \equiv B) : (A = B)$.

10. Le symbole A_B est synonyme de $A:B$, et A_{oB} est synonyme de $(A:B)'$ (mais voir § 26). Ces abréviations sont souvent commodes. Ainsi :

- (1) $(A : B) : (x_A : x_B),$
- (2) $(A : B) : (B_x : A_x),$
- (3) $(A + B)_x : A_x + B_x : (AB)_x,$
- (4) $x_{AB} : x_A + x_B : x_{A+B},$
- (5) $(A + B)_{ox} = A_{ox} + B_{ox},$
- (6) $(A + B)_x :: A_x + B_x = A_x :: B_x.$

11. Pour montrer l'utilité de cette notation, je prouve la dernière formule comme suit :

$$\begin{aligned} (A + B)_x :: A_x + B_x &= \\ A_x B_x :: A_x + B_x &= (A_x B_x : A_x + B_x) (A_x + B_x : A_x B_x) = \epsilon (A_x + B_x : A_x B_x) \\ &= A_x + B_x : A_x B_x = (A_x : A_x B_x) (B_x : A_x B_x) \quad (\text{voir § 9, formule 9}) \\ &= (A_x : A_x) (A_x : B_x) (B_x : A_x) (B_x : B_x) \quad (\text{voir § 9, formule 8}) \\ &= \epsilon (A_x : B_x) (B_x : A_x) \epsilon = (A_x : B_x) (B_x : A_x) = A_x :: B_x \end{aligned}$$

12. Soient $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ des propositions qui sont

toutes possibles, mais dont *une seulement* est vraie. Sur ces n propositions, supposons que $A_1, A_2, \dots, A_r$ impliquent (chacune séparément) une conclusion φ ; que $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_s$ impliquent φ' ; et que les autres $A_{s+1}, A_{s+2}, \dots, A_n$ n'impliquent ni φ ni φ' . Alors, nous posons comme définitions (voir § 8) :

$$\begin{aligned} W\varphi &\equiv A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_r, \\ W\varphi' &\equiv A_{r+1} + A_{r+2} + \dots + A_s, \\ V\varphi &\equiv V\varphi' \equiv A_{s+1} + A_{s+2} + \dots + A_n, \\ S\varphi &\equiv W\varphi + V\varphi, \\ S\varphi' &\equiv W\varphi' + V\varphi. \end{aligned}$$

De plus, $W'\varphi$ veut dire $(W\varphi)'$; $S'\varphi$ veut dire $(S\varphi)'$.

Puisque A est plus fort¹ que $A + B$, que $A + B$ est plus fort que $A + B + C$, etc., nous pouvons appeler $W\varphi$ la *plus faible donnée dont on puisse déduire la proposition φ* , tandis que $S\varphi$ indique la *plus forte conclusion que l'on puisse déduire de φ* ; de sorte que nous aurons $W\varphi : \varphi : S\varphi$. De ces définitions on déduit facilement les formules :

$$\begin{aligned} W\varphi' &= S'\varphi, & S'\varphi &= W'\varphi, \\ V^0\varphi &= (W\varphi = S\varphi = \varphi) = (V\varphi = 0). \end{aligned}$$

Le symbole $V^0\varphi$, ainsi que son synonyme $V\varphi = 0$, affirme, *non* que $V\varphi$ est impossible, mais que $V\varphi$ *n'existe pas dans notre univers actuel*; c'est-à-dire, que toute proposition de la série $A_1, A_2, \dots, A_n$, ou implique φ ou implique φ' , de sorte que (dans cette série) il n'y a pas de proposition $V\varphi$ dont on puisse dire qu'elle n'implique ni φ ni φ' .

1. Car A implique $A + B$; $A + B$ implique $A + B + C$, etc. Symboliquement : $A : A + B : A + B + C$, etc.

Le symbole A^0 affirme que A est une proposition *muette*¹, qui *n'affirme rien* et qui *ne nie rien*, et qui, par conséquent, n'appartient à aucune des classes τ , ϵ , η , θ .

13. Supposons que notre totalité (ou « univers ») d'hypothèses possibles se compose des neuf termes de la multiplication $(A^\epsilon + A^\eta + A^0) (B^\epsilon + B^\eta + B^0)$, et de leurs combinaisons conjonctives ou disjonctives; nous obtenons de nombreuses formules, telles que :

$$(1) \quad W(AB)^0 = A^\epsilon B^0 + A^0 B^\epsilon$$

$$(2) \quad S(AB)^0 = A^{\eta\epsilon} B^0 + A^0 B^{\eta\epsilon}$$

$$(3) \quad W(AB)^{\theta\epsilon} = S'(AB)^0 = A^\eta + B^\eta + A^\epsilon B^\epsilon$$

$$(4) \quad S(AB)^{\theta\epsilon} = W'(AB)^0 = A^\eta + B^\eta + A^\epsilon B^\epsilon + A^0 B^0$$

La formule (1) affirme que la plus faible donnée dont on peut conclure que AB est une proposition *variable* est la proposition disjonctive $A^\epsilon B^0 + A^0 B^\epsilon$, qui affirme que *ou A est certain et B variable, ou A variable et B certain*. La formule (2) affirme que la plus forte conclusion qu'on peut tirer de la proposition $(AB)^0$ est la proposition $A^{\eta\epsilon} B^0 + A^0 B^{\eta\epsilon}$, qui affirme que *ou A est possible et B variable, ou A variable et B possible*. D'autres formules évidentes ou faciles à

1. D'après notre définition, ni $W\varphi$ ni $V\varphi$ ni $S\varphi$ ne peuvent appartenir à la classe η ; mais un ou deux des trois peuvent être absents, et, par conséquent, appartenir à la classe 0. Dans nos formules $\varphi(A)$, $\varphi(A, B)$, etc., il est sous-entendu que A, B , etc., ne sont pas des *propositions muettes*, autrement quelques-unes des formules ne seraient pas valides, comme par exemple la formule $A^{\tau\epsilon} = A^{\tau\tau}$. Car $0^{\tau\epsilon} = (0^\tau)^\epsilon = \eta^\epsilon = \epsilon$; tandis que $0^{\tau\tau} = (0^\tau)^\tau = \eta^\tau = \eta$. Mais la formule est vraie dans le cas A^η , comme dans tous les autres; car $\eta^{\tau\epsilon} = (\eta^\tau)^\epsilon = \eta^\epsilon = \epsilon$, et aussi $\eta^{\tau\tau} = (\eta^\tau)^\tau = \epsilon^\tau = \epsilon$. Si nous admettons le cas $A^0 B^0$, la formule $(AB)^\epsilon = A^\epsilon + B^\epsilon$ devrait être $(A^\tau B^\tau)^\epsilon = A^{\tau\epsilon} + B^{\tau\epsilon}$. La formule $(A^\alpha B^\beta)^\epsilon = A^{\alpha\epsilon} + B^{\beta\epsilon}$ est vraie toujours, même dans le cas $A^0 B^0$. Une proposition η contredit quelque donnée; tandis que 0 ne contredit rien.

prouver sont :

- (5) $W\varphi : \varphi : S\varphi$
- (6) $W\varphi :: S\varphi = W\varphi :: \varphi :: S\varphi$
- (7) $W(AB)^{\varepsilon} = S(AB)^{\varepsilon} = A^{\varepsilon} B^{\varepsilon}$
- (8) $W(A + B)^{\varepsilon} = A^{\varepsilon} + B^{\varepsilon}$
- (9) $S(A + B)^{\varepsilon} = A^{\varepsilon} + B^{\varepsilon} + A^{\theta} B^{\theta}$
- (10) $W(A + B)^{\eta} = S(A + B)^{\eta} = A^{\eta} B^{\eta}$
- (11) $W(A + B)^{\theta} = A^{\eta} B^{\theta} + A^{\theta} B^{\eta}$
- (12) $S(A + B)^{\theta} = A^{\varepsilon\iota} B^{\theta} + A^{\theta} B^{\varepsilon\iota}$
- (13) $W(AB)^{\eta} = A^{\eta} + B^{\eta}$
- (14) $S(AB)^{\eta} = A^{\eta} + B^{\eta} + A^{\theta} B^{\theta}$
- (15) $W(A : B) = W(AB)^{\eta} = A^{\eta} + B^{\varepsilon}$
- (16) $S(A : B) = S(AB)^{\eta} = A^{\eta} + B^{\varepsilon} + A^{\theta} B^{\theta}$
- (17) $W(A : B)' = S'(A : B) = A^{\varepsilon} B^{\varepsilon\iota} + A^{\eta\iota} B^{\eta}$
- (18) $S(A : B)' = W'(A : B) = A^{\eta\iota} B^{\varepsilon\iota}$

On peut déduire les formules (15) et (16) de (13) et (14), en changeant B en B'.

La formule (17) affirme que la plus faible donnée dont on peut déduire que A n'implique pas B est la proposition que A est certain et B incertain ou A possible et B impossible. On prouve cette formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 W(A : B)' &= S'(A : B) = (A^{\eta} + B^{\varepsilon} + A^{\theta} B^{\theta})', & (\text{voir formule 16}) \\
 &= A^{\eta\iota} B^{\varepsilon\iota} (A^{\theta\iota} + B^{\theta\iota}); \text{ car } (\alpha + \beta + \gamma)' = \alpha' \beta' \gamma', \text{ et } (\alpha \beta)' = \alpha' + \beta', \\
 &= A^{\varepsilon} B^{\varepsilon\iota} + A^{\eta\iota} B^{\eta}; \text{ car } A^{\eta\iota} A^{\theta\iota} = A^{\varepsilon}, \text{ et } B^{\varepsilon\iota} B^{\theta\iota} = B^{\eta}.
 \end{aligned}$$

14. Ces formules nous aident souvent à trouver des cas où une implication n'est pas valide. Par exemple, $(x_A : x_B) : A_B$, l'inverse de la formule 1 du § 10, n'est pas tou-

jours vraie. Pour trouver des cas où cette inverse est fausse, représentons-la par φ . Alors, par une série d'implications inductives, nous aurons (voir les formules 15 et 17) :

$$\begin{aligned} \varphi' & ! (x_A : x_B) A_{0B} ! W(x_A : x_B) W A_{0B} ! \{ (x_A)^\eta + (x_B)^\varepsilon \} (A^\varepsilon B^\varepsilon + A^\eta B^\eta) \\ & ! \{ (x^\varepsilon A^\varepsilon + x^\eta A^\eta) + (x^\eta + B^\eta) \} (A^\varepsilon B^\varepsilon + A^\eta B^\eta) \\ & ! x^\eta A^\varepsilon B^\varepsilon + x^\varepsilon A^\theta B^\eta + x^\eta A^\eta B^\eta. \end{aligned}$$

Ainsi nous trouvons qu'il y a *au moins* trois cas où l'implication du troisième degré φ n'est pas vraie : 1° quand x est *impossible* (η), A *certain* (ε), B *incertain* (ε); 2° quand x est *certain* (ε), A *variable* (θ), B *impossible* (η); 3° quand x est *impossible* (η), A *possible* (η), B *impossible* (η). Si nous excluons toute proposition variable de notre univers, de sorte que toute proposition *vraie* soit *certaine*, et toute proposition *fausse impossible*; alors, le second terme $x^\varepsilon A^\theta B^\eta$ disparaît, à cause du facteur A^θ , et le premier et le troisième deviennent chacun synonyme de $x^\varepsilon A^\theta B^\eta$. Ces résultats sont faciles à vérifier. Prenons le cas $x^\varepsilon A^\theta B^\eta$. En remplaçant x, A, B dans l'implication φ par leurs exposants $\varepsilon, \theta, \eta$, nous aurons :

$$\varphi = (\varepsilon_\theta : \varepsilon_\eta) : \theta_\eta = (\eta : \eta) : \eta = \varepsilon : \eta = \eta,$$

c'est-à-dire que l'implication φ est fausse dans le cas $x^\varepsilon A^\theta B^\eta$.

15. L'implication $A : B$ est synonyme de l'équivalence ($A = AB$); car (voir § 8, et § 9, formule 8) :

$$\begin{aligned} (A = AB) & = (A : AB) (AB : A) = (A : A) (A : B) (AB : A) \\ & = \varepsilon (A : B) \varepsilon = A : B. \end{aligned}$$

Donc nous pouvons appeler l'antécédent A un *multiple* du conséquent B, et le conséquent B un *facteur* de l'antécédent A. L'implication $A : \gamma$ affirme que la proposition A contient un facteur *impossible*, sans dire quelle impossibilité de la série $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, etc., de sorte que $A : \gamma$ est synonyme de A^γ .

16. L'implication $(A : B) : A' + B$ est toujours vraie, mais pas toujours son *inverse*, l'implication $A' + B : (A : B)$. Soit φ cette *inverse*. En prenant les mêmes données qu'au § 13, nous trouverons facilement : $W_\varphi = A^\varepsilon B^\theta + A^\theta B^\gamma$. Donc il y a deux cas, $A^\varepsilon B^\theta$ et $A^\theta B^\gamma$, dans lesquels φ est nécessairement faux ; de sorte que $A : B$ et $A' + B$ ne sont pas synonymes. On peut vérifier comme dans § 14. Prenons le second cas $A^\theta B^\gamma$. En remplaçant A et B par leurs exposants θ et γ , nous aurons :

$$\varphi = A' + B : (A : B) = \theta' + \gamma : (\theta : \gamma) = \theta' : \gamma = \gamma ;$$

car (puisque $A^\theta = A^{\theta'}$, voir § 4, formule 3) la négation d'une variable est aussi une variable, et, par conséquent, ne peut pas avoir une impossibilité comme facteur.

17. Les quatre modalités (voir p. 141, note 1) de la Logique traditionnelle méritent quelques mots. Le produit des deux certitudes $(A^\varepsilon + A^\theta + A^\gamma)$ et $(A + A')$ est :

$$A^\varepsilon + AA^\theta + A'A^\theta + A^\gamma \quad (1)$$

qui est synonyme de

$$A^\varepsilon + AA^{\varepsilon'} + A'A^{\gamma'} + A^\gamma \quad (2)$$

car

$$AA^{\varepsilon'} = A(A^\gamma + A^\theta) = AA^\theta, \quad \text{et} \quad A'A^{\gamma'} = A'(A^\varepsilon + A^\theta) = A'A^\theta.$$

Les quatre termes de (2) sont les quatre modalités; car :

A^e affirme que A est *nécessairement vrai*; c'est-à-dire la supposition que A soit faux *contredit quelque donnée ou définition*.

A^a affirme que A est vrai *dans un cas particulier*, mais qu'il est incertain *comme loi générale*; c'est-à-dire la supposition qu'il soit faux *ne contredit aucune donnée ou définition*.

A^i A^n affirme que A est faux *dans un cas particulier*, mais qu'il est possible *comme loi générale*; c'est-à-dire, la supposition qu'il soit vrai *ne contredit aucune donnée ou définition*.

A^n affirme que A est *nécessairement faux*; c'est-à-dire, la supposition qu'il soit vrai *contredit quelque donnée ou définition*.

18. Quelques mots sont aussi dus au syllogisme. Tout syllogisme valide peut être déduit de la formule

$$(A : B) (B : C) : (A : C),$$

dont l'abrégé est $A_B B_C : A_C$, et que nous désignerons par le symbole $\varphi (A, B, C)$.

Sur les individus P_1, P_2, P_3 , etc. (qui peuvent être des propositions ou des choses concrètes) formant l'univers de notre discours, prenons un individu P au hasard. Supposons que les symboles A, B, C affirment respectivement que P appartient à la classe A, que P appartient à la classe B, que P appartient à la classe C. Ces conventions posées, la formule $\varphi (A, B, C)$ exprimera le syllogisme appelé *Barbara*.

Cette formule (comme toute formule valide; voir § 21) est vraie *quelles que soient les propositions A, B, C qui la composent*, même, par exemple, si elles sont des *impossibilités*. Supposons que $A = \gamma_1$, $B = \gamma_2$, $C = \gamma_3$; nous aurons (voir § 15) :

$$\varphi(A, B, C) = \varphi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma_1 : \gamma_2) (\gamma_2 : \gamma_3) : (\gamma_1 : \gamma_3) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = \varepsilon_4.$$

Pour montrer comment les autres syllogismes valides peuvent être déduits de la formule $\varphi(A, B, C)$, prenons le syllogisme appelé *Fresison*. Nous aurons (voir §§ 10 et 14) :

$$\begin{aligned} \text{Fresison} &= C_B B_{OA'} : A_{OC} = C_B B_{OA'} A_C : \gamma \\ &= A_C C_{B'} : B_A = A_C C_{B'} : A_{B'} = \varphi(A, C, B'). \end{aligned}$$

C'est-à-dire, si dans $\varphi(A, B, C)$ nous changeons B en C, et C en B', nous aurons une formule qui est équivalente à *Fresison*.

Le syllogisme appelé *Darapti* n'est pas valide sous sa forme habituelle; pour le rendre valide, il faut que nous ajoutons à nos deux prémisses une troisième prémisses B^{γ_1} , car, sans cette troisième prémisses, nous aurions :

$$\text{Darapti} = B_C B_A : A_{OC} = B_{CA} A_C : \gamma = B_{CA} (AC)^{\gamma} : \gamma.$$

Or cette dernière implication est évidemment fausse dans le cas $B^{\gamma} (CA)^{\gamma}$; car alors elle devient $\gamma_{\gamma} \gamma_{\gamma} : \gamma$, qui est impossible, puisque γ_{γ} et γ^{γ} sont tous les deux des certitudes (voir § 15), et une certitude ne peut pas impliquer une impossibilité.

Mais *Darapti* devient une formule valide si nous ajoutons B^{γ_1} à nos prémisses; et alors on peut le déduire, comme les

autres syllogismes, de la formule $\varphi(A, B, C)$. Car, avec cette troisième prémissse B^{η_1} , nous aurons :

$$\begin{aligned} Darapti &= B^{\eta_1} B_c B_A : A_{oc} = B^{\eta_1} B_c B_A A_c : \eta = B^{\eta_1} B_{cA} (AC)^{\eta} : \eta \\ &= B_{c\eta} B_{Ac} (AC)_{\eta} : \eta = B_{Ac} (AC)_{\eta} : B_{\tau} = \varphi(B, AC, \tau). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que *Darapti*, augmenté d'une troisième prémissse B^{η_1} , devient un cas particulier de la formule $\varphi(A, B, C)$, en changeant A en B, B en AC, et C en τ .

II. — Probabilités.

19. Soient A et B deux propositions. Dans ce cas le symbole $\frac{A}{B}$ exprime la probabilité que A soit vraie *en supposant que B soit vraie*. Le symbole $\frac{A}{\varepsilon}$ exprime la probabilité que A soit vraie, *en ne supposant rien que les données du problème à résoudre*. Le symbole $\delta \frac{A}{B}$, ou $\delta(A, B)$, est synonyme de $\frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon}$, et représente *la dépendance de A par rapport à B*; c'est-à-dire, il représente l'augmentation, ou (s'il est négatif) la diminution, subie par la probabilité $\frac{A}{\varepsilon}$, quand on suppose B ajoutée aux données du problème. Si $\delta \frac{A}{B}$ est zéro, on dit que A est indépendante de B; ce qui implique (comme nous allons voir) que B est indépendante de A. Le symbole $\delta'(A, B)$ veut dire ($\delta \frac{A}{B} = 0$).

Sur la totalité des points marqués dans le cercle E, en fixant notre attention sur une seule des trois figures 3, 4, 5, prenons un point P au hasard; et supposons que le symbole A affirme que P sera un des points marqués dans le cercle

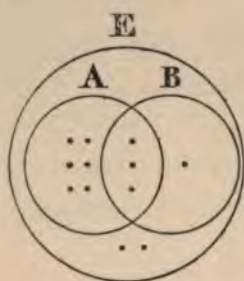


Fig. 3.

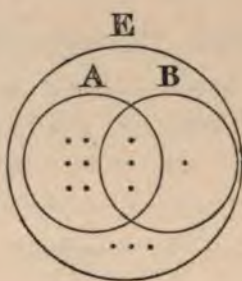


Fig. 4.

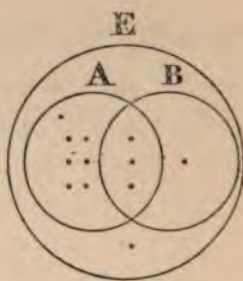


Fig. 5.

A, et que B affirme que P sera un des points marqués dans le cercle B. Nous aurons :

$$\text{Fig. 3 : } \delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\epsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\epsilon} = \frac{3}{4} - \frac{9}{12} = 0;$$

$$\text{Fig. 4 : } \delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\epsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\epsilon} = \frac{3}{4} - \frac{9}{13} = \frac{3}{52};$$

$$\text{Fig. 5 : } \delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\epsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\epsilon} = \frac{3}{4} - \frac{9}{11} = -\frac{3}{44}.$$

Ainsi, nous voyons que, dans la Fig. 3, A est indépendante de B; que, dans la Fig. 4, la dépendance de A par rapport à B est positive; et que, dans la Fig. 5, la dépendance est négative.

20. Il est souvent commode, en discutant des questions de probabilité, de représenter les propositions par des lettres majuscules, A, B, C, etc., et leurs probabilités respectives par les minuscules a , b , c , etc.; de sorte que

nous aurons $\frac{A}{\varepsilon} = a, \frac{B}{\varepsilon} = b, \frac{C}{\varepsilon} = c$, etc. Si nous supposons aussi $a' = 1 - a, b' = 1 - b, c' = 1 - c$, etc., nous aurons $\frac{A'}{\varepsilon} = a', \frac{B'}{\varepsilon} = b', \frac{C'}{\varepsilon} = c'$. Ces conventions posées, nous trouvons plusieurs formules, telles que :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{AB}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} \cdot \frac{B}{\varepsilon} = \frac{B}{\varepsilon} \cdot \frac{A}{\varepsilon}, & \frac{AB}{x} = \frac{A}{x} \cdot \frac{B}{Ax} = \frac{B}{x} \cdot \frac{A}{Bx} \\
 (2) \quad & \frac{A+B}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} + \frac{B}{\varepsilon} - \frac{AB}{\varepsilon}, & \frac{A+B}{x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x} - \frac{AB}{x} \\
 (3) \quad & \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{B}{A}, & \delta \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \delta \frac{B}{A} \\
 (4) \quad & \frac{A'}{B} = 1 - \frac{A}{B}, & \delta \frac{A'}{B} = -\delta \frac{A}{B} \\
 (5) \quad & \frac{A}{B'} = \frac{a}{b'} - \frac{b}{b'} \frac{A}{B}, & \delta \frac{A}{B'} = -\frac{b}{b'} \delta \frac{A}{B} \\
 (6) \quad & \frac{A'}{B'} = 1 - \frac{A}{B'}, & \delta \frac{A'}{B'} = -\delta \frac{A}{B'} = \frac{b}{b'} \delta \frac{A}{B}.
 \end{aligned}$$

Par la formule : $\delta \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \delta \frac{B}{A}$, on voit que $\delta \frac{A}{B}$ doit avoir le même signe (positif, négatif, ou zéro) que $\delta \frac{B}{A}$, puisque les probabilités a et b sont nécessairement positives. Donc, quand A est indépendant de B , B doit être indépendant de A ; théorème exprimé symboliquement par $\delta^\circ(A, B) = \delta^\circ(B, A)$ (voir § 19).

21. Il est quelquefois commode de diviser nos propositions en *certitudes formelles* (x_1, x_2 , etc.), *impossibilités formelles* (λ_1, λ_2 , etc.), et *variables formelles* (μ_1, μ_2 , etc.).

Les *certitudes formelles* résultent des définitions mêmes

de nos symboles, sans autres données; les *impossibilités formelles* contredisent chacune quelque définition, ou combinaison de définitions; les *variables formelles* ne sont *ni formellement certaines ni formellement impossibles*. Par exemple,

$$(AB : A)^{\varepsilon}, (\tau : A)^{\varepsilon}, (A^{\varepsilon}A^{\theta})^{\lambda}, (\theta : \tau)^{\lambda}, (A : B)^{\mu}, (A + B)^{\mu}.$$

Ces définitions de $\varepsilon, \lambda, \mu$ nous donnent les formules :

$$(1) \quad A^{\varepsilon} : A^{\varepsilon}, \quad (2) \quad A^{\lambda} : A^{\eta}, \quad (3) \quad A^{\theta} : A^{\mu}.$$

La troisième peut être déduite des deux autres ainsi :

$$\varepsilon : (A^{\varepsilon} : A^{\varepsilon}) (A^{\lambda} : A^{\eta}) : (A^{\varepsilon} : A^{\varepsilon}) (A^{\eta} : A^{\lambda}) : (A^{\varepsilon} A^{\eta} : A^{\varepsilon} A^{\lambda}) : (A^{\theta} : A^{\mu})$$

en faisant appel aux formules :

$$\alpha : \beta = \beta' : \alpha' \quad \text{et} \quad (\alpha : \beta) (\gamma : \delta) : (\alpha\gamma : \beta\delta).$$

Toute *variable formelle*, comme $A : B$, peut être une *certitude* (pas une *certitude formelle*), une *impossibilité*, ou une *variable*, d'après nos données (voir § 23). Prenons, par exemple, l'implication $A : B$, où A et B peuvent représenter des propositions simples ou des implications compliquées. Quelles sont les probabilités respectives que l'implication $A : B$ soit une *certitude*, une *impossibilité*, une *variable*? A cette question, ainsi posée, on ne peut pas donner de réponse; les données nécessaires nous manquent. Mais si nous prenons comme données que les 9 termes du produit $(A^{\varepsilon} + A^{\eta} + A^{\theta}) (B^{\varepsilon} + B^{\eta} + B^{\theta})$ sont également probables, nous pouvons trouver des limites plus proches

que 1 et 0 pour les probabilités demandées. Le produit est :

$$A^{\epsilon}(\underline{B^{\epsilon}} + \underline{B^{\eta}} + \underline{B^{\theta}}) + A^{\eta}(\underline{B^{\epsilon}} + \underline{B^{\eta}} + \underline{B^{\theta}}) + A^{\theta}(\underline{B^{\epsilon}} + \underline{B^{\eta}} + \underline{B^{\theta}}).$$

Trois des 9 termes (les trois soulignés, $A^{\epsilon}B^{\eta}$, $A^{\epsilon}B^{\theta}$, $A^{\theta}B^{\eta}$) impliquent $(A : B)^{\eta}$; cinq termes (ceux qui ont des points au-dessous) impliquent $(A : B)^{\epsilon}$; et un seul terme, $A^{\theta}B^{\theta}$, n'implique (sans autres données) ni $(A : B)^{\epsilon}$, ni $(A : B)^{\eta}$, ni $(A : B)^{\theta}$, ni aucune de leurs négations $(A : B)^{\epsilon\iota}$, $(A : B)^{\eta\iota}$, $(A : B)^{\theta\iota}$.

Donc, si nous posons comme définition que le symbole $\varphi^x(a, b)$ affirme que la probabilité de φ^x est entre les limites a et b , nous aurons¹ (en posant $\varphi = A : B$, et x successivement $= \epsilon, \eta, \theta$) :

$$(A : B)^{\epsilon}\left(\frac{5}{9}, \frac{6}{9}\right), \quad (A : B)^{\eta}\left(\frac{3}{9}, \frac{4}{9}\right), \quad (A : B)^{\theta}\left(0, \frac{1}{9}\right).$$

Si nous excluons A^{θ} et B^{θ} de notre univers de possibilités et si nous prenons comme données que les quatre termes du produit $A^{\epsilon\eta}B^{\epsilon\eta}$ sont également probables, nous aurons :

$$\frac{(A : B)^{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{(A^{\epsilon}B^{\eta})^{\iota}}{\epsilon} = 1 - \frac{A^{\epsilon}B^{\eta}}{\epsilon} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{(A : B)^{\eta}}{\epsilon} = \frac{A^{\epsilon}B^{\eta}}{\epsilon} = \frac{1}{4}.$$

Il est évident qu'ici notre donnée $A^{\theta\iota}B^{\theta\iota}$ implique $(A : B)^{\theta\iota}$.

1. La probabilité $\frac{\varphi^x}{\epsilon}$ est toujours entre les limites $\frac{W\varphi^x}{\epsilon}$ et $\frac{S\varphi^x}{\epsilon}$; car $W\varphi^x : \varphi^x : S\varphi^x$, et $\frac{\varphi^x}{\epsilon} = \frac{W\varphi^x}{\epsilon} + \frac{V\varphi^x}{\epsilon}$. Ici $V\varphi^x = A^{\theta}B^{\theta}$, pour chaque valeur de x (voir §§ 12 et 13); mais $W\varphi^{\epsilon} = W\varphi = A^{\eta} + B^{\epsilon}$; $W\varphi^{\eta} = W\varphi^{\iota} = A^{\epsilon}B^{\epsilon\iota} + A^{\eta\iota}B^{\eta}$; $W\varphi^{\theta}$ est ici une proposition *muette*, puisqu'aucune des 9 propositions qui constituent notre univers n'implique (sans plus de données) la conclusion φ^{θ} .

22. Bon nombre de logiciens confondent l'implication complexe $A : (B : C)$ (*Si A est vrai, alors, si B est vrai C est vrai*), avec l'implication simple $AB : C$ (*Si A et B sont vrais, C est vrai*); mais d'après mon interprétation de la conjonction *si*, ces deux implications ne sont pas synonymes. (Voir § 6.)

Désignons la première par φ_1 et la seconde par φ_2 ; alors nous aurons :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A : (B : C) = A : (BC')^{\eta} \\ \varphi_2 &= AB : C = (ABC')^{\eta} = A : (BC')^{\epsilon}\end{aligned}$$

Or il est clair, puisque le conséquent $(BC')^{\eta}$ implique le conséquent $(BC')^{\epsilon}$, que φ_1 implique φ_2 (voir la première formule de § 10). Mais φ_2 n'implique pas nécessairement φ_1 , car il y a des cas où φ_2 est vrai et φ_1 faux. Supposons, par exemple, que BC' soit une *variable* θ_1 ; il suit que sa négation θ'_1 est aussi une variable. Supposons aussi (comme c'est permis) que A soit cette variable θ'_1 . Alors nous aurons :

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \theta'_1 : \theta'_1 = \varepsilon_1 \text{ (une certitude)} \\ \varphi_1 &= \theta'_1 : \theta_1^{\eta} = \theta'_1 : \eta_1 = \eta_2 \text{ (une impossibilité)}\end{aligned}$$

car une impossibilité η_1 ne peut pas être un facteur d'une variable θ'_1 .

Une autre preuve est la suivante. Sur les 15 points dans le cercle E, qu'un point P soit pris au hasard (Fig. 6). Supposons que les quatre symboles E, A, B, C, comme propositions, affirment respectivement que P sera un des 15 points dans le cercle E, que P sera un des 5 points dans le cercle A, que P sera un des 5 points dans le cercle B, que P sera un des

6 points dans le cercle C. La proposition E est une *certitude* ; les propositions A, B, C sont des *variables* dont les probabilités respectives sont $\frac{5}{15}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{6}{15}$; et la proposition BC' est aussi une variable dont la probabilité est $\frac{3}{15}$.

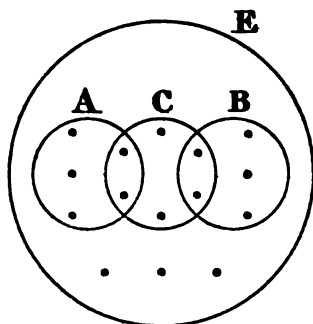


Fig. 6.

Comme ces quatre dernières conclusions résultent nécessairement de nos données, toute proposition qui contredit n'importe laquelle des quatre doit être une *impossibilité*. Or $(BC')^n$, qui affirme que la probabilité que BC' soit vrai est zéro, contredit notre dernière conclusion, qui affirme que cette probabilité est $\frac{3}{15}$. Donc $(BC')^n$ n'est pas simplement une proposition (ou prédiction) que le hasard rend fausse dans un cas particulier et à propos d'un certain point ; c'est une proposition qui *contredit nos données*, et qui est, par conséquent (dans les limites de nos données), une *impossibilité*. Que η_1 désigne cette impossibilité $(BC')^n$, et que θ_1 désigne la proposition variable A. Alors nous aurons :

$$\varphi_1 = A : (BC')^n = \theta_1 : \eta_1 = \eta_2,$$

car l'implication $\phi_1 : \tau_1$, qui affirme qu'une impossibilité τ_1 est un facteur d'une variable ϕ_1 , est une seconde impossibilité τ_2 . Donc, dans les conditions données, ϕ_1 est une impossibilité.

Maintenant prenons ϕ_2 , qui veut dire $A : (BC)^\epsilon$. D'après notre définition d'une implication, ϕ_2 est synonyme de $(ABC)^\tau$, et affirme seulement que ABC est *impossible*, affirmation qui (voir la figure) est évidemment une *certitude*, puisque AB est impossible. Appelons cette certitude ϵ_1 . Ainsi nous avons, *dans les limites des mêmes données*,

$$\phi_1 = A : (BC)^\tau = \tau_2, \quad \text{et} \quad \phi_2 = A : (BC)^\epsilon = \epsilon_1,$$

de sorte que, dans ce cas, comme dans le cas précédent, les deux propositions ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas synonymes.

23. Quand nous avons une proposition de la forme A^x , où x indique la classe à laquelle appartient la proposition A , nous appelons A une *proposition primaire* à l'égard de A^x , et A^x une *proposition secondaire* (ou une proposition du *second degré*) à l'égard de A .

Quand nous avons une proposition de la forme A^{xy} , qui est synonyme de $(A^x)^y$, et affirme que la proposition A^x appartient à la classe y , nous appelons A^{xy} une proposition du *second degré* à l'égard de A^x , mais une proposition du *troisième degré* à l'égard de A . Une proposition de la forme A^{xyz} ou A^{xyzu} , etc., doit être interprétée et nommée d'après le même principe.

Maintenant, supposons que A représente une proposition

simple ou compliquée¹, comment expliquer des propositions du troisième ou quatrième degré, telles que A^{α} , $A^{\eta\theta}$, etc. ? Traduite en langage ordinaire, la proposition $A^{\eta\theta}$, par exemple, veut dire : « Il est *possible mais incertain* (θ) qu'il est *impossible* (η) que A soit *certain* (ϵ) ». L'explication générale a déjà été donnée (voir § 21) ; mais allons aux

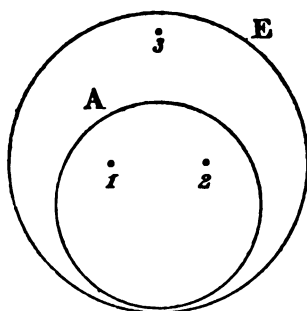


Fig. 7.

principes élémentaires, et examinons quelques exemples concrets.

Sur les 3 points marqués (Fig. 7) dans le cercle E, prenons un point P au hasard. Quelle est la probabilité que P sera un des deux points marqués dans le cercle A ? La réponse est évidemment $\frac{2}{3}$; mais, pour faire mieux comprendre la méthode générale, je vais l'appliquer même à ce cas simple.

Que les symboles P_1 , P_2 , P_3 affirment respectivement comme propositions que P sera le point 1, 2, 3 ; tandis que

1. Par exemple, A peut représenter une implication quelconque de n'importe quel degré, comme $\alpha : \beta$ ou $(\alpha : \beta) : (\alpha^x : \beta^x)$, qui formellement peut être vraie ou fausse.

le symbole A, comme proposition, affirme que P sera dans le cercle A. La proposition disjonctive $(P_1 + P_2 + P_3)$ est une *certitude*; donc :

$$\begin{aligned} A &= (P_1 + P_2 + P_3) A = P_1 A + P_2 A + P_3 A \\ \frac{A}{\varepsilon} &= \frac{P_1 A}{\varepsilon} + \frac{P_2 A}{\varepsilon} + \frac{P_3 A}{\varepsilon} \text{ (puisque } P_1 P_2, P_1 P_3, P_2 P_3 = \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}) \\ &= \frac{P_1}{\varepsilon} \cdot \frac{A}{P_1} + \frac{P_2}{\varepsilon} \cdot \frac{A}{P_2} + \frac{P_3}{\varepsilon} \cdot \frac{A}{P_3} \quad \left(\text{car } \frac{\alpha\beta}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{\beta}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Mais :

$$\frac{P_1}{\varepsilon} = \frac{P_2}{\varepsilon} = \frac{P_3}{\varepsilon} = \frac{1}{3}.$$

Donc :

$$\frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{3} \left(\frac{A}{P_1} + \frac{A}{P_2} + \frac{A}{P_3} \right) = \frac{1}{3} (1 + 1 + 0) = \frac{2}{3}.$$

Mais si nous avons pris la Fig. 8 au lieu de la Fig. 7, nous aurions eu :

$$\frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{3} \left(\frac{A}{P_1} + \frac{A}{P_2} + \frac{A}{P_3} \right) = \frac{1}{3} (1 + 1 + 1) = 1.$$

Ainsi, quand les conditions de la Fig. 7 sont données, nous avons A^0 ; mais quand les conditions de la Fig. 8 sont données, nous avons A^1 .

Maintenant supposons que nous ayons *cinq* figures : deux semblables à la Fig. 7, et trois à la Fig. 8; et que, sur ces cinq figures, nous prenions une figure F au hasard. Sur les trois points du cercle E, dans la figure que le hasard présentera, prenons un point P au hasard. La proposition A ayant le même sens qu'avant, quelles sont les probabilités respectives de A et de A^c ?

Soit F_1 le symbole de la proposition : « F sera semblable à la Fig. 7 » et soit F_2 le symbole de la proposition : « F sera

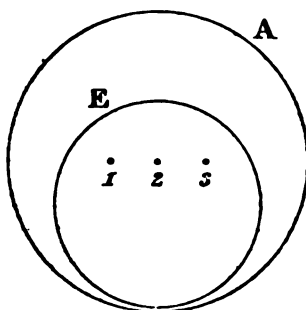


Fig. 8.

semblable à la Fig. 8 » ; de sorte que $(F_1 + F_2)$ est une *certitude*. Donc, $A = (F_1 + F_2) A$, et

$$\frac{A}{\epsilon} = \frac{F_1 A}{\epsilon} + \frac{F_2 A}{\epsilon} = \frac{F_1}{\epsilon} \cdot \frac{A}{F_1} + \frac{F_2}{\epsilon} \cdot \frac{A}{F_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{A}{F_1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{A}{F_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{13}{15}.$$

$$\frac{A^s}{\epsilon} = \frac{F_1 A^s}{\epsilon} + \frac{F_2 A^s}{\epsilon} = \frac{F_1}{\epsilon} \cdot \frac{A^s}{F_1} + \frac{F_2}{\epsilon} \cdot \frac{A^s}{F_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{A^s}{F_1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{A^s}{F_2} = \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}.$$

La dernière conclusion, $\frac{A^s}{\epsilon} = \frac{3}{5}$, implique A^{s0} . Mais si nous prenons comme données que toutes les cinq figures sont semblables à la Fig. 8, la proposition F_2 sera une *certitude*, et nous aurons

$$\frac{A^s}{\epsilon} = \frac{F_2 A^s}{\epsilon} = \frac{F_2}{\epsilon} \cdot \frac{A^s}{F_2} = 1 \times 1 = 1;$$

c'est-à-dire, nous aurons la conclusion A^{s1} , « *Il est certain que A est certain* ».

Pour expliquer le sens de la proposition A^{s1} , supposons qu'il y ait deux *collections* de figures : la collection C_1 , qui

contient 3 figures, toutes semblables à la Fig. 7; et la collection C_2 , qui contient 2 figures semblables à la Fig. 7, et 3 semblables à la Fig. 8. Des deux collections, C_1 et C_2 , prenons une collection C au hasard. Dans la collection qui se présentera, prenons une figure F au hasard; et dans la figure qui se présentera, prenons un point P au hasard. Quelle est la probabilité de $A^{\varepsilon\eta}$?

Les propositions A , F_1 , F_2 ayant les mêmes significations qu'avant, soit C_1 le représentant de la proposition : « La collection C_1 se présentera », et C_2 le représentant de la proposition : « La collection C_2 se présentera ». Puisque $(C_1 + C_2)$ est une *certitude*, nous avons : $A^{\varepsilon\eta} = (C_1 + C_2) A^{\varepsilon\eta}$, et par conséquent (voir la première formule du § 20) :

$$\frac{A^{\varepsilon\eta}}{\varepsilon} = \frac{C_1 A^{\varepsilon\eta}}{\varepsilon} + \frac{C_2 A^{\varepsilon\eta}}{\varepsilon} = \frac{C_1}{\varepsilon} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{C_1} + \frac{C_2}{\varepsilon} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{C_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{C_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{C_2}.$$

Mais, puisque $(F_1 + F_2)$ est une certitude, $A^{\varepsilon\eta} = (F_1 + F_2) A^{\varepsilon\eta}$; donc (par la formule $\frac{\alpha\beta}{x} = \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{x\beta}{\beta}$; voir § 20) nous avons :

$$\frac{A^{\varepsilon\eta}}{C_1} = \frac{F_1}{C_1} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{F_1 C_1} + \frac{F_2}{C_1} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{F_2 C_1} = (1 \times 1) + (0 \times \frac{A^{\varepsilon\eta}}{F_2 C_1}) = 1$$

$$\frac{A^{\varepsilon\eta}}{C_2} = \frac{F_1}{C_2} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{F_1 C_2} + \frac{F_2}{C_2} \cdot \frac{A^{\varepsilon\eta}}{F_2 C_2} = (\frac{2}{5} \times 0) + (\frac{3}{5} \times 0) = 0$$

Donc, $\frac{A^{\varepsilon\eta}}{\varepsilon} = \frac{1}{2} (1 + 0) = \frac{1}{2}$; conclusion qui implique $A^{\varepsilon\eta 0}$.

24. Quand A est une proposition, et x une *fraction numérique*, le symbole A^x est un abrégé de l'équation $\frac{A}{\varepsilon} = x$, et affirme que la probabilité que A soit vrai est x . Cette défi-

nition nous conduit à plusieurs formules, telles que :

$$(1) A^x B^y (AB)^z : (A + B)^{x+y-z}; \quad (2) A^x B^y : \left(\frac{A}{B} = \frac{x}{y} \cdot \frac{B}{A} \right).$$

25. Soit $p = probable$ (plus souvent vrai que faux), et soit $q = improbable$ (plus souvent faux que vrai), nous aurons :

$$\begin{aligned} (3) (A^p + A^q + A^{\frac{1}{2}})^2 & \quad (4) A^{ip} = A^q & (5) A^{pi} = A^q + A^{\frac{1}{2}} \\ (6) A^{iq} = A^p & \quad (7) A^{qi} = A^p + A^{\frac{1}{2}} & (8) (AB)^p : A^p B^p \\ (9) (A + B)^q : A^q B^q & \quad (10) (A : B) : (A^p : B^p) (B^q : A^q). \end{aligned}$$

Par (4), (5), (6), (7) on voit que A^{ip} n'est pas synonyme de A^{pi} , ni A^{iq} synonyme de A^{qi} .

Toutes ces formules sont ou évidentes ou faciles à prouver. Il suffit de prouver la dernière, la formule 10. Cette formule est le produit de deux implications, $(A : B) : (A^p : B^p)$ et $(A : B) : (B^q : A^q)$. Appelons-les respectivement $\varphi(A, B)$ et $\psi(A, B)$. La première est évidente : si, toutes les fois que A est vrai, B est vrai; alors, si A est plus souvent vrai que faux, B doit aussi être plus souvent vrai que faux. Il ne reste donc qu'à prouver $\psi(A, B)$. Puisque $\varphi(A, B)$ est une certitude *formelle*, $\varphi(B', A')$ aussi doit être vrai; or :

$$\begin{aligned} \varphi(B', A') &= (B' : A') : (B'^p : A'^p) = (A : B) : (B^q : A^q) = \psi(A, B); \\ \text{car } (B' : A') &= (A : B), B'^p = B^q, A'^p = A^q \text{ (voir formule 4)}. \end{aligned}$$

26. Dans toutes les discussions précédentes, le symbole A_B était synonyme (voir § 10) de l'implication $(A : B)$; mais il est quelquefois commode de l'employer en d'autres sens. Par

exemple, au lieu de désigner les individus (choses concrètes ou propositions) qui forment une classe A par A_1, A_2, A_3 , etc., nous pouvons les désigner par A_α, A_β , etc., où A_α indique l'individu de la série A_1, A_2, A_3 , etc., pour lequel la proposition α est vraie ; A_β celui pour lequel la proposition β est vraie ; etc. Ainsi A_B^C , qui veut dire $(A_B)^C$, est une proposition dont le sujet est A_B , et le prédicat C. Par exemple, soit $A = \text{animal}$, $P = \text{il est petit}$, $T = \text{il est tué}$. Alors, le symbole $A_P^T = \text{le petit animal est tué}$; tandis que $A_T^P = \text{l'animal tué est petit}$.

Comme je l'ai déjà dit, il est probable que dans le langage primitif (ou les langages primitifs) de l'humanité, chaque mot ou son distinctif était une *proposition*. Supposons, en parlant d'une chose indéfinie et sans nom (appelons-la x), que C veut dire « x est un cerf », que B veut dire « x est brun », et que T veut dire « x a été tué par moi », ou « j'ai tué x ». Alors, C_B^T veut dire « Le cerf brun a été tué par moi », ou « J'ai tué le cerf brun » ; tandis que C_T^B veut dire « Le cerf que j'ai tué est brun », et B_T^C veut dire « L'animal brun que j'ai tué est un cerf ». Ainsi nous voyons comment des propositions primitives, A, B, C, sans sujet et sans prédicat, auraient pu se combiner pour former une proposition complexe A_C^B où la proposition A devient un substantif concret, B un adjectif, A_B le sujet complet, et C le prédicat.

III. — Calcul des limites.

27. Le symbole A^x affirme que le nombre ou fraction A appartient à la classe x , où l'exposant x peut représenter un mot tel que *positif*, *négatif*, *zéro*, *imaginaire*, etc. Le symbole $A^x B^y$ affirme que A appartient à la classe x , et que B appartient à la classe y ; tandis que $A^x + B^y$ affirme que A appartient à la classe x , ou B à la classe y . Dans les exemples qui se présenteront ici nous supposons $u = \text{positif}$, $v = \text{négatif}$, $z = \text{zéro}$, $\omega = \text{imaginaire}$. Par exemple, nous avons $(5 - 3)^u$, $(3 - 5)^v$, $(6 - 6)^z$, $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{-1}\right)^\omega$. Si nous n'admettons que des valeurs *positives* (u) et des valeurs *négatives* (v), excluant les *zéros* et les *imaginaires*, nous aurons les certitudes suivantes :

$$(1) \quad (AB)^u = A^u B^u + A^v B^v; \quad (2) \quad (AB)^v = A^v B^u + A^u B^v.$$

$$(3) \quad (Ax - B)^u = \left\{ A \left(x - \frac{B}{A} \right) \right\}^u = A^u \left(x - \frac{B}{A} \right)^u + A^v \left(x - \frac{B}{A} \right)^v$$

$$(4) \quad (Ax - B)^v = \left\{ A \left(x - \frac{B}{A} \right) \right\}^v = A^v \left(x - \frac{B}{A} \right)^u + A^u \left(x - \frac{B}{A} \right)^v$$

$$(5) \quad (6x^2 - 13x + 6)^u =$$

$$\left\{ 6 \left(x^2 - \frac{13}{6}x + 1 \right) \right\}^u = \left\{ 6 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) \right\}^u =$$

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^u \left(x - \frac{2}{3} \right)^u + \left(x - \frac{3}{2} \right)^v \left(x - \frac{2}{3} \right)^v = \left(x - \frac{3}{2} \right)^u + \left(x - \frac{2}{3} \right)^v$$

$$\text{car } \left(x - \frac{3}{2} \right)^u \text{ implique } \left(x - \frac{2}{3} \right)^u, \text{ et } \left(x - \frac{2}{3} \right)^v \text{ implique } \left(x - \frac{3}{2} \right)^v.$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad (6x^3 - 13x + 6)^v &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^v \left(x - \frac{2}{3}\right)^u + \left(x - \frac{3}{2}\right)^u \left(x - \frac{2}{3}\right)^v \\
 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^v \left(x - \frac{2}{3}\right)^u + \eta \text{ (une impossibilité)}
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans la certitude (5), nous trouvons que x doit être *ou au-dessus* de $\frac{3}{2}$ *ou au-dessous* de $\frac{2}{3}$; et dans la certitude (6) nous trouvons que x doit être entre les limites $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

Si nous admettons les valeurs *positives*, les valeurs *négligées* et les *zéros*, excluant toutes les autres, nous aurons¹ :

$$(7) \quad (AB)^z = A^z + B^z = A^z B^{z^1} + A^{z^1} B^z + A^z B^z$$

$$(8) \quad (Ax - B)^z = A^z B^z + A^{z^1} \left(x - \frac{B}{A}\right)^z$$

$$(9) \quad (Ax - B)^u = A^u \left(x - \frac{B}{A}\right)^u + A^v \left(x - \frac{B}{A}\right)^v + A^z B^v$$

$$(10) \quad (Ax - B)^v = A^v \left(x - \frac{B}{A}\right)^u + A^u \left(x - \frac{B}{A}\right)^v + A^z B^u.$$

Quand nous avons $(x - a)^v$, ou son synonyme $x < a$, nous appelons a une *limite supérieure* de x ; et quand nous avons $(x - a)^u$, ou son synonyme $x > a$, nous appelons a une *limite inférieure* de x .

28. Quand nous avons à parler souvent de plusieurs limites, x_1, x_2, x_3 , etc., d'une variable x , il est commode de les enregistrer dans une *table de référence*, l'une après

1. Le symbole A^{z^1} affirme que A^z est faux; c'est-à-dire il affirme que A n'est pas zéro.

l'autre, dans l'ordre où elles se présentent (voir §§34, 35, 36). Le symbole $x_{m'.n}$, ou son synonyme x_n^m , affirme que x_m est une limite supérieure, et x_n une limite inférieure de x . Le symbole $x_{m'.n'.r.s}$, ou son synonyme $x_{r.s}^{m.n}$, affirme que x_m et x_n sont des limites supérieures, et x_r et x_s des limites inférieures de x .

29. Le symbole $x_{m'}$ (avec l'accent sur l' m) est toujours une proposition, synonyme de $(x - x_m)^v$, qui est synonyme de $x < x_m$; il affirme que la $m^{\text{ième}}$ limite sur notre liste ou table de référence, est une limite *supérieure* de x . Le symbole x_m (sans accent sur l' m) affirme comme proposition que la $m^{\text{ième}}$ limite de x sur notre liste est une limite *inférieure*. Donc $x_m = (x - x_m)^u = (x > x_m)$.

Ainsi ¹ (voir § 30) :

$$x_{m'} = x^m = (x - x_m)^v = (x < x_m)$$

$$x_m = (x - x_m)^u = (x > x_m)$$

$$x_{m'.n} = x_n^m = (x - x_m)^v (x - x_n)^u = (x < x_m) (x > x_n)$$

$$x_{m'.n'.r.s} = x_{r.s}^{m.n} = (x < x_m) (x < x_n) (x > x_r) (x > x_s).$$

30. L'emploi des symboles x^m et x_m tantôt comme propositions, tantôt comme nombres ou quantités, n'amène aucune confusion d'idées; car le *contexte* indique toujours la vraie signification. Par exemple, si nous avons $x_6 = \frac{3}{2}$, $x_7 = \frac{2}{3}$, nous déduisons (voir § 27, exemple 5) :

$$(6x^2 - 13x + 6)^u = x_6 + x_7.$$

1. Les symboles x^m , x_n^m , $x_{r.s}^{m.n}$, etc., comme synonymes respectifs des propositions $x_{m'}$, $x_{m'.n}$, $x_{m'.n'.r.s}$, m'ont été proposés par M. L. Couturat. Ils occupent moins de place, et sont souvent commodes pour d'autres raisons.

Ici nous avons trois propositions, dont chacune emploie le signe d'égalité ou équivalence. Dans les deux premières, puisque $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$ sont des nombres, les symboles x_6 et x_7 représentent aussi des nombres; mais dans la troisième, puisque $(6x^2 - 13x + 6)^u$ est une proposition, les deux termes de la disjonction équivalente, $x_6 + x_7$, sont aussi des propositions; et cette disjonction affirme que x est *ou* au-dessus de $\frac{3}{2}$ *ou* au-dessous de $\frac{2}{3}$.

31. Les opérations de ce calcul sont fondées principalement sur les trois formules suivantes :

$$(1) \quad x^{m.n} = x^m \alpha + x^n \beta$$

$$(2) \quad x_{m.n} = x_m \alpha + x_n \beta$$

$$(3) \quad x_n^m = x_n^m (x_m - x_n)^u.$$

Dans les deux premières formules, le symbole α affirme que x_m est *la limite la plus proche*, et le symbole β que x_n est la limite la plus proche (voir §§ 33, 35, 36). C'est-à-dire, dans la première formule, $\alpha = (x_m - x_n)^v$, $\beta = (x_n - x_m)^v$; tandis que dans la seconde, $\alpha = (x_m - x_n)^u$, $\beta = (x_n - x_m)^u$. De la même manière on trouve ¹ :

$$(4) \quad x^{m.n.r} = x^m \alpha + x^n \beta + x^r \gamma$$

$$(5) \quad x_{m.n.r} = x_m \alpha + x_n \beta + x_r \gamma$$

Dans la formule (4) :

$$\alpha = (x_m - x_n)^v (x_m - x_r)^v, \beta = (x_n - x_m)^v (x_n - x_r)^v, \text{ etc.}$$

1. Il ne faut pas oublier que, dans toutes ces formules, les symboles x^m , x_m , x^n , x_n , etc., représentent des *propositions* et non des nombres.

Dans la formule (5) :

$$\alpha = (x_m - x_n)^u (x_m - x_r)^u, \beta = (x_n - x_m)^u (x_n - x_r)^u, \text{ etc.}$$

et ainsi de suite pour n'importe combien de limites, supérieures ou inférieures.

32. La limite *zéro* se présente si souvent, qu'au lieu de la représenter par x_1 , ou x_2 , ou x_3 , etc., comme d'autres limites, il est commode de la représenter par un symbole x_0 ou y_0 ou z_0 , etc., selon la variable en question. Ainsi le symbole x_0 comme *limite* est synonyme de *zéro*; mais, comme *proposition*, x_0 est synonyme de x^u , et affirme que x est *positif*. Pareillement, x_0^v , ou son synonyme x^v , affirme que *zéro* est une *limite supérieure* de x ; c'est-à-dire, que x est *négatif*. Il est à noter que l'exposant 0 dans ce cas n'a pas du tout le même sens que dans les définitions précédentes (voir §§ 12 et 19). C'est seulement dans le calcul des *limites*, et quand il y a une *table de référence*, que x^0 est synonyme de x^v , et affirme que x est négatif. Dans les autres cas, x^0 affirme que x est *zéro*, c'est-à-dire *non-existant*.

33. Comme exemple géométrique des formules du § 31, prenons le diagramme (*Fig. 9*). Supposons que les équations $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $y = \varphi_3(x)$ soient vraies pour chaque point sur les courbes y_1 , y_2 , y_3 respectivement; que $y = 0$ soit vraie pour les points sur la ligne droite y_0 ; et que $x = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, $x = x_4$ soient vraies pour les lignes droites x_1 , x_2 , x_3 , x_4 respectivement. Il est évident que (avec les conventions habituelles à l'égard des directions positives ou négatives) la proposition $y_0^{1,2,3} x_0^4$ est

applicable à tout point qui se trouve sur la surface ombrée, et à aucun point hors de cette surface (voir § 32). Il est évident aussi que :

$$y_0^{1,2,3} x_0^4 = y_0^1 x_0^4 + y_0^2 x_1^3 + y_0^3 x_2^4$$

car la proposition $y_0^1 x_0^4$ est vraie pour tout point de la surface limitée par les lignes y_1, y_0, x_1, x_0 ; la proposition $y_0^2 x_1^3$

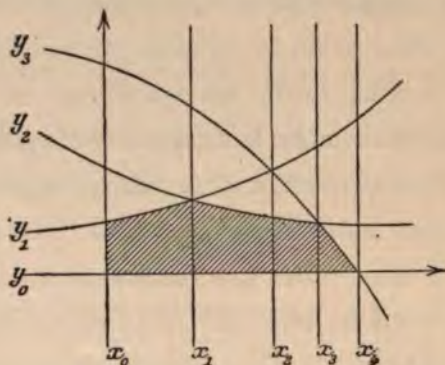


Fig. 9.

est vraie pour tout point de la surface limitée par les lignes y_2, y_0, x_2, x_1 ; et la proposition $y_0^3 x_2^4$ est vraie pour tout point de la surface limitée par les lignes y_3, y_0, x_1, x_2 ; et ces trois surfaces ensemble forment la surface totale contenant tous les points pour lesquels séparément la proposition $y_0^{1,2,3} x_0^4$ est vraie. Il est à remarquer que $x_2^3 + x_1^2 = x_1^3$, de sorte que la limite x_2 disparaît.

34. Avant de donner des exemples de l'application de cette méthode à des problèmes qui relèvent du Calcul intégral, je vais expliquer certains symboles d'abréviations que j'ai employés pour la première fois, il y a seize ans,

dans mon mémoire sur *The Limits of Multiple Integrals*¹.

Les symboles $\varphi(x)_{m,n}$ et $x_{m,n} \varphi(x)$ diffèrent en signification. Le premier est synonyme de l'intégrale $\int_{x_n}^{x_m} \varphi(x) dx$; tandis que le second est synonyme de $\varphi(x_m) - \varphi(x_n)$. Par exemple, soit $\int \varphi(x) dx = \psi(x)$. D'après la convention proposée, nous aurons :

$$\varphi(x) x_{m,n} = x_{m,n} \psi(x) = \psi(x_m) - \psi(x_n).$$

Supposons, par exemple, que nous ayons à évaluer (voir § 32) l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_0}^{x_1} dx$, les limites étant

TABLE DE RÉFÉRENCE

$z_1 = y$	$y_1 = x$	$x_1 = a$
$z_2 = c$	$y_2 = b$	$x_0 = 0$

données comme dans la table ci-jointe. Le procédé, très détaillé, est le suivant (voir § 32)².

$$\begin{aligned} \text{Intégrale } z_{1,2} y_{1,2} x_{1,0} &= (z_1 - z_2) y_{1,2} x_{1,0} = (y - c) y_{1,2} x_{1,0} \\ &= y_{1,2} \left(\frac{1}{2} y^2 - cy \right) x_{1,0} = \left\{ \left(\frac{1}{2} y_1^2 - cy_1 \right) - \left(\frac{1}{2} y_2^2 - cy_2 \right) \right\} x_{1,0} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2} x^2 - cx \right) - \left(\frac{1}{2} b^2 - cb \right) \right\} x_{1,0} = \left(\frac{1}{2} x^2 - cx - \frac{1}{2} b^2 + bc \right) x_{1,0} \\ &= x_{1,0} \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} cx^2 - \frac{1}{2} b^2 x + bcx \right) = \frac{1}{6} a^3 - \frac{1}{2} ca^2 - \frac{1}{2} b^2 a + bca. \end{aligned}$$

1. Voir les *Proceedings of the London Mathematical Society* (13 nov. 1884).

2. Quand le symbole $x_{m,n}$ exprime (comme ici) une *intégrale* à évaluer, et non une *proposition*, on peut laisser l'accent sous-entendu; mais dans ce cas, $x_{m,n}$ ne sera pas synonyme de $x_{n,m}$, mais de $-x_{n,m}$. (Voir § 38.)

35. Comme exemple de ce calcul, prenons le problème suivant : Chacune des trois variables x, y, z est prise au hasard entre 1 et 0; trouver la probabilité que la fraction $\frac{z(1-x-y)}{1-y-yz}$ soit aussi entre 1 et 0.

Solution : Supposons que le symbole Q affirme que l'événement en question arrivera, et que A affirme nos données, à savoir que x, y, z sont chacun entre 1 et 0.

TABLE DE RÉFÉRENCE

$x_1 = 1$	$y_1 = 1$	$z_1 = 1$
$x_2 = 1 - y$	$y_2 = \frac{1}{1+z}$	
$x_3 = \frac{y+z-1}{z}$	$y_3 = 1 - z$	

Nous avons à trouver la probabilité $\frac{Q}{A}$. Cette probabilité est évidemment une fraction dont le numérateur est l'intégrale $\int dx \int dy \int dz$ limitée par la condition QA, et le dénominateur la même intégrale limitée seulement par la condition A. Or, $A = x_0^1 y_0^1 z_0^1$, de sorte que l'intégrale $A \int dx \int dy \int dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 1$.

Donc $\frac{Q}{A} = AQ \int dx \int dy \int dz$, et nous n'avons qu'à trouver les limites compatibles avec la condition AQ.

Soit N le numérateur $z(1-x-y)$, et soit D le dénominateur $1-y-yz$. Alors (voir § 27) :

$$Q = N^u D^v (N-D)^v + N^v D^v (N-D)^u.$$

Nous pouvons prendre l'ordre de variation que nous voudrons. Prenons l'ordre x, y, z ; et exprimons d'abord les limites de x en termes de y et de z ; puis les limites de y en termes de z ; et finalement les limites de z numériquement. Chaque limite doit être enregistrée dans la *table de référence* sitôt qu'elle sera trouvée, de sorte que la table se développe au courant de l'opération. Puisque z est positif ¹ :

$$\begin{aligned} N^u &= (1 - x - y)^u = \{x - (1 - y)\}^v = (x - x_1)^v = x^3, N^v = x_1 \\ D^u &= (1 - y - yz)^u = \{y(1 + z) - 1\}^v = (y - y_1)^v = y^3, D^v = y_1 \\ (N - D)^v &= (z - zx + y - 1)^v = (zx - y - z + 1)^u = \left(x - \frac{y + z - 1}{z}\right)^u = x_2 \\ (N - D)^u &= (z - zx + y - 1)^u = x^3. \end{aligned}$$

En substituant ces résultats dans notre expression pour Q , nous aurons :

$$Q = x^3 y^3 x_2 + x_2 y_1 x^3 = x_2^3 y^3 + x_2^3 y_1.$$

En multipliant par la certitude (ou donnée) x_0^1 , nous aurons :

$$Q x_0^1 = x_{2,0}^{3,1} y^3 + x_{2,0}^{3,1} y_1$$

En appliquant les deux formules du § 31, nous trouvons (voir §§ 3 et 32) ² :

$$\begin{aligned} x^{3,1} &= x^3 (x_2 - x_1)^v + x^1 (x_1 - x_2)^v = x^3 \epsilon + x^1 \eta = x^3 \\ x_{2,0} &= x_2 (x_2 - x_0)^u + x_0 (x_0 - x_2)^u = x_2 y_3 + x_0 y^3 \end{aligned}$$

1. Il ne faut pas oublier que x^n et x_n comme *propositions* veulent dire respectivement $x_n > x$ et $x_n < x$. (Voir § 30.) Le symbole ϵ désigne une *certitude*, et η une *impossibilité*.

2. Mais il est évident (sans avoir recours au § 31) que $x^{3,1} = x^3$, et que $x_{2,0} = x_2$, puisque x^3 implique x^1 et que x_2 implique x_0 , par simple inspection de la table de référence.

$$x^{3,1} = x^3 (x_3 - x_1)^v + x^1 (x_1 - x_3)^v = x^3 \varepsilon + x^1 \eta = x_3$$

$$x_{2,0} = x_2 (x_2 - x_0)^u + x_0 (x_0 - x_2)^u = x_2 \varepsilon + x_0 \eta = x_2.$$

En substituant ces résultats dans l'expression pour $Q x_0^1$, nous aurons :

$$Q x_0^1 = x^2 (x_3 y_3 + x_0 y^3) y^2 + x_2^3 y_2 = x_3^2 y_3^2 + x_0^2 y^{3,2} + x_2^3 y_2.$$

Nous devons maintenant appliquer la formule 3 du § 31 aux propositions x_2^2, x_0^2, x_2^3 . Mais $(x_2 - x_3)^u = y^2$, $(x_2 - x_0)^u = \varepsilon$ (une *certitude*), et $(x_3 - x_2)^u = y_2$; de sorte que l'application de cette formule n'introduit aucune nouvelle limite en y , et ne supprime aucun terme en le prouvant impossible. Nous avons donc trouvé toutes les limites de x , et nous devons maintenant trouver les limites de y . En multipliant par la donnée y_0^1 , nous aurons :

$$Q x_0^1 y_0^1 = x_3^2 y_{3,0}^{3,1} + x_0^2 y_0^{3,2,1} + x_2^3 y_{2,0}^1.$$

En appliquant les formules du § 31, ou par simple inspection de la table de référence, nous trouvons :

$$y^{2,1} = y^2, \quad y_{3,0} = y_3, \quad y^{3,2,1} = y^3, \quad y_{2,0} = y_2$$

et, en substituant ces résultats dans le second membre nous aurons :

$$Q x_0^1 y_0^1 = x_3^2 y_3^2 + x_0^2 y_0^3 + x_2^3 y_2^1.$$

L'application de la formule $y_n^m = y_n^m (y_m - y_n)^u$ n'introduit aucune nouvelle limite en ε , et ne supprime aucun terme en le prouvant impossible. Nous avons donc trouvé toutes les

limites de y , et il ne reste qu'à trouver les limites de z . En multipliant par la donnée z_0^1 , nous aurons :

$$QA = Qx_0^1 y_0^1 z_0^1 = (x_3^2 y_3^2 + x_0^2 y_0^2 + x_2^2 y_2^2) z_0^1.$$

L'application de la formule 3 du § 31 au facteur z_0^1 ne produit aucun changement, puisque $(z_1 - z_0)^u$ est une certitude formelle. Le procédé pour trouver les limites est donc fini. Il reste à évaluer les trois intégrales simples dont la somme est $QA \int dx \int dy \int dz$ (voir § 34). Le résultat est $\frac{5}{4} - \log \text{nép. } 2$, qui est un peu supérieur à $\frac{5}{9}$.

36. Le problème suivant¹ est un peu plus compliqué : Étant donné que a est positif, que n est un nombre entier et positif, et que les variables x et y sont prises chacune au hasard entre a et $-a$, quelle est la probabilité que $(x + y)^n - a$ soit négatif et $(x + y)^{n+1} - a$ positif ?

Solution : Soit A notre donnée $y_2^1 x_2^1$ (voir la table de référence) qui affirme que y et x sont entre a et $-a$; soit Q la proposition $\{(x + y)^n - a\}^v$, et R la proposition $\{(x + y)^{n+1} - a\}^u$, les exposants u et v ayant les mêmes significations que dans les conventions précédentes. Nous avons à trouver la probabilité $\frac{QR}{A}$. Puisque toutes les valeurs, positives ou négatives, de y et de x entre a et $-a$ sont également probables, la probabilité demandée est $\frac{QRA \int dy \int dx}{A \int dy \int dx}$; et nous n'avons

1. C'est encore un problème de probabilité; mais il est évident que la méthode est aussi applicable à d'autres espèces de problèmes.

qu'à trouver les limites d'intégration. Cette fois-ci nous prendrons l'ordre de variation y, x .

TABLE DE RÉFÉRENCE

$y_1 = a$	$x_1 = a$	$a_1 = 1$
$y_2 = -a$	$x_2 = -a$	$a_2 = \frac{1}{2^{\frac{n}{n-1}}}$
$y_3 = a^{\frac{1}{n}} - x$	$x_3 = a^{\frac{1}{n}} - a$	$a_3 = \frac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}}$
$y_4 = -a^{\frac{1}{n}} - x$	$x_4 = a - a^{\frac{1}{n}} = -x_3$	
$y_5 = a^{\frac{1}{n+1}} - x$	$x_5 = a + a^{\frac{1}{n+1}}$	
$y_6 = -a^{\frac{1}{n+1}} - x$	$x_6 = a + a^{\frac{1}{n}}$	
	$x_7 = a^{\frac{1}{n+1}} - a$	
	$x_8 = -a - a^{\frac{1}{n+1}} = -x_5$	
	$x_9 = a - a^{\frac{1}{n+1}} = -x_7$	

Supposons d'abord que n soit un nombre pair. Alors,

$$Q = \left\{ (x+y) - a^{\frac{1}{n}} \right\}^v \left\{ (x+y) + a^{\frac{1}{n}} \right\}^u =$$

$$\left\{ y - (a^{\frac{1}{n}} - x) \right\}^v \left\{ y + (a^{\frac{1}{n}} + x) \right\}^u = y_4^3,$$

$$R = \left\{ (x+y) - a^{\frac{1}{n+1}} \right\}^u = \left\{ y - (a^{\frac{1}{n+1}} - x) \right\}^u = y_5.$$

Donc $QR = y_{4,5}^4$; et en multipliant par la donnée y_2^1 (car $A = y_2^1 x_2^1$) nous aurons :

$$QRy_2^1 = y_{2,4,5}^{3,1} = (y^3 x_3 + y^4 x) (y_2 x_{4,5} + y_5 x^5)$$

$$= (y^3 x_3 + y^4 x^3) (y_2 x_5 + y_5 x^5), \quad (\text{car } x_{4,5} = x_5)$$

$$= y_2^3 x_5 + y_5^3 x_3^5 + y_5^4 x^3 \quad (\text{car } x_{5,3} = x_5, x_5^3 = x, x^{3,5} = x^3).$$

Maintenant nous devons appliquer la formule 3 du § 31 aux

expressions en y . Ainsi, $y_2^3 = y_2^2 x^6$, $y_5^2 = y_5^2 a_1$, $y_5^4 = y_5^4 x_7$.
En substituant ces résultats, nous aurons :

$$QRy_2^4 = y_2^3 x_5^6 + y_5^3 x_3^5 a_1 + y_5^4 x_7^3.$$

Nous avons maintenant trouvé les limites de la variable y ;
et nous devons appliquer les formules 1, 2, 3 du § 31 aux
expressions en x . En multipliant par la donnée x_2^1 , nous
trouvons :

$$QRy_2^4 x_2^1 = y_2^3 x_{5,2}^{4,6} + y_5^3 x_{3,2}^{4,5} a_1 + y_5^4 x_{7,2}^{3,4} = y_5^3 x_3^4 a_1 + y_5^4 x_7^{3,4}$$

Car $x_5^4 = \eta$ (une impossibilité); $x^{1,5} = x^1$, $x_{3,2} = x_2$, $x_{7,2} = x_7$.
On arrive à ces résultats tout de suite par simple inspection
de la table de référence, sans être obligé d'employer les for-
mules du § 31. En appliquant ces formules aux expressions
en x qui restent, nous trouvons :

$$x^{3,1} = x^3 a_2 + x^1 a^2, \quad x_2^1 = x_3^1 a_2, \quad x_7^3 = x_7^3 a_1, \quad x_7^4 = x_7^4 a_3.$$

En substituant ces valeurs, il vient :

$$\begin{aligned} QRy_2^4 x_2^1 &= QRA = y_5^3 x_3^4 a_{1,2} + y_5^4 (x_7^3 a_{2,4} + x_7^4 a_3^2) \\ &= y_5^3 x_3^4 a_1 + y_5^4 x_7^3 a_1 (y_5^3 x_3^4 + y_5^4 x_7^3) a_1; \end{aligned}$$

car

$$a_{1,2} = a_1 = a_{2,1}, \quad \text{et} \quad a_3^2 = \eta \text{ (une impossibilité)}$$

C'est là la démarche finale pour trouver les limites; et le
résultat nous apprend que, *quand n est un nombre pair*,
QRA n'est possible que dans le cas où a_1 est une limite infé-
rieure de a . Autrement dit, quand n est un nombre pair, et
que a n'est pas > 1 , la probabilité de QR est *zéro*. Pour

trouver la probabilité quand n est un nombre pair et $a > 1$, on n'a qu'à évaluer les intégrales, en employant la notation et la méthode du § 31 :

$$\begin{aligned} \text{Int A} &= \text{int } y_{1,2} x_{1,2} = (y_1 - y_2) x_{1,2} = (2a) x_{1,2} = x_{1,2} (2a) x = 4a^2 \\ \text{int QRA} &= y_{3,5} x_{1,3} + y_{4,5} x_{3,7} = (y_3 - y_5) x_{1,3} + (y_4 - y_5) x_{3,7} \\ &= (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) x_{1,3} + (a - a^{\frac{1}{n+1}} + x) x_{3,7} \\ &= x_{1,3} (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) x + x_{3,7} (ax - a^{\frac{1}{n+1}} x + \frac{1}{2} x^2) \\ &= (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) (x_1 - x_3) + (a - a^{\frac{1}{n+1}}) (x_3 - x_7) + \frac{1}{2} (x_3^2 - x_7^2) \\ &= (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) \left(2a - \frac{1}{2} a^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} a^{\frac{1}{n+1}} \right) \\ \frac{\text{int QRA}}{\text{int A}} &= \frac{\text{int QRA}}{4a^2} = \frac{1}{8a^2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) (4a - a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) = \frac{\text{QR}}{\text{A}} \end{aligned}$$

Il reste à trouver la probabilité quand n est un nombre *impair*. Par le même procédé qu'avant nous trouvons :

$$\text{QRA} = (y_5^3 x_3^4 + y_5^4 x_7^3) a_1 + y_2^6 x_2^9 a_3.$$

Ici nous avons *deux* limites inférieures de a , de sorte que le procédé n'est pas encore fini. Pour séparer les différents cas possibles, il faut multiplier le résultat obtenu par la certitude¹ $(a_1 + a^4)(a_3 + a^3) = a_1 + a_3^4 + a^3$ (puisque $a_1 > a_3$). En représentant le coefficient de a_1 par M_1 , et celui de a_3 par M_3 , nous aurons :

$$\text{QRA} = (M_1 a_1 + M_3 a_3) (a_1 + a_3^4 + a^3) = (M_1 + M_3) a_1 + M_3 a_3^4;$$

car $a_{1,2} = a_1$, et $a_4^3 = \gamma$ (une impossibilité). Donc il n'y a que

1. Je dis « certitude », parce que la probabilité que x ou y soit *exactement* a_1 ou a_3 (au lieu d'être au-dessus ou au-dessous) est infinitésimale.

deux cas possibles quand n est un nombre *impair* : le cas a_1 (c'est-à-dire $a > 1$), et le cas a_2^1 . Pour le dernier, a_2^1 :

$$\frac{QR}{A} = \frac{\text{int } M_3}{\text{int } A} = \frac{1}{8a^2} \left(2a - a^{\frac{1}{n+1}} \right)^2.$$

Pour le premier cas, où $a > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{QR}{A} &= \frac{\text{int}(M_1 + M_2)}{\text{int } A} \\ &= \frac{1}{4a^2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) (2a - a^{\frac{1}{n}}) + \frac{1}{8a^2} \left(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}} \right)^2 + \frac{1}{8a^2} \left(2a - a^{\frac{1}{n+1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Pour le cas $a < a_3$, la probabilité est *zéro*.

37. L'avantage principal de cette méthode de trouver les limites est qu'elle est indépendante de tout diagramme, et que, par conséquent, on peut l'appliquer avec un succès certain, non seulement à des expressions de deux ou trois variables, mais aussi à des expressions de quatre ou plusieurs variables. Quand il n'y a que deux variables, une méthode graphique est souvent plus expéditive, pourvu qu'on n'ait affaire qu'à des lignes droites, ou à des courbes bien connues et faciles à tracer, comme le cercle, la parabole, etc. Mais une méthode graphique de trouver les limites est, en général, difficile quand il y a trois variables, et impossible quand il y en a quatre.

38. Dans mon mémoire sur *The Limits of Multiple Integrals*¹, on trouvera plusieurs méthodes pour abréger et simplifier ce calcul de limites. Par exemple, *quelles que*

1. Publié dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. XVI (13 nov. 1884).

soient les limites désignées par les symboles, l'intégrale à trois termes :

$$z_{3',0} y_{3',0} x_{1',3} + z_{1',0} y_{1',3} x_{1',3} + z_{3',0} y_{1',0} x_{3',0}$$

équivalent à l'intégrale

$$z_{2',0} y_{1',0} x_1 - z_{2',1} y_{3',1} x_{3',1},$$

qui ne contient que deux termes, et qui sera, en général, plus facile à évaluer. Ces simplifications sont fondées sur les formules :

$$\begin{aligned} (1) \quad x_{m',n} &= -x_{n',m}, & (2) \quad x_{m',n} &= x_{m',r} + x_{r',n}, \\ (3) \quad x_{m',n} + x_{r',s} &= x_{m',s} + x_{r',n}, & (4) \quad x_{m',n} x_{r',s} &= x_{n',m} x_{s',r}, \end{aligned}$$

mais, en général, elles peuvent être effectuées plus facilement par une méthode graphique, dont on trouvera l'explication dans le mémoire précité.

Conclusion.

Si je me suis abstenu de tout commentaire sur les recherches de mes confrères, ce n'est pas parce que je n'en reconnais pas l'importance, mais simplement parce que je n'ai pas encore pu leur consacrer l'attention et l'étude qu'elles méritent. Celles qui ne sont écrites ni en français ni en anglais me sont inaccessibles sans l'aide d'un traducteur; je n'en suis pas moins reconnaissant aux auteurs étrangers qui ont eu l'amabilité de m'envoyer des copies de leurs travaux¹. En comparant les avantages de différentes

1. Si ces mémoires étaient écrits dans une langue internationale possédant la merveilleuse simplicité de l'*Esperanto* (dont j'ai tout récemment appris les principes), je n'hésiterais pas à consacrer à cette langue les quelques semaines nécessaires pour l'apprendre.

méthodes, on trouve souvent qu'une méthode A résout facilement certains problèmes qu'une autre méthode B ne résout pas, ou résout difficilement; tandis que pour d'autres problèmes c'est la méthode B qui a l'avantage. Mon but a été surtout d'adapter mes méthodes aux problèmes de probabilités et de limites, à cause de l'importance de ces problèmes dans beaucoup de recherches scientifiques. C'est, en effet, à un problème de ce genre qu'est due l'origine de mon système symbolique; et c'est encore dans son application à ces espèces de problèmes qu'on peut le mieux en voir l'utilité¹.

1. On en trouvera des exemples assez nombreux dans les articles que j'ai publiés à différentes époques depuis 1877 dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, dans le *Mind*, et dans les *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*. Voir l'histoire du développement de ces méthodes dans les *Memoirs of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 3^e série, t. VII.

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS LOGIQUES

Par W. E. JOHNSON,

Professeur à l'Université de Cambridge.

Introduction.

Le but de ce mémoire est de résoudre l'équation générale à n inconnues en fonction d'un nombre égal n de termes arbitraires, et de donner à la solution l'espèce de symétrie dont elle est capable.

Ainsi, x, y, z étant les inconnues, et u, v, w étant arbitraires, la solution est exprimée par :

$$x = f_x(u, v, w), \quad y = f_y(u, v, w), \quad z = f_z(u, v, w).$$

La méthode adoptée consiste à résoudre, non plus directement par rapport aux inconnues x, y, z elles-mêmes, mais par rapport à leurs divers constituants, à savoir :

$$xyz, xy\bar{z}, x\bar{y}z, \text{ etc.}$$

Or la seule condition (en dehors de l'équation donnée) que ces constituants doivent vérifier est qu'ils soient « mutuellement exclusifs » et « collectivement exhaustifs ».

tifs »; c'est-à-dire que, si $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ sont de tels constituants, on doit avoir :

$$\Sigma \rho_i = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma \rho_i \rho_j = 0.$$

Quand ces relations sont vérifiées, on n'a qu'à additionner convenablement ces termes pour trouver les inconnues x, y, z elles-mêmes.

Or cela m'a suggéré une généralisation du problème, où l'on n'est plus restreint à 2^n constituants obtenus par l'intersection de n classes et de leurs suppléments, mais où l'on peut considérer m constituants qui satisfont simplement aux deux conditions d'être mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs.

La théorie suivante peut s'appliquer immédiatement au cas ordinaire de 2^n constituants. Cela fait, l'*addition* des termes $xyz, \bar{x}yz, x\bar{y}z$, etc., destinée à fournir x introduit une certaine *obliquité* dans la solution finale. Une bonne partie de mon travail a été consacrée à montrer comment on peut éliminer cette obliquité de manière à faire ressortir un certain principe de symétrie. Mais ce travail est trop détaillé et trop mathématique pour trouver place dans le présent mémoire.

Je dois ici exprimer les obligations spéciales que j'ai au professeur SCHRÖDER, dont le grand ouvrage¹ m'a excité pendant plusieurs années à rechercher la solution complète des problèmes qu'il avait suggérés, et dont j'ai adopté les méthodes générales et la notation. Je dois dire aussi

1. *Algebra der Logik*, 3 vol. (Leipzig, Teubner, 1890-1895).

combien M. WHITEHEAD¹, par son ouvrage sur l'*Algèbre universelle* et par ses conversations, m'a aidé à élaborer cette branche de l'Algèbre de la logique.

§ 1. *Diviseurs.*

1. Considérons l'Univers du discours comme divisé en un nombre arbitraire de régions $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ qui vérifient les relations fondamentales :

$$\Sigma \rho_i = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma \rho_i \rho_j = 0.$$

Un système de régions vérifiant ces conditions s'appellera un *système de diviseurs*².

2. On peut aussitôt énoncer les propositions élémentaires suivantes :

N'importe quelle région a peut s'écrire sous la forme :

$$a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_3 + \dots$$

où les ρ ont été choisis arbitrairement, et peuvent être regardés comme des éléments de référence. En ce sens, on peut appeler les coefficients $a_1, a_2, a_3, \dots$ les *coordonnées* de la région donnée par rapport aux éléments de référence $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$. Mais ces coordonnées ne sont pas déterminées pour la région donnée a . Car il suffit que $a_1, a_2, a_3, \dots$ vérifient respectivement les équations :

$$a_1 \rho_1 = a \rho_1, \quad a_2 \rho_2 = a \rho_2, \quad a_3 \rho_3 = a \rho_3, \dots$$

1. *A Treatise on Universal Algebra, with Applications*, t. I (Cambridge, University Press, 1898).

2. En anglais : *divisional*. Bien entendu, ce sens du mot *diviseur* n'a aucune analogie avec son sens arithmétique (*Note du traducteur*).

dont les solutions en $a_1, a_2, a_3, \dots$ ne sont pas déterminées. Il sera donc possible de limiter les coefficients $a_1, a_2, a_3, \dots$ de manière qu'ils vérifient certaines autres conditions, tout en restant capables d'exprimer n'importe quelle région assignable par rapport aux éléments de référence donnés. Nous y reviendrons plus loin.

Équations aux diviseurs.

3. Le *supplément* d'une région quelconque $\Sigma a\rho$ est $\bar{\Sigma}a\rho$.

Ainsi une équation quelconque, par exemple :

$$a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + a_3\rho_3 + \dots = b_1\rho_1 + b_2\rho_2 + b_3\rho_3 + \dots$$

est réductible à :

$$1 = (a_1 b_1 + \bar{a}_1 \bar{b}_1) \rho_1 + (a_2 b_2 + \bar{a}_2 \bar{b}_2) \rho_2 + \dots$$

ou à :

$$0 = (a_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_1 b_1) \rho_1 + (a_2 \bar{b}_2 + \bar{a}_2 b_2) \rho_2 + \dots$$

4. Trouver la résultante de l'élimination des ρ dans une équation quelconque.

De l'équation :

$$1 = \Sigma a\rho$$

on déduit immédiatement :

$$1 = \Sigma a$$

par la règle générale suivant laquelle Σa est un facteur de Σab .

Il s'agit de montrer que l'équation :

$$1 = \Sigma a \quad (1)$$

est la résultante *complète* de l'équation :

$$1 = \Sigma a\rho \quad (2)$$

c'est-à-dire que, étant donnée l'équation (1), il est toujours possible de trouver un système de valeurs des ρ qui vérifie l'équation (2).

Posons en effet :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a_1 \\ \rho_2 &= \bar{a}_1 a_2 \\ \rho_3 &= \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 \\ \rho_4 &= \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 a_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Alors :

$$\Sigma a\rho = \Sigma a = 1$$

en vertu de la résultante supposée. Par suite, l'équation (2) est vérifiée. Et les ρ forment un système de diviseurs, puisque l'on a évidemment :

$$\Sigma \rho_1 = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma \rho_1 \rho_2 = 0.$$

La solution *particulière* précédente ne contient aucune constante arbitraire; on peut donc l'appeler une solution *singulière*. De plus, comme chacun des ρ est exprimé par un seul terme, on peut l'appeler une solution *singulière monomiale*.

5. On peut observer que l'équation (2) équivaut au système d'équations simultanées :

$$\rho_1 \leq a_1, \quad \rho_2 \leq a_2, \quad \rho_3 \leq a_3, \dots$$

ou :

$$\rho_1 = a_1 \rho_1, \quad \rho_2 = a_2 \rho_2, \quad \rho_3 = a_3 \rho_3, \dots$$

En effet, étant donné que $\Sigma p = 1$, on déduit de ces équations que $\Sigma ap = 1$. Et réciproquement, de :

$$\Sigma ap = 1$$

on déduit :

$$p_r = a_r p_r$$

puisque :

$$p_r p_r = 0.$$

6. Trouver toutes les solutions singulières d'une équation.

Prenons l'équation à m diviseurs :

$$1 = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \dots + a_r p_r + \dots + a_m p_m.$$

Considérons l'un quelconque des constituants des a_i , par exemple :

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_r \bar{a}_{r+1} \bar{a}_{r+2} \dots \bar{a}_m$$

Ce constituant doit être contenu dans *un* et *un seul* des r diviseurs $p_1, p_2, \dots, p_r$. En effet, il ne peut être contenu dans $p_{r+1}, \dots$, car :

$$p_{r+1} \nsubseteq a_{r+1} \dots$$

Il ne peut pas non plus être contenu dans *deux* des diviseurs, par exemple p_1, p_2 , car :

$$p_1 p_2 = 0.$$

Et il faut bien qu'il soit contenu dans *un* des diviseurs, car :

$$\Sigma p = 1.$$

Ainsi chaque constituant semblable peut occuper r places différentes parmi les solutions singulières de l'équation.

Par conséquent, si l'on forme les diverses combinaisons r à r et qu'on fasse varier r de 1 à m , de manière à comprendre tous les constituants des a , on trouve que le nombre des solutions singulières de l'équation :

$$1 = \sum_{r=1}^m a_r \rho_r$$

est :

$$\Pi_{r=1}^m \left(\sum_{r=1}^m C_r^m \right)$$

où C_r^m est le nombre des combinaisons de m objets r à r .

7. On peut toujours écrire immédiatement un système monomial de solutions singulières.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a_1 \\ \rho_2 &= \bar{a}_1 a_2 \\ \rho_3 &= \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 \\ \rho_4 &= \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 a_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Car on a :

$$\Sigma \rho = \Sigma a \rho = \Sigma a = 1,$$

et les ρ sont évidemment exclusifs les uns des autres.

Il y a donc 1. 2. 3.... m solutions singulières monomiales.

Ces solutions monomiales forment la base de la recherche d'un système de solutions à symétrie oblique, dont nous ne donnerons pas les détails dans ce mémoire.

8. Trouver la solution d'une équation contenant un nombre surabondant d'arbitraires.

Soit l'équation :

$$1 = \sum_{r=1}^m a_r \rho_r.$$

$$(1) \begin{cases} q_1 = t_{11}\theta_1 + t_{12}\theta_2 + t_{13}\theta_3 + \dots + t_{18}\theta_8 \\ q_2 = t_{21}\theta_1 + t_{22}\theta_2 + t_{23}\theta_3 + \dots + t_{28}\theta_8 \\ q_s = t_{s1}\theta_1 + t_{s2}\theta_2 + t_{s3}\theta_3 + \dots + t_{s8}\theta_8 \\ \vdots \\ q_8 = t_{81}\theta_1 + t_{82}\theta_2 + t_{83}\theta_3 + \dots + t_{88}\theta_8 \end{cases}$$

Ce qu'on peut abréger comme suit :

$$(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = |t_{11}, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{1n}| (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$$

Dans cette notation, il faut remarquer que le *premier* indice de chaque t est celui du q correspondant, tandis que le *second* est celui du θ correspondant.

10. Trouver la condition pour que le système précédent de relations simultanées transforme le système des q en un système de diviseurs, pour *tout système arbitraire* de valeurs attribuées aux *diviseurs* θ .

Puisque les q doivent être diviseurs pour tout système arbitraire de valeurs *divisorales* des θ , on peut évaluer successivement à 1 les divers θ . Alors la condition requise est que les t de chaque colonne forment un système de diviseurs, c'est-à-dire que, pour chaque valeur du second indice s , on ait :

$$(\sum_r t_r)_s = 1 \quad \text{et} \quad (\sum_r t_r t_{r'})_s = 0$$

11. Réduire le système précédent d'équations simultanées à une seule équation, quand les θ sont arbitraires et les q sont des diviseurs.

Les équations se réduisent à celle-ci :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} = & q_1 (t_{11} \theta_1 + t_{12} \theta_2 + t_{13} \theta_3 + \dots) \\ & + q_2 (t_{21} \theta_1 + t_{22} \theta_2 + t_{23} \theta_3 + \dots) \\ & + q_3 (t_{31} \theta_1 + t_{32} \theta_2 + t_{33} \theta_3 + \dots) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

En effet, en multipliant cette équation par q_1 par exemple, on trouve :

$$q_1 = q_1 (t_{11} \theta_1 + t_{12} \theta_2 + t_{13} \theta_3 + \dots)$$

puisque les q sont mutuellement exclusifs.

Et en la multipliant par $t_{11} \theta_1 + t_{12} \theta_2 + t_{13} \theta_3 + \dots$, on trouve :

$$t_{11} \theta_1 + t_{12} \theta_2 + t_{13} \theta_3 + \dots = q_1 (t_{11} \theta_1 + t_{12} \theta_2 + t_{13} \theta_3 + \dots)$$

puisque les t et les θ sont mutuellement exclusifs.

Donc, de l'équation *unique* (2) on déduit :

$$q_1 = t_{11} \theta_1 + t_{12} \theta_2 + t_{13} \theta_3 + \dots$$

et les autres équations du système (1). Réciproquement, puisque les q sont exhaustifs, du système (1) on déduit (par addition) l'équation *unique* (2). Donc l'équation unique (2) équivaut au système d'équations simultanées (1).

12. Trouver les conditions de la réciproque, à savoir pour que, les q étant exprimés comme précédemment en fonction des θ , on puisse exprimer les θ en fonction des q pour tout système de valeurs assigné aux q .

On vient de réduire le système d'équations simultanées à une équation unique. On n'a plus alors qu'à éliminer les θ de cette équation, en regardant les θ comme inconnues. La résultante demandée est :

$$1 = (t_{11} + t_{12} + t_{13} + \dots) q_1 + (t_{21} + t_{22} + t_{23} + \dots) q_2 \\ + (t_{31} + t_{32} + t_{33} + \dots) q_3 + \dots$$

Cette équation doit être regardée comme limitative par rapport aux t . Comme telle, elle équivaut (5) au système

suivant :

$$\begin{aligned} t_{11} + t_{12} + t_{13} + \dots &\succcurlyeq q_1 \\ t_{21} + t_{22} + t_{23} + \dots &\succcurlyeq q_2 \\ t_{31} + t_{32} + t_{33} + \dots &\succcurlyeq q_3 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

où se trouve déjà impliqué ce fait que, pour chaque *colonne* des t , on a :

$$\Sigma t_{1n} = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma t_{1n} t_{2n} = 0.$$

13. Il convient ici de récapituler les résultats obtenus, et d'indiquer les relations mutuelles des propositions précédentes.

On écrit les relations entre les q , les t et les θ sous la forme abrégée :

$$(q, q, q, \dots) = | t, t, t, \dots | (\theta, \theta, \theta, \dots)$$

où $| t, t, t, \dots |$ peut être conçu comme un déterminant.

On suppose que les θ sont des diviseurs.

Alors, pour que les q soient des diviseurs pour *toutes* les valeurs *arbitraires* des θ , il faut que les t de chaque colonne soient des diviseurs. Et réciproquement, pour que, pour toutes les valeurs assignées aux q , les θ puissent être exprimés en fonction des q (les t de chaque colonne étant des diviseurs), il faut que chaque rangée des t soit inclusive du q correspondant.

14. Trouver la solution générale symétrique d'une équation aux diviseurs.

Soit l'équation :

$$1 = \Sigma a q \quad (1)$$

Soit la solution demandée :

$$(q_1 q_2 q_3 \dots) = | t_{11} t_{12} t_{13} \dots | (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots) \quad (2)$$

Nous savons que, pour que les q soient des diviseurs pour tout système *arbitraire* de valeurs divisorales des θ , *il faut que les t de chaque colonne soient des diviseurs.*

Si cette condition est remplie, les équations (2) de la solution supposée peuvent se réduire à une équation unique, et l'élimination des θ dans cette équation unique fournit la résultante :

$$\begin{aligned} 1 = (t_{11} + t_{12} + \dots) q_1 + (t_{21} + t_{22} + \dots) q_2 \\ + (t_{31} + t_{32} + \dots) q_3 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Il s'agit de trouver à quelles conditions la solution supposée vérifiera l'équation et sera générale.

Les seconds membres des équations (1) et (3) peuvent être appelés respectivement les *fonctions* (1) et (3).

Or, *en premier lieu*, pour que toute solution qui vérifie (2) vérifie (1), il faut qu'on puisse déduire formellement l'équation (1) de l'équation (3); c'est-à-dire, que la fonction (1) soit un facteur formel de la fonction (3) :

$$\begin{aligned} t_{11} + t_{12} + \dots &\Leftarrow a_1 \\ t_{21} + t_{22} + \dots &\Leftarrow a_2 \\ t_{31} + t_{32} + \dots &\Leftarrow a_3 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

En *second lieu*, pour que toute solution qui vérifie (1) vérifie (2), il faut qu'on puisse déduire formellement l'équa-

tion (3) de l'équation (1), c'est-à-dire, que la fonction (3) soit un facteur formel de la fonction (1) :

$$\begin{aligned} a_1 &\leq t_{11} + t_{12} + \dots \\ a_2 &\leq t_{21} + t_{22} + \dots \\ a_3 &\leq t_{31} + t_{32} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ainsi la condition pour que la solution (2) soit une solution générale correcte de l'équation (1) est que les fonctions (1) et (3) soient formellement identiques, c'est-à-dire, qu'on ait :

$$\begin{aligned} a_1 &= t_{11} + t_{12} + \dots \\ a_2 &= t_{21} + t_{22} + \dots \\ a_3 &= t_{31} + t_{32} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

En d'autres termes, le système des relations simultanées qui expriment les q en fonction de θ arbitraires doit être tel que :

1° Les t de chaque colonne constituent un système de diviseurs;

2° La somme de chaque *rangée* des t soit égale au coefficient correspondant de l'équation donnée.

15. Trouver la condition supplémentaire pour que la solution vérifie ce que SCHRÖDER appelle la condition *adventice*.

La condition *adventice* consiste en ce que les arbitraires $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ doivent correspondre respectivement aux termes à déterminer $q_1, q_2, q_3, \dots$ de telle sorte que, si $q_1, q_2, q_3, \dots$

où les p, q, r sont des systèmes de solutions particulières pour les q , et où l'on peut prendre soit les θ , soit les Θ pour « variables indépendantes », et les autres pour « constantes ».

C'est-à-dire que, par exemple, si l'on donne des valeurs quelconques aux diviseurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ on trouvera la solution *générale* en prenant les diviseurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ pour variables indépendantes. Et de même, en intervertissant les θ et les Θ .

17. Pour compléter cette théorie, il est nécessaire de montrer comment on peut obtenir les solutions *particulières* qui permettent d'écrire les solutions *générales*.

Il faut observer que les conditions pour que la solution, en tant que particulière, soit correcte, peuvent s'exprimer simplement en disant que *les t de chaque colonne doivent constituer un système de solutions particulières simultanées*. Car cela garantit que les t de chaque colonne sont des diviseurs, et que, pour toute valeur de s , on a :

$$t_{rs} \mid a_r.$$

La condition supplémentaire pour que la solution soit générale est que *la somme de la r^{e} rangée doit inclure le r^{e} coefficient*. Il ne reste plus alors qu'à introduire les solutions *singulières* comme coefficients des arbitraires dans la solution générale.

THÉORIE DES ÉGALITÉS LOGIQUES A TROIS TERMES a , b ET c ,

Par PLATON PORETSKII,

Docteur en Astronomie, à Gorodnia (gouvernement de Tchernigov, Russie).

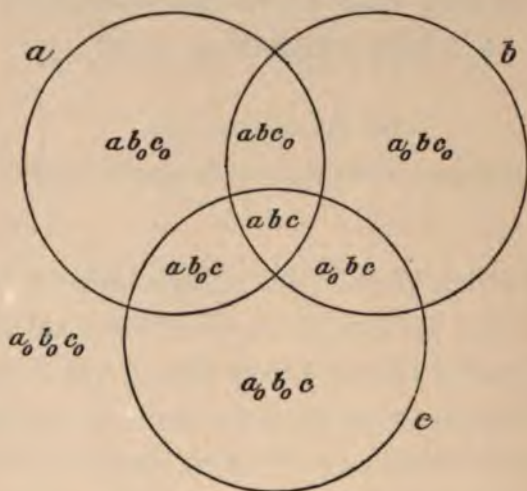
Dans un article récent ¹, que je supposerai connu du lecteur, j'ai donné les formes, les conséquences et les causes de chaque égalité logique à deux termes a et b . Ici je me propose d'explorer et de résoudre toutes les égalités séparées ² à trois termes a, b, c . Ce ne sera pas une simple répétition, sur une plus grande échelle, de la même matière, car nous trouverons ici quelques relations qui ne peuvent point exister dans le discours à deux termes et dont la résolution ne peut être atteinte qu'après un sensible accroissement de nos connaissances théoriques.

Comme précédemment, je supposerai que le lecteur n'a pas étudié spécialement les procédés de la Logique mathématique et, comme alors, je ne l'initierai à ces procédés qu'à mesure des besoins.

1. Exposé élémentaire de la théorie des égalités logiques à deux termes a et b , ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, p. 169 (mars 1900).

2. Chaque combinaison d'égalités logiques est toujours équivalente à une seule égalité.

Avant de résoudre les problèmes à trois termes a, b, c , il est nécessaire de construire toutes les classes du discours de ces termes. Considérons la figure ci-jointe, qui est analogue à la figure de mon article mentionné, et qui est destinée à illustrer tout ce qui peut se rapporter en général à



chaque discours de trois termes. Cette figure nous montre que le discours des termes a, b, c a huit éléments qui sont :

$$abc, abc_0, ab_0c, ab_0c_0, a_0bc, a_0bc_0, a_0b_0c, a_0b_0c_0$$

dont chacun n'embrasse que les choses qui appartiennent à trois classes *simples*¹ à la fois.

Puisque toutes les classes de chaque discours ne sont que les sommes différentes de ses éléments, il est aisé de montrer que le nombre total des classes différentes du discours

1. Le discours considéré a six classes *simples* qui sont : a, b, c , et leurs négations a_0, b_0, c_0 . Ces classes sont *composées* et doivent être strictement distinguées des classes *indécomposables* ou des *éléments*.

à trois termes ou à huit éléments doit être égal à 2^3 ou à 2, c'est-à-dire au nombre 256. Évidemment, toutes ces classes doivent se répartir en neuf groupes d'après la formule connue d'Algèbre :

$$\begin{aligned} 2^8 = 256 &= 1 + \frac{8}{1} + \frac{8.7}{1.2} + \frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} + \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} \\ &+ \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} + \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8} \\ &= 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1, \end{aligned}$$

qui nous montre que le discours à trois termes a, b, c doit contenir : une seule classe sans éléments (qui est la classe 0) et une seule classe à huit éléments (la classe 1); huit classes élémentaires et huit classes à sept éléments; 28 classes à deux éléments et 28 classes à six éléments; et ainsi de suite¹.

Afin de faciliter la construction de ces 256 classes et encore plus la procédure même de résolution des égalités différentes à trois termes a, b, c , je propose une notation particulière que j'ai déjà employée dans mon article précédent pour le discours à deux termes, et d'après laquelle les 256 classes mentionnées doivent s'exprimer par une seule lettre A munie d'indices qui montrent immédiatement pour chaque classe tous ses éléments. Cette méthode de notation

1. Pour le discours à i éléments nous aurons la formule :

$$2^i = 1 + \frac{i}{1} + \frac{i(i-1)}{1.2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} + \dots,$$

qui se déduit du développement connu du binôme de Newton $(p+q)^r$ en y posant $p=1, q=1, r=i$. Pour $i=8$ cette formule fournit le développement du nombre 256 donné dans le texte. Enfin pour $i=2^n$ nous aurons le développement du nombre 2^{2^n} qui correspond au discours à n termes ou à 2^n éléments.

laisse totalement de côté la question de l'addition effective des éléments des classes et des simplifications possibles de ces sommes. Grâce à cela, les difficultés techniques des opérations logiques seront sensiblement évitées, ce qui est très important pour les personnes qui n'ont pas assez l'habitude des calculs.

Soit donc posé :

$$\begin{array}{llll} abc = A^1, & abc_0 = A^2, & ab_0c = A^3, & ab_0c_0 = A^4, \\ a_0bc = A^5, & a_0bc_0 = A^6, & a_0b_0c = A^7, & a_0b_0c_0 = A^8, \end{array}$$

après quoi nous aurons par exemple :

$$A^2 + A^3 = A^{23}, \quad A^1 + A^4 + A^7 = A^{147}$$

et ainsi de suite ¹.

En vertu de notre définition ² des négations, nous aurons par exemple :

$$A_0^{23} = A^{145678}, \quad A_0^{147} = A^{23568}$$

et réciproquement :

$$A_0^{145678} = A^{23}, \quad A_0^{23568} = A^{147}$$

et ainsi de suite.

Cela posé, les 256 classes du discours des termes a, b, c seront : 1° et 9° : une seule classe sans éléments qui est 0 ou A^0 , et une seule classe à huit éléments qui est :

$$1 = A^{12345678} = A_0^0 = A^1 + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7 + A^8;$$

1. En appliquant cette méthode de notation au cas du discours à plus de trois termes, qui a plus de neuf éléments, nous devons séparer par des virgules les numéros des éléments composants. P. e. la somme des éléments A^5 et A^{12} sera $A^{5,12}$.

2. Cette définition est : la négation d'une classe A est la classe composée de tous les éléments du discours qui manquent à A.

2° et 8° : les huit classes élémentaires données plus haut et leurs huit négations qui sont :

$$\begin{aligned} A_0^8 &= A^{1234567} = a + b + c, & A_0^7 &= A^{1234568} = a + b + c_0, \\ A_0^6 &= A^{1234578} = a + b_0 + c, & A_0^5 &= A^{1234678} = a + b_0 + c_0, \\ A_0^4 &= A^{1235678} = a_0 + b + c, & A_0^3 &= A^{1245678} = a_0 + b + c_0, \\ A_0^2 &= A^{1345678} = a_0 + b_0 + c, & A_0^1 &= A^{2345678} = a_0 + b_0 + c_0; \end{aligned}$$

3° : les 28 classes à deux éléments qui sont :

$$\begin{aligned} A^{12}, A^{13}, A^{14}, A^{15}, A^{16}, A^{17}, A^{18}, \\ A^{23}, A^{24}, A^{25}, A^{26}, A^{27}, A^{28}, A^{34}, \\ A^{35}, A^{36}, A^{37}, A^{38}, A^{45}, A^{46}, A^{47}, \\ A^{48}, A^{56}, A^{57}, A^{58}, A^{67}, A^{68}, A^{78}; \end{aligned}$$

dans douze de ces classes l'addition des éléments peut s'effectuer, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} A^{12} &= ab, & A^{13} &= ac, & A^{15} &= bc, & A^{24} &= ac_0, \\ A^{26} &= bc_0, & A^{34} &= ab_0, & A^{37} &= b_0c, & A^{48} &= b_0c_0. \\ A^{56} &= a_0b, & A^{57} &= a_0c, & A^{68} &= a_0c_0, & A^{78} &= a_0b_0; \end{aligned}$$

7° : les 28 négations des classes précédentes, qui sont :

$$\begin{aligned} A^{123456}, A^{123457}, A^{123458}, A^{123467}, A^{123468}, A^{123478}, A^{123567} \\ A^{123568}, A^{123578}, A^{123678}, A^{124567}, A^{124568}, A^{124578}, A^{124678} \\ A^{125678}, A^{134567}, A^{134568}, A^{134578}, A^{134678}, A^{135678}, A^{145678} \\ A^{234567}, A^{234568}, A^{234578}, A^{234678}, A^{235678}, A^{245678}, A^{345678} \end{aligned}$$

dans toutes ces classes les additions des éléments peuvent être en partie effectuées; nous aurons par exemple :

$$A^{123456} = a + b, \quad A^{123458} = a + bc + b_0c_0, \quad A^{123678} = ac + bc_0 + a_0b_0$$

4° : les 56 classes à trois éléments qui sont :

$$\begin{aligned} A^{123}, A^{124}, A^{125}, A^{126}, A^{127}, A^{128}, A^{134}, A^{135}, \\ A^{136}, A^{137}, A^{138}, A^{145}, A^{146}, A^{147}, A^{148}, A^{156}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^{157}, A^{158}, A^{167}, A^{168}, A^{178}, A^{234}, A^{235}, A^{236}, \\
& A^{237}, A^{238}, A^{245}, A^{246}, A^{247}, A^{248}, A^{256}, A^{257}, \\
& A^{258}, A^{267}, A^{268}, A^{278}, A^{345}, A^{346}, A^{347}, A^{348}, \\
& A^{356}, A^{357}, A^{358}, A^{367}, A^{368}, A^{378}, A^{456}, A^{457}, \\
& A^{458}, A^{467}, A^{468}, A^{478}, A^{567}, A^{568}, A^{578}, A^{678},
\end{aligned}$$

les expressions simplifiées de quelques-unes de ces classes sont par exemple :

$$A^{123} = ab + ac = a(b + c), \quad A^{127} = ab + a_0 b_0 c$$

6° : les 56 négations des classes du groupe précédent qui sont :

$$\begin{aligned}
& A^{12345}, A^{12346}, A^{12347}, A^{12348}, A^{12356}, A^{12357}, A^{12358}, \\
& A^{12367}, A^{12368}, A^{12378}, A^{12456}, A^{12457}, A^{12458}, A^{12467}, \\
& A^{12468}, A^{12478}, A^{12567}, A^{12568}, A^{12578}, A^{12678}, A^{13456}, \\
& A^{13457}, A^{13458}, A^{13467}, A^{13468}, A^{13478}, A^{13567}, A^{13568}, \\
& A^{13578}, A^{13678}, A^{14567}, A^{14568}, A^{14578}, A^{14678}, A^{15678}, \\
& A^{23456}, A^{23457}, A^{23458}, A^{23467}, A^{23468}, A^{23478}, A^{23567}, \\
& A^{23568}, A^{23578}, A^{23678}, A^{24567}, A^{24568}, A^{24578}, A^{24678}, \\
& A^{25678}, A^{34567}, A^{34568}, A^{34578}, A^{34678}, A^{35678}, A^{45678},
\end{aligned}$$

après les simplifications, quelques-unes de ces classes sont par exemple :

$$A^{12345} = a + bc, \quad A^{12368} = ac + c_0(a_0 + b);$$

enfin, 5° : les 70 classes restantes du discours considéré qui composent 35 paires de négations mutuelles, et qui sont :

$$\begin{aligned}
& A^{1234}, A^{5678}, \quad A^{1235}, A^{4678}, \quad A^{1236}, A^{4578}, \quad A^{1237}, A^{4568}, \quad A^{1238}, A^{4567}, \\
& A^{1245}, A^{3678}, \quad A^{1246}, A^{3578}, \quad A^{1247}, A^{3568}, \quad A^{1248}, A^{3567}, \quad A^{1256}, A^{3478}, \\
& A^{1257}, A^{3468}, \quad A^{1258}, A^{3467}, \quad A^{1267}, A^{3458}, \quad A^{1268}, A^{3457}, \quad A^{1278}, A^{3456}, \\
& A^{1345}, A^{2678}, \quad A^{1346}, A^{2578}, \quad A^{1347}, A^{2568}, \quad A^{1348}, A^{2567}, \quad A^{1356}, A^{2478}, \\
& A^{1357}, A^{2468}, \quad A^{1358}, A^{2467}, \quad A^{1367}, A^{2458}, \quad A^{1368}, A^{2457}, \quad A^{1378}, A^{2456}, \\
& A^{1456}, A^{2378}, \quad A^{1457}, A^{2368}, \quad A^{1458}, A^{2367}, \quad A^{1467}, A^{2358}, \quad A^{1468}, A^{2357}, \\
& A^{1478}, A^{2356}, \quad A^{1567}, A^{2348}, \quad A^{1568}, A^{2347}, \quad A^{1578}, A^{2346}, \quad A^{1678}, A^{2345},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^{157}, A^{158}, A^{167}, A^{168}, A^{178}, A^{234}, A^{235}, A^{236}, \\
& A^{237}, A^{238}, A^{245}, A^{246}, A^{247}, A^{248}, A^{256}, A^{257}, \\
& A^{258}, A^{267}, A^{268}, A^{278}, A^{345}, A^{346}, A^{347}, A^{348}, \\
& A^{356}, A^{357}, A^{358}, A^{367}, A^{368}, A^{378}, A^{456}, A^{457}, \\
& A^{458}, A^{467}, A^{468}, A^{478}, A^{567}, A^{568}, A^{578}, A^{678},
\end{aligned}$$

les expressions simplifiées de quelques-unes de ces classes sont par exemple :

$$A^{123} = ab + ac = a(b + c), \quad A^{127} = ab + a_0 b_0 c$$

6° : les 56 négations des classes du groupe précédent qui sont :

$$\begin{aligned}
& A^{12345}, A^{12346}, A^{12347}, A^{12348}, A^{12356}, A^{12357}, A^{12358}, \\
& A^{12367}, A^{12368}, A^{12378}, A^{12456}, A^{12457}, A^{12458}, A^{12467}, \\
& A^{12468}, A^{12478}, A^{12567}, A^{12568}, A^{12578}, A^{12678}, A^{13456}, \\
& A^{13457}, A^{13458}, A^{13467}, A^{13468}, A^{13478}, A^{13567}, A^{13568}, \\
& A^{13578}, A^{13678}, A^{14567}, A^{14568}, A^{14578}, A^{14678}, A^{15678}, \\
& A^{23456}, A^{23457}, A^{23458}, A^{23467}, A^{23468}, A^{23478}, A^{23567}, \\
& A^{23568}, A^{23578}, A^{23678}, A^{24567}, A^{24568}, A^{24578}, A^{24678}, \\
& A^{25678}, A^{34567}, A^{34568}, A^{34578}, A^{34678}, A^{35678}, A^{45678},
\end{aligned}$$

après les simplifications, quelques-unes de ces classes sont par exemple :

$$A^{12345} = a + bc, \quad A^{12368} = ac + c_0(a_0 + b);$$

enfin, 5° : les 70 classes restantes du discours considéré qui composent 35 paires de négations mutuelles, et qui sont :

$$\begin{aligned}
& A^{1234}, A^{5678}, \quad A^{1235}, A^{4678}, \quad A^{1236}, A^{4578}, \quad A^{1237}, A^{4568}, \quad A^{1238}, A^{4567}, \\
& A^{1245}, A^{3678}, \quad A^{1246}, A^{3578}, \quad A^{1247}, A^{3568}, \quad A^{1248}, A^{3567}, \quad A^{1256}, A^{3478}, \\
& A^{1257}, A^{3468}, \quad A^{1258}, A^{3467}, \quad A^{1267}, A^{3458}, \quad A^{1268}, A^{3457}, \quad A^{1278}, A^{3456}, \\
& A^{1345}, A^{2678}, \quad A^{1346}, A^{2578}, \quad A^{1347}, A^{2568}, \quad A^{1348}, A^{2567}, \quad A^{1356}, A^{2478}, \\
& A^{1357}, A^{2468}, \quad A^{1358}, A^{2467}, \quad A^{1367}, A^{2458}, \quad A^{1368}, A^{2457}, \quad A^{1378}, A^{2456}, \\
& A^{1456}, A^{2378}, \quad A^{1457}, A^{2368}, \quad A^{1458}, A^{2367}, \quad A^{1467}, A^{2358}, \quad A^{1468}, A^{2357}, \\
& A^{1478}, A^{2356}, \quad A^{1567}, A^{2348}, \quad A^{1568}, A^{2347}, \quad A^{1578}, A^{2346}, \quad A^{1678}, A^{2345},
\end{aligned}$$

les expressions simplifiées de quelques-unes de ces classes sont par exemple :

$$\begin{aligned} A^{1221} &= a, & A^{5678} &= a_0, & A^{1256} &= b, & A^{3478} &= b_0, \\ A^{1357} &= c, & A^{2168} &= c_0, & A^{1235} &= ab + bc + ac, & A^{1236} &= ac + bc_0. \end{aligned}$$

Le Tableau I représente la liste complète de toutes ces 256 classes avec indication de leurs expressions les plus simples.

En égalant chacune des 256 classes du discours considéré à toutes ces classes consécutivement, nous devons obtenir le nombre 256×256 d'égalités séparées. Or parmi ces égalités nous devons évidemment rencontrer : 1°, les 256 égalités de la forme $A = A$ qui sont les formes différentes de l'identité logique exprimée à l'aide de trois termes a, b, c ; et 2°, les 256 égalités de la forme $A = A_0$ qui ne sont que les formes différentes de l'absurdité logique traitée comme un des problèmes du même discours. S'il en est ainsi, et puisque en général chaque égalité de ce discours doit se réduire à la forme de détermination de chacune de ses 256 classes différentes, nous pouvons dire finalement que le discours à trois termes a, b, c ne peut admettre que 256 égalités différentes sous 256 formes chacune.

Vu l'impossibilité de construire toutes les formes de chacune des 256 égalités que nous avons à explorer et à résoudre, nous devons ici faire connaître une formule générale que je nomme *la loi des formes des égalités logiques*, et qui nous donne le moyen de réduire chaque égalité

donnée à la forme de détermination de chaque classe prise arbitrairement ¹.

Cette loi peut être facilement construite à l'aide des formules trouvées dans mon article cité plus haut. Parmi ces formules se trouvent les trois suivantes :

$$(a = b) = (0 = ab_0 + a_0b), \quad (1)$$

$$(a = b) = (1 = ab + a_0b_0), \quad (2)$$

$$(a = ab_0 + a_0b) = (0 = b)^2, \quad (3)$$

où les classes $ab_0 + a_0b$ et $ab + a_0b_0$ sont les négations l'une de l'autre. Appliquons ces formules au problème que nous avons ici à résoudre et qui est : représenter l'égalité donnée $A = B$ sous forme de détermination complète de la classe arbitraire U ². Nous résoudrons ce problème d'une manière générale, c'est-à-dire en supposant que les classes A, B, U appartiennent au discours de n termes quelconques.

Quoique les classes A, B soient en général composées, rien ne nous empêche, ayant l'égalité $A = B$, de les désigner par des symboles isolés α et β , et de traiter l'égalité $A = B$ comme si elle était une égalité $\alpha = \beta$ se rapportant au discours à deux termes α et β . Cela veut dire que toutes les formules que nous avons construites pour le discours à deux termes a et b doivent rester vraies en supposant que

1. Cette loi, trouvée par moi, est la première des lois exposées dans mon livre *Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques* (Kazan, 1899).

2. La justesse de la formule (3) est évidente, car en réduisant à zéro, d'après la formule (1) ou (4), la première de ses deux égalités, nous devons retrouver la seconde.

3. Il ne sera pas superflu de rappeler au lecteur cette vérité constatée dans mon article précité : de chaque égalité $A = B$ nous pouvons déduire quelques déterminations partielles et excessives de la classe U , et seulement une seule détermination complète, qui est l'une des formes de l'égalité $A = B$.

a et b désignent des classes quelconques du discours à n termes quelconques. En remplaçant donc dans les formules (1) et (2) les symboles a et b par les symboles A et B , nous aurons les deux formules :

$$(A=B)=(0=AB_0+A_0B), \quad (4)$$

$$(A=B)=(1=AB+A_0B_0), \quad (5)$$

qui sont vraies pour notre cas général, où A et B se rapportent au discours de n termes quelconques.

Les deux classes AB_0+A_0B et $AB+A_0B_0$ peuvent se nommer le *zéro logique complet* de l'égalité $A=B$ et son *tout logique complet*, car ces deux classes déterminent complètement les classes 0 et 1 en conséquence de l'égalité $A=B$. Donc, en désignant ces deux classes (qui sont les négations l'une de l'autre) par les symboles N et N_0 , nous pouvons dire que le zéro logique complet N de l'égalité $A=B$ et son tout logique complet N_0 se déterminent ainsi :

$$N=AB_0+A_0B, \quad N_0=AB+A_0B_0, \quad (6)$$

après quoi les formules (4) et (5) deviennent :

$$(7) \quad (A=B)=(0=N), \quad (A=B)=(1=N_0) \quad (8)$$

Il ne nous reste qu'à appliquer la formule (3) à la formule (7), afin de réduire l'égalité donnée $A=B$ à la forme de détermination de la classe arbitraire U .

Des deux égalités qui figurent dans la formule (3), la première contient les deux symboles a et b , tandis que la seconde ne contient que le seul symbole b . Cela signifie que pour chaque valeur du symbole b nous pouvons attribuer

au symbole a n'importe quelle valeur prise à volonté, et la formule (3) restera vraie. En remplaçant donc dans la formule (3) le symbole b par le symbole N , qui est le zéro logique complet de l'égalité donnée $A=B$, et le symbole a par le symbole U , qui désigne une classe tout à fait arbitraire, nous aurons la formule vraie :

$$(U = UN_0 + U_0 N) = (0 = N), \quad (9)$$

après quoi la comparaison des deux formules (7) et (9) nous donnera cette formule vraie :

$$(A = B) = (U = UN_0 + U_0 N) \quad (10)$$

qui exprime la loi des formes des égalités logiques. Pour toutes les valeurs possibles de U , cette formule peut nous donner toutes les formes différentes de chaque égalité logique $A=B$.

Afin de faire voir l'interprétation logique de la formule (10) ou (9) et dans un autre but plus important, regardons ce qu'exprime en général l'égalité de la forme

$$P = PQ + P_0 R.$$

En la réduisant à zéro d'après la formule générale (4), et en observant que la négation de la classe $PQ + P_0 R$ est la classe $PQ_0 + P_0 R_0$ ¹, nous aurons :

$$\begin{aligned} (P = PQ + P_0 R) &= [0 = P(PQ_0 + P_0 R_0) + P_0(PQ + P_0 R)] \\ &= (0 = PQ_0 + P_0 R) \end{aligned} \quad (11)^2$$

1. Car ces deux classes, dans le discours des termes P, Q, R , correspondent aux classes A^{1257} et A^{3468} .

2. Évidemment la partie commune des deux classes P et $PQ_0 + P_0 R_0$ est PQ_0 , et la partie commune des deux classes P_0 et $PQ + P_0 R$ est $P_0 R$. On peut aussi voir que dans le discours des termes P, Q, R la classe $P(PQ_0 + P_0 R_0) + P_0(PQ + P_0 R)$ s'exprime ainsi : $A^{1234} A^{3468} + A^{5678} A^{1257} = A^{34} + A^{57} = A^{3457} = PQ_0 + P_0 R$.

Mais, en vertu de l'axiome :

$$(0 = A + B) = (0 = A, 0 = B)$$

et des deux formules :

$$(0 = ab_0) = (a = ab), \quad (0 = a_0b) = (a = a + b)$$

démontrées dans mon article précité, nous aurons consécutivement :

$$(0 = PQ_0 + P_0R) = (0 = PQ_0, 0 = P_0R) = (P = PQ, P = P + R).$$

Donc, après substitution, la formule (11) devient :

$$(P = PQ + P_0R) = (P = PQ, P = P + R) \quad (12)$$

D'où il suit que la détermination de la forme $P = PQ + P_0R$, étant équivalente au système $P = PQ, P = P + R$, doit se lire ainsi : « P est contenue dans Q et contient R », c'est-à-dire la réitération du symbole à déterminer P correspond aux mots « contenue dans », tandis que la négation du même symbole au mot « contient ». Désormais le système de deux déterminations hétérogènes « A est contenue dans B » et « A contient C » peut être traité comme une seule détermination exprimée par une seule égalité : $A = AB + A_0C^1$.

Le lecteur doit remarquer la règle d'interprétation (et de jonction des déterminations) exprimée par la formule

1. L'importante formule (12) a été trouvée par moi et publiée dans mon traité russe : Sur les moyens pour résoudre les égalités logiques, *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan*, 1^{re} série, t. II (1884). Quelques années après, elle a été donnée par M. SCHÜDDE, et même sous le nom de ce savant, *Algebra der Logik*, t. II, p. 34, l. 4 (1891), et t. I, p. 425 (1890); mais, évidemment, elle ne joue aucun rôle dans son système de Logique et s'y présente comme une formule accidentelle, sans valeur et sans conséquences.

(12), car elle peut nous être nécessaire dans la suite à chaque pas.

En appliquant cette règle à la formule (10) ou (9), nous pouvons énoncer la *loi des formes* comme suit : chaque égalité logique $A = B$ (ou $N = 0$) équivaut à l'assertion que chaque classe U prise arbitrairement est contenue dans le tout logique complet de cette égalité et contient son zéro logique complet. Donc, pour déduire de l'égalité donnée $G = H$ la détermination complète d'une classe donnée I , il suffit d'exprimer que I est contenue dans la classe $GH + G_0H_0$ et contient la classe $GH_0 + G_0H$, c'est-à-dire d'écrire : $I = I(GH + G_0H_0) + I_0(GH_0 + G_0H)$.

Pour achever d'énumérer les connaissances qui nous seront nécessaires pour pouvoir résoudre les différentes égalités, il faut encore démontrer le théorème suivant : dans le discours à n termes, la classe à i éléments, que nous nommerons R , doit toujours avoir 2^i sous-classes différentes et 2^{2^n-i} surclasses différentes.

La première partie de ce théorème est évidente, car si les 2^n éléments du discours servent à construire ses 2^{2^n} classes différentes, alors les i éléments de la classe R doivent nous procurer 2^i classes différentes qui sont évidemment les sous-classes différentes de la somme de ces i éléments, c'est-à-dire de la classe R elle-même. Pour démontrer la seconde partie du même théorème, il suffit d'observer que la négation de R qui est R_0 doit contenir les $2^n - i$ éléments restants du discours donné, et par conséquent elle doit avoir 2^{2^n-i} sous-classes différentes. Or, en ajoutant à

R toutes ces sous-classes de R_0 , nous épuiserons toutes les surclasses (qui existent dans le discours donné) de R, d'où il résulte que le nombre total de ces surclasses est 2^{2^n-i} .

Pour construire effectivement toutes les 2^i sous-classes de R, il suffit de rejeter de sa composition consécutivement un élément, deux éléments, trois éléments et ainsi de suite. Au contraire, toutes les surclasses de R seront épuisées en ajoutant à R toutes les sous-classes de R_0 . Les deux sous-classes extrêmes de R sont évidemment 0 et R, tandis que ses deux surclasses extrêmes sont R et 1. Par exemple, dans le discours à deux termes, les sous-classes de A^{12} sont : 0, A^1 , A^2 , A^{12} , et ses surclasses : A^{12} , A^{123} , A^{124} , 1.

De ce théorème il suit avec évidence que chaque égalité à n termes et à m éléments doit avoir 2^m conséquences différentes et 2^{2^n-m} causes différentes. En effet, si cette égalité est réduite à la forme $N=0$, alors, en égalant à zéro chacune des 2^m sous-classes de N et chacune des 2^{2^n-m} surclasses de N, nous épuiserons toutes les conséquences et toutes les causes de cette égalité. Nous sommes ainsi arrivés à la connaissance de deux règles qui font le contenu logique de la *loi des conséquences* des égalités et de la *loi des causes* des égalités. Il ne manque à ces deux lois (trouvées par moi) que de les traduire en formules. Mais, faute de place et pour ne pas fatiguer le lecteur par l'abondance des formules, je ne donnerai pas ici les formules mentionnées, en me bornant à dire que ces formules se trouvent données dans mon livre *Sept lois...* et que les personnes qui étudieront l'article présent peuvent aborder ce livre sans difficulté.

A présent nous sommes enfin en état de résoudre les égalités différentes à trois termes a, b, c , c'est-à-dire de chercher leurs formes, conséquences et causes.

Nous savons que les 256 égalités différentes à trois termes seront épuisées en égalant consécutivement une classe *quelconque* du discours considéré à toutes les autres (et à elle-même). Connaissant la loi des formes, nous pouvons ne considérer toutes ces égalités que sous forme de déterminations du *zéro*. Alors, les huit égalités de la forme : « tel élément du discours est égal à zéro » seront évidemment les égalités *élémentaires* de ce discours ou les éléments de ses égalités. A l'exception de l'égalité identique $0=0$ qui n'a point d'éléments, toutes les autres égalités du même discours seront *composées*, et seront épuisées en égalant à zéro toutes les combinaisons additives de ses huit éléments. S'il en est ainsi, les 256 égalités différentes du discours considéré doivent se répartir en *neuf groupes* d'après la même formule que ses classes, à savoir :

$$256 = 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1.$$

Cela signifie que dans notre discours à trois termes a, b, c il doit exister : une égalité sans éléments (l'identité logique $0=0$) et une égalité à huit éléments (l'absurdité logique $0=1$); huit égalités élémentaires et huit égalités à sept éléments; 28 égalités à deux éléments et 28 égalités à six éléments; et ainsi de suite¹. Grâce à cela, l'objet de

1. Il ne sera pas superflu de rappeler que par exemple l'égalité $A^{12}=0$ est dite une égalité à deux éléments, en raison de ce qu'elle est équivalente au système de deux éléments $A^1=0, A^2=0$.

notre discussion se simplifie sensiblement et nous n'aurons à résoudre qu'une seule égalité de chacun des neuf groupes susdits.

En résolvant les neuf représentants des égalités à trois termes, nous invoquerons partout la vérité générale démontrée plus haut : chaque égalité à n termes et à m éléments doit avoir 2^m conséquences différentes et 2^{2^n-m} causes différentes, et cela sous 2^{2^n} formes différentes. Dans notre cas, où $n=3$, ces trois nombres sont évidemment :

$$2^m, 2^{8-m} \text{ et } 256 \quad (13)$$

1° Prenons d'abord l'*identité* logique $0=A^0$. Dans ce cas, nous avons $m=0$, et les trois nombres précédents seront : $2^0=1$, $2^8=256$ et 256. Conséquemment, l'identité logique, traitée comme une égalité à trois termes, doit avoir une seule conséquence, qui est l'identité même sous ses 256 formes différentes, et 256 causes différentes, qui sont évidemment toutes les égalités de ce discours chacune sous 256 formes différentes. Il est clair que les 256 formes de l'identité sont renfermées dans la formule $A=A$, où A désigne consécutivement toutes les classes du discours considéré.

2° Passons à l'*absurdité* logique $0=A^{12345678}$. Dans ce cas $m=8$, et les trois nombres (13) sont : 256, 1 et 256. Conséquemment, l'absurdité exprimée à l'aide de trois termes doit avoir 256 conséquences, qui sont évidemment toutes les égalités du discours sous 256 formes chacune, et une seule cause, qui est l'absurdité même sous ses 256 formes

différentes. Quant aux formes de l'absurdité, elles sont évidemment renfermées dans la formule $A = A_0$, où A désigne consécutivement toutes les classes du discours considéré.

Avant d'aller plus loin, il ne sera pas superflu de montrer ce que nous donnera la loi des formes (10) ou (9) appliquée au cas de l'identité et au cas de l'absurdité. Dans le premier cas, nous devons poser $N=0$, $N_0=1$, et dans le second $N=1$, $N_0=0$, après quoi nous tirerons de la formule (9) les deux formules suivantes :

$$(0=0) = (U=U), \quad (0=1) = (U=U_0),$$

qui sont tout à fait conformes aux deux formules $A=A$ et $A=A_0$ prises plus haut.

3° Prenons à présent l'une des égalités *élémentaires* à trois termes a, b, c , par exemple : $A^4=0$, ou $ab_0c_0=0$.

Puisqu'en ce cas nous avons $N=A^4=ab_0c_0$ et par conséquent $N_0=A^{1235678}=a_0+b+c$, la formule (9) nous donnera :

$$(0=A^4) = (U=UA^{1235678} + U_0A^4) \quad (14)$$

Toutes les formes de l'élément considéré $A^4=0$ seront donc épuisées en remplaçant ici U par toutes les classes possibles. En y posant d'abord $U=A^{1234}$, et par conséquent $U_0=A^{5678}$, et en observant que¹ :

$$A^{1234}A^{1235678} = A^{123}, \quad A^{5678}A^4 = A^0 = 0,$$

1. Nous savons que : 1° le produit PQ n'embrasse que les objets communs aux classes P et Q ; 2° deux (ou plusieurs) éléments du discours n'ont rien de commun. Ainsi multiplier les deux classes, c'est prendre la somme des éléments qui leur sont communs.

la formule (14) nous donnera :

$$(0 = A^4) = (A^{1234} = A^{123})$$

ou, ce qui est la même chose :

$$(0 = ab_0c_0) = [a = a(b + c)].$$

Donc l'égalité élémentaire $0 = ab_0c_0$ signifie que a est contenue dans $b + c$, ou encore que « chaque a est ou b ou c ».

Posons encore dans la même formule (14) $U = A^4$, et par conséquent $U_0 = A^{125678}$. Nous aurons :

$$(0 = A^4) = (A^{34} = A^{34} A^{1235678} + A^{125678} A^4 = A^3),$$

ce qui nous donne :

$$(0 = ab_0c_0) = (ab_0 = ab_0c).$$

D'où il suit que dans ce cas la détermination complète de ab_0 est : « ab_0 est contenue dans c^1 ».

Les trois nombres (13) étant ici ($m=1$) égaux à 2, 128 et 256, il en résulte que l'élément $0 = ab_0c_0$ doit avoir deux conséquences différentes et 128 causes différentes sous 256 formes chacune. Ses deux conséquences différentes qui sont extrêmes sont évidemment : $0=0$ et $0=A^4$. Quant à ses causes différentes, nous les épuiserons en égalant à zéro toutes les classes du discours qui contiennent l'élément ab_0c_0 ou A^4 , et dont le nombre total est 128. Quelques-unes de ces causes sont par exemple : $A^{34}=0$, $A^{147}=0$, $A^{23478}=0$.

1. Pour les personnes qui sont initiées à la Logique mathématique, je puis dire que la formule ici trouvée peut s'écrire ainsi : $(a < b + c) = (ab_0 < c)$, c'est-à-dire qu'elle exprime l'une des règles de *transposition*.

Les huit égalités élémentaires à trois termes a, b, c nous donnent les déterminations suivantes de l'un de ces termes, par exemple a :

- $1^\circ (0 = abc) = [a = a(b_0 + c_0)],$ chaque a est ou b_0 ou c_0 ,
 $2^\circ (0 = abc_0) = [a = a(b_0 + c)],$ » b_0 » c ,
 $3^\circ (0 = ab_0c) = [a = a(b + c_0)],$ » b » c_0 ,
 $4^\circ (0 = ab_0c_0) = [a = a(b + c)],$ » b » c ,
 $5^\circ (0 = a_0bc) = (a = a + bc)^1,$ la classe a contient tout bc ,
 $6^\circ (0 = a_0bc_0) = (a = a + bc_0)$ » » bc_0 ,
 $7^\circ (0 = a_0b_0c) = (a = a + b_0c),$ » » b_0c ,
 $8^\circ (0 = a_0b_0c_0) = (a = a + b_0c_0),$ » » b_0c_0 .

Les déterminations analogues peuvent être construites pour les cinq autres classes simples a_0, b, b_0, c, c_0 . A présent nous pouvons dire que toutes les égalités à termes a, b, c ne sont que les combinaisons différentes (les systèmes) des huit déterminations précédentes de a .

4° Prenons l'une des huit égalités à sept éléments, par exemple $A_0^4 = A^{1235678} = 0$, ou $a_0 + b + c = 0$.

En posant dans la formule (9) $N = A^{1235678}$ et par conséquent aussi $N_0 = A^4$, nous pouvons dire que toutes les formes de l'égalité $a_0 + b + c = 0$ sont renfermées dans la formule :

$$(A^{1235678} = 0) = (U = UA^4 + U_0 A^{1235678})$$

Pour les valeurs $U = A^{1234}$ et $U_0 = A^{5678}$, nous aurons donc :

$$(A^{1235678} = 0) = (A^{1234} = A^4 + A^{5678} = A^{45678})$$

c'est-à-dire :

$$(a_0 + b + c = 0) = (a = a_0 + b_0c_0).$$

1. Cette formule peut être facilement vérifiée. Faute de place, je ne considérerai pas ici, à titre de problème spécial, l'élément de la forme $0 = a_0bc$.

Pour interpréter cette détermination étrange de a , nous la transformerons ainsi :

$$a = a_0 + b_0 c_0 = a_0 + ab_0 c_0 = ab_0 c_0 + a_0 \cdot 1,$$

ce qui nous montre que a est contenue dans $b_0 c_0$ et contient l'unité. Afin de faire voir que cette détermination est tout à fait vraie, il suffit d'observer que si a contient l'unité, alors a est elle-même égale à 1, et par conséquent le produit $b_0 c_0$ qui contient a est aussi égal à 1, ce qui n'est possible¹ que lorsque b_0 et c_0 sont aussi égales à 1. Donc la détermination précédente de a est équivalente au système ($a=1, b_0=1, c_0=1$) ou au système ($a_0=0, b=0, c=0$), ou enfin à l'égalité unique $a_0 + b + c = 0$, c'est-à-dire à l'égalité donnée.

Dans le cas de l'égalité considérée $A^{1235678} = 0$, où $m=7$, les trois nombres (13) sont : 128, 2 et 256. Les deux causes différentes de cette égalité ne sont que ses causes extrêmes : l'égalité même $A^{1235678} = 0$ et l'absurdité $A^{12345678} = 0$. Quant aux conséquences différentes de la même égalité, dont le nombre est 128, elles sont par exemple : $A^{123} = 0$, $A^{58} = 0$, $A^{25678} = 0, \dots$

5° Prenons l'une des 28 égalités à *deux éléments*, par exemple : $A^{34} = 0$, ou $ab_0 = 0$. Cette égalité est élémentaire dans le discours à deux termes a et b , mais dans le discours à trois termes a, b, c , elle a deux éléments qui sont :

1. En effet, le produit PQ est la sous-classe de P et de Q. Par conséquent, si ce produit est égal à 1, les classes P et Q doivent à plus forte raison être égales à 1.

$A^3=0$ et $A^4=0$, ou $ab_0c=0$ et $ab_0c_0=0$. Nous avons dans ce cas :

$$(ab_0c=0, ab_0c_0=0) = (a_0b=0),$$

ou, après les modifications évidentes :

$$[a=a(b+c_0), a=a(b+c)] = (a=ab) \quad (15)$$

Donc dire que chaque a est ou b ou c_0 et en même temps ou b ou c , équivaut à dire que chaque a est b .

Dans notre cas de l'égalité $ab_0=0$ traitée comme une des égalités à trois termes a, b, c , nous avons $n=3, m=2$, et par conséquent $2^m=4, 2^{2^n-m}=64$. Donc cette égalité doit avoir quatre conséquences différentes et 64 causes différentes. Puisque les quatre sous-classes de A^{24} sont : $0, A^3, A^4, A^{24}$, les conséquences différentes de l'égalité considérée seront : $0=0, 0=ab_0c, 0=ab_0c_0, 0=ab_0$, ou encore : $a=a, a=a(b+c_0), a=a(b+c), a=ab$. Quant aux causes de la même égalité, elles sont par exemple : $A^{134}=0, A^{348}=0, A^{22456}=0, \dots$

6° L'une des 28 égalités à *six éléments* est par exemple : $0=A^{125678}$ ou $0=a_0+b$. Dans le discours à deux termes a et b cette égalité n'a que trois éléments qui sont : $0=ab, 0=a_0b, 0=a_0b_0$, mais dans le discours à trois termes a, b, c elle en a six qui sont : $0=A^1, 0=A^2, 0=A^5, 0=A^6, 0=A^7, 0=A^8$, ou encore :

$$abc=0, abc_0=0, a_0bc=0, a_0bc_0=0, a_0b_0c=0, a_0b_0c_0=0.$$

Comme en ce cas nous avons $n=3, m=6$, les trois nombres (13) seront : 64, 4 et 256. Les quatre causes diffé-

rentes de l'égalité considérée sont évidemment :

$$0 = A^{126678}, \quad 0 = A^{1233678}, \quad 0 = A^{1245678}, \quad 0 = A^{12345678}$$

ou encore :

$$0 = a_0 + b, \quad 0 = a_0 + b + c, \quad 0 = a_0 + b + c_0, \quad 0 = 1.$$

Enfin, quelques-unes de ses conséquences sont : $0 = A^{54}$, $0 = A^{127}, \dots$

7° Passons aux problèmes à *trois éléments* dont le nombre total est 56. L'un de ces problèmes se compose des deux prémisses suivantes : « a est contenue dans b » et « a est contenue dans c ». La première de ces prémisses, $a = ab$, est élémentaire dans le discours à deux termes a et b ; la seconde, $a = ac$, est élémentaire dans le discours à deux termes a et c . Dans notre discours à trois termes a, b, c , la première a deux éléments : $0 = ab_0c$, $0 = ab_0c_0$, et la seconde deux éléments : $0 = abc_0$, $0 = ab_0c_0$. Mais le système de ces deux prémisses n'a que les trois éléments : $0 = ab_0c$, $0 = abc_0$, $0 = ab_0c_0$, car la réitération de l'élément $0 = ab_0c_0$ n'a pas d'effet¹. Donc le système des deux prémisses données équivaut à l'égalité :

$$0 = ab_0c + abc_0 + ab_0c_0 = A^{234} \quad (16)$$

et nous pouvons écrire :

$$(a = ab, a = ac) = (0 = A^{234}) \quad (17)$$

En posant dans la formule (9) $N = A^{234}$, nous aurons la

1. En général, dans la Logique, le système $(P = Q, P = Q)$ est toujours équivalent à l'égalité unique $P = Q$, de même que l'alternative de ces deux égalités

formule :

$$(0 = A^{234}) = (U = UA^{15678} + U_0 A^{234})$$

qui embrasse toutes les formes du problème considéré (16).

Pour $U = A^{1234}$ et $U_0 = A^{5678}$ il en résulte :

$$(0 = A^{234}) = (A^{1234} = A^{1234} A^{15678} + A^{5678} A^{234} = A^1),$$

après quoi la formule (17) devient :

$$(a = ab, a = ac) = (a = abc) \quad (18)$$

Donc dire que a est contenue dans b et dans c équivaut à dire que a est contenue dans le produit bc . La règle exprimée par la formule (18) peut s'étendre facilement au cas de la jonction de trois, de quatre, etc., déterminations de la forme $P = PQ$. En particulier, si $b = d + x$, $c = d + x_0$, la formule (18) nous donne :

$$[a = a(d + x), a = a(d + x_0)] = [a = a(d + x)(d + x_0) = ad],$$

c'est-à-dire la règle exprimée par la formule (15).

Les huit conséquences du problème considéré (16) sont évidemment :

$$0 = 0, 0 = A^2, 0 = A^3, 0 = A^4, 0 = A^{23}, 0 = A^{24}, 0 = A^{34}, 0 = A^{234}.$$

Quelques-unes de ses causes, dont le nombre est 32, sont par exemple :

$$0 = A^{2345}, 0 = A^{123478}, \dots$$

Prenons encore un autre problème à trois termes, le problème exprimé par le système des deux prémisses : « a contient b » et « a contient c ». La première de ces prémisses ($a = a + b$) a deux éléments : $0 = a_0 bc$, $0 = a_0 bc_0$; les deux

éléments de la seconde ($a = a + c$) sont : $0 = a_0bc$, $0 = a_0b_0c$.
Donc les trois éléments différents du problème sont :
 $0 = a_0bc$, $0 = a_0bc_0$, $0 = a_0b_0c$, ce qui nous donne :

$$(a = a + b, a = a + c) = (0 = a_0bc + a_0bc_0 + a_0b_0c) = (0 = A^{567}).$$

Toutes les formes de cette égalité sont renfermées dans la formule :

$$(0 = A^{567}) = (U = UA^{12345} + U_0A^{567}),$$

d'où pour $U = A^{1234}$ nous tirerons :

$$(0 = A^{567}) = (A^{1234} = A^{1234} + A^{567} = A^{1234567}),$$

ou finalement :

$$(a = a + b, a = a + c) = (a = a + b + c) \quad (19)$$

De là cette règle : dire que a contient b et c équivaut à dire que a contient la somme $b + c$. Cette règle peut aussi s'étendre facilement au cas de jonction de plusieurs déterminations de la forme $P = P + Q$. L'ensemble des deux règles (18) et (19) peut facilement nous conduire à la règle de jonction la plus générale :

$$(P = PQ' + P_0R', P = PQ'' + P_0R'') = [P = PQ'Q'' + P_0(R' + R'')],$$

dont je ne donnerai pas ici la démonstration, faute de place. Les huit conséquences différentes du problème précédent $0 = A^{567}$ et ses 32 causes différentes se trouveront sans difficulté.

8° En observant que chacune des 56 égalités à *cinq éléments* doit avoir dans le discours à trois termes 32 consé-

quences différentes et huit causes différentes, je ne fatiguerai pas le lecteur par des exemples correspondants.

Enfin, 9°, il ne nous reste qu'à considérer les égalités à *quatre éléments*, dont le nombre total dans le discours à termes a, b, c est 70. Chacune de ces égalités doit avoir 16 conséquences différentes et 16 causes différentes. Les plus intéressants problèmes du discours à trois termes appartiennent, semble-t-il, à ce groupe d'égalités. On étudiera plus loin cinq de ces problèmes.

Jusqu'ici je n'ai encore rien dit sur les *tables logiques*¹ des égalités discutées. C'est seulement en raison de la grande étendue de ces tables, car chacune des 128 tables qui peuvent exister dans le discours à trois termes doit contenir toutes les 256 classes de ce discours. Voilà pourquoi je ne donnerai dans cet article qu'une seule de ces tables (Tableau II). Mais en revanche j'exposerai ici la méthode générale de leur construction.

Supposons que nous ayons à construire la table logique de l'égalité $N=0$ à n termes et à m éléments. Puisqu'en ce cas la classe N est la somme de m éléments différents du discours, composons toutes les 2^m sous-classes de cette classe, et rangeons-les dans une colonne en commençant par zéro et en finissant par N . Chacune de ces sous-classes est évidemment l'un des zéros logiques partiels de l'égalité donnée $N=0$. Donc en égalant consécutivement l'une de ces classes à elle-même et à toutes les autres classes de ce

1. Par ce terme je propose de nommer, par abréviation, les tables des formes, des conséquences et des causes des égalités logiques.

1

groupe, nous épuiserons toutes les conséquences de l'égalité donnée sous forme de déterminations de ladite classe. Prenons ensuite la négation de N , c'est-à-dire la classe N_0 , et arrangeons ses 2^{2^n-m} sous-classes dans une ligne en commençant par zéro et en faisant coïncider ce zéro avec le zéro de la colonne précédente. Évidemment toutes les classes de cette ligne sont égales en vertu de l'égalité $0 = N_0$ opposée à l'égalité donnée, et peuvent nous donner toutes les conséquences de cette égalité opposée sous leurs 2^{2^n-m} formes. Nous aurons ainsi la première colonne et la première ligne de la table à construire, qui doit évidemment donner place aux $2^m \times 2^{2^n-m}$ classes, c'est-à-dire aux 2^{2^n} classes du discours considéré. Pour achever la construction de cette table, nous nous conformerons à la règle suivante : la place de la table qui se trouve dans la colonne de rang p et dans la ligne de rang q , et que nous pouvons désigner par le symbole (p, q) , doit être occupée par la classe que nous obtiendrons en ajoutant la classe de rang q de la première colonne à la classe de rang p de la première ligne. Évidemment cette règle peut s'exprimer ainsi :

$$(p, q) = (1, q) + (p, 1).$$

Il est facile de comprendre que toutes les sommes composées d'après cette règle seront tout à fait différentes, et par conséquent toutes les classes du discours trouveront leurs places dans la table. Je ne fatiguerai pas le lecteur en démontrant que cette table remplit toutes les conditions qui lui sont imposées; je me bornerai à indiquer les règles de

son emploi. Supposons qu'une classe quelconque A du discours occupe dans la table la place (p', q') et la négation de A la place (p'', q'') , ce que nous exprimerons par les égalités :

$$A = (p', q'), \quad A_0 = (p'', q'').$$

Alors : 1° chaque égalité de la forme $A = (p', x)$ sera l'une des conséquences de l'égalité $0 = N$; 2° chaque égalité de la forme $A = (y, q')$ sera l'une des conséquences de l'égalité $0 = N_0$; 3° chaque égalité de la forme $A = (z, q'')$ sera une des causes de l'égalité $0 = N$; 4° chaque égalité de la forme $A = (p'', u)$ sera une des causes de l'égalité $0 = N_0$; 5° l'égalité $A = (p', q'')$ sera une forme de l'égalité $0 = N$; enfin, 6° l'égalité $A = (p'', q')$ sera une forme de l'égalité $0 = N_0$.

Pour terminer ce mémoire, je considérerai les cinq problèmes à quatre éléments et à trois termes, et pour l'un d'eux je donnerai sa table logique.

1° Prenons le problème qui a les deux prémisses suivantes : « a est contenue dans b » et « a contient c », ce qui s'exprime par le système : $a = ab$, $a = a + c$, ou encore : $0 = ab_0$, $0 = a_0c$. Donc l'égalité unique qui correspond au problème est : $0 = ab_0 + a_0c = A^{3457}$. Pour présenter cette égalité sous forme de détermination de a , posons dans la formule (9) $U = A^{1234}$, ce qui nous donne :

$$(0 = A^{3457}) = (A^{1234} = A^{12} + A^{57} = A^{1257})$$

ou encore :

$$(a = ab, a = a + c) = (a = ab + a_0c).$$

Voilà encore une démonstration de la formule importante

(12) qui exprime la règle de jonction de deux déterminations hétérogènes de la même classe.

Les conséquences et les causes de ce problème se trouveront sans peine.

2° Soit donné le problème $a=b$ traité comme un des problèmes à trois termes a, b, c . Dans le discours à deux termes a et b l'égalité $a=b$ a deux éléments : $0=ab_0$, $0=a_0b$, mais ici elle en a quatre : $0=ab_0c$, $0=ab_0c_0$, $0=a_0bc$, $0=a_0bc_0$. Donc l'égalité $a=b$ équivaut à l'égalité $0=A^{2456}$. Ses 16 conséquences différentes ne sont évidemment que les combinaisons (les systèmes) des quatre déterminations suivantes :

$$a = a(b + c_0), \quad a = a(b + c), \quad a = a + bc, \quad a = a + bc_0.$$

Quelques causes du même problème sont par exemple : $0=A^{13156}$, $0=A^{221568}$, ...

3° Prenons à présent le problème proposé par VENN en faisant une leçon de Logique à une classe composée de 150 élèves. Ce problème est : « Les membres du Conseil (d'un établissement financier) sont les personnes qui ne possèdent que des obligations ou que des actions. Or il se trouve que tous les possesseurs d'obligations font partie du Conseil. Qu'en faut-il conclure ? » Cinq élèves seulement donnèrent la réponse : « il n'existe point de personnes qui possèdent à la fois des actions et des obligations ». Tous les autres élèves ne purent donner aucune réponse. Quant à VENN lui-même, il était complètement satisfait de la susdite réponse, mais c'est à tort, car son problème (qui a

trois termes et quatre éléments et qui est accompagné d'une question *indéterminée*) admet 16 conséquences et 16 causes sous 256 formes chacune, d'où il résulte que le nombre total des réponses possibles doit s'exprimer en ce cas ainsi :

$$16. 256 + 16. 256 = 4\,096 + 4\,096 = 8\,192^1.$$

Soit a la classe des membres du Conseil, b la classe des possesseurs d'obligations et c la classe des possesseurs d'actions. Les deux prémisses du problème seront :

$$a = a(bc_0 + b_0c), \quad b = ab$$

ou encore :

$$0 = a(bc + b_0c_0), \quad 0 = a_0b.$$

Donc l'égalité unique équivalente au problème est :

$$0 = abc + ab_0c_0 + a_0b = A^{1256}$$

L'une de ses conséquences est $0 = A^{15} = bc$; elle exprime la réponse indiquée plus haut, mais ce n'est pas la réponse unique, comme le pensait évidemment l'auteur même du problème. Ce problème a servi d'exemple pour illustrer presque toutes les lois exposées dans mes deux livres *Sept lois...* et *Quelques lois ultérieures...*

4° Soit donnée l'égalité $0 = ax + bx_0$ qui est traitée par M. SCHRÖDER comme la forme la plus générale des équations logiques (à une inconnue). Les classes a et b sont supposées être des classes quelconques composées, indépendantes de la lettre x ; mais tant que les expressions de ces classes ne

1. Ce nombre doit se réduire à 7424, puisqu'il faut rejeter 256 identités, 256 absurdités et 256 réitérations des formes du problème (car ces formes se trouvent à la fois parmi ses conséquences et parmi ses causes).

nous sont pas données, nous devons les considérer comme des classes simples du discours, aussi bien que le symbole x . Donc l'égalité donnée appartient dans ce cas au discours à trois termes a, b, x , et possède quatre éléments qui sont :

$$0 = abx, \quad 0 = ab_0x, \quad 0 = abx_0, \quad 0 = a_0bx_0.$$

En changeant c en x , nous pouvons dire que l'égalité donnée est $0 = A^{134}$. S'il en est ainsi, l'égalité donnée doit nous fournir pour la classe x (ainsi que pour chacune des 255 autres classes du discours) seize déterminations *partielles* et seize déterminations *excessives* (qui se trouveront facilement). Outre cela, la même égalité peut nous donner encore quatre déterminations de x :

$$x = a_0b, \quad x = a_0, \quad x = b, \quad x = a_0 + b$$

que je nomme ses déterminations *radicales* (ses *racines*) et qui ne se trouvent point parmi les 32 déterminations susdites de cette classe. Faute de place, je ne dirai ici rien de plus sur les racines, en me bornant à dire que la théorie des racines est exposée dans mon livre *Sept lois...*¹.

5° Prenons enfin le problème : « a est contenue dans b et b dans c ». Ce sont, comme on sait, les prémisses du syllogisme *Barbara*. D'après la règle de ce syllogisme, on en conclut seulement que « a est contenue dans c ». Or puisque c'est encore un problème à trois termes et à quatre élé-

1. Il faut cependant observer que la notion de *racine* est artificielle en Logique et n'a point son équivalent dans la terminologie usuelle, car les déterminations radicales sont les conclusions qui ne sont ni formes, ni conséquences, ni causes de l'égalité.

ments, il doit lui aussi admettre 8192 conclusions. Nous discuterons ce problème important en détail, en ajoutant que l'on peut résoudre de la même manière tous les syllogismes dont les deux prémisses sont universelles, à savoir : *Celarent*, *Cesare*, *Camestres* et *Camenes*.

Les deux prémisses sont en ce cas : $a = ab$, $b = bc$, ou : $0 = ab_0$, $0 = bc_0$. Donc l'égalité unique équivalente au problème est :

$$0 = ab_0 + bc_0 = A^{2340}.$$

Ses seize conséquences réduites, d'après la formule (9), à la forme de déterminations (partielles) de a sont évidemment :

1° $(0 = 0) = (a = a)$, a est équivalente à elle-même,

2° $(0 = A^2 = abc_0) = [a = a(b_0 + c)]$, a est ou b_0 ou c ,

3° $(0 = A^3 = ab_0c) = [a = a(b + c_0)]$, a est ou b ou c_0 ,

4° $(0 = A^4 = ab_0c_0) = [a = a(b + c)]$, a est ou b ou c ,

5° $(0 = A^6 = a_0bc_0) = (a = a + bc_0)$, a contient bc_0 ,

6° $(0 = A^{23} = abc_0 + ab_0c) = [a = a(bc + b_0c_0)]$, a est ou bc ou b_0c_0 ,

7° $(0 = A^{24} = ac_0) = (a = ac)$, a est c ,

8° $(0 = A^{26} = bc_0) = [a = a(b_0 + c) + a_0bc_0]$, a est ou b_0 ou c et contient bc_0 ,

9° $(0 = A^{34} = ab_0) = (a = ab)$, a est b ,

10° $(0 = A^{36} = ab_0c + a_0bc_0) = [a = a(b + c_0) + a_0bc_0]$, a est ou b ou c_0 et contient bc_0 ,

11° $(0 = A^{46} = ab_0c_0 + a_0bc_0) = [a = a(b + c) + a_0bc_0]$, a est ou b ou c et contient bc_0 ,

12° $(0 = A^{234} = ab_0 + ac_0) = (a = abc)$, a est b et c ,

13° $[0 = A^{236} = a(bc_0 + b_0c) + a_0bc_0] = [a = a(bc + b_0c_0) + a_0bc_0]$, a est ou bc ou b_0c_0 et contient bc_0 ,

14° ($0 = A^{246} = ac_0 + a_0bc_0$) = ($a = ac + a_0bc_0$), a est c et contient bc_0 ,

15° ($0 = A^{346} = ab_0 + a_0bc_0$) = ($a = ab + a_0bc_0$), a est b et contient bc_0 ,

16° [$0 = A^{346} = a(b_0 + c_0) + a_0bc_0$] = ($a = abc + a_0bc_0$), a est b et c et contient bc_0 .

Quant aux seize causes différentes du problème, elles peuvent aussi être réduites à la forme de déterminations (excessives) de a , mais, pour me faire mieux comprendre, je préfère les représenter autrement.

Dans mon traité *Quelques lois ultérieures*,... je démontre que : 1° chaque égalité à n termes et à m éléments a toujours $2^n - m$ causes élémentaires ; 2° chaque cause élémentaire est une égalité de la forme : la négation de tel élément du discours est égale à zéro ; 3° les causes composées d'une égalité sont les combinaisons alternatives de ses causes élémentaires. Dans notre cas, où $2^n - m = 4$, les quatre causes élémentaires sont évidemment :

$$1^\circ (0 = A_1^1) = (0 = a_0 + b_0 + c_0) = (a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0) \\ = (a = 1, b = 1, c = 1),$$

$$2^\circ (0 = A_0^5) = (0 = a + b_0 + c_0) = (a = 0, b_0 = 0, c_0 = 0) \\ = (a = 0, b = 1, c = 1),$$

$$3^\circ (0 = A_1^7) = (0 = a + b + c_0) = (a = 0, b = 0, c_0 = 0) \\ = (a = 0, b = 0, c = 1),$$

$$4^\circ (0 = A_0^8) = (0 = a + b + c) = (a = 0, b = 0, c = 0).$$

Cela signifie que le système $a = ab, b = bc$ est possible dans les quatre cas simples : 1° lorsque $a = 1, b = 1, c = 1$;

2° lorsque $a=0, b=1, c=1$; 3° lorsque $a=0, b=0, c=1$; et 4° lorsque $a=0, b=0, c=0$. Toutes les causes restantes (composées) du problème sont les alternatives de quelques-unes des quatre causes précédentes. Par exemple, lorsque les conditions exprimées soit par la cause 2°, soit par la cause 4°, sont satisfaites, les prémisses sont vraies.

Le Tableau II présente la *table logique* du problème considéré $A^{2346}=0$ et de son opposé $A^{1578}=0$. Elle peut nous fournir 8192 conclusions pour chacun de ces deux problèmes, c'est-à-dire plus de 16 000 conclusions en général. Par exemple, sous forme de déterminations de la classe A^{56} , dont la négation est A^{123478} , cette table nous donnera pour le premier de ces problèmes : 1° une de ses conséquences : $A^{56}=A^{315}$; 2° une de ses causes : $A^{56}=A^{23458}$; 3° sa forme : $A^{56}=A^{2315}$; et pour le second problème : 1° une de ses conséquences : $A^{56}=A^{167}$; 2° une de ses causes : $A^{56}=A^{1278}$; 3° sa forme : $A^{56}=A^{1678}$.

Pour conclure ce mémoire, je ferai encore les trois remarques suivantes :

1° La théorie exposée ici des égalités à trois termes n'est pas tout à fait complète, car, outre qu'elle ne touche pas la notion artificielle de racine, elle ne nous donne point des conclusions exprimées au moyen de termes étrangers au discours considéré. Ces sortes de conclusions peuvent être construites d'après les lois générales des conséquences et des causes formulées dans mon livre *Sept lois...*

2° Dorénavant nous sommes en état de tirer des égalités

logiques, non seulement leurs conséquences et leurs formes, mais aussi leurs causes, c'est-à-dire les conditions de leur possibilité. Il est extrêmement important de savoir distinguer rigoureusement les conséquences et les causes, car chacun de nous a un penchant à croire *a priori* que toute conclusion tirée d'un problème ne peut être autre chose que l'une de ses conséquences. C'est là une erreur dont ne se sont pas préservés les plus forts esprits, faute d'une méthode rigoureuse, et même quelques maîtres de la Logique mathématique ¹.

3° Les connaissances théoriques proposées dans cet article sont évidemment tout à fait suffisantes pour résoudre non seulement les égalités à trois termes, mais aussi les égalités à n termes en général.

1. C'est uniquement pour mettre en garde les autres logiciens contre des fautes de ce genre que je prends la liberté de signaler ici celles qui se rencontrent dans l'ouvrage capital de M. SCHROEDER, *Algebra der Logik* : 1° dans la démonstration du théorème 43 (t. I, p. 398), l'égalité $a = ub$, qui est l'une des causes de l'égalité $a = ab$ (de la subsumption $a < b$), est traitée comme l'une de ses conséquences; 2° dans le « Haupttheorem » 50 (t. I, p. 450), l'égalité $ab = 0$, qui est l'une des conséquences de l'égalité $0 = ax + bx_0$, est considérée comme la condition de sa possibilité, c'est-à-dire comme l'une de ses causes.

SUR UNE EXTENSION DE L'IDÉE D'ORDRE

Par ERNST SCHRÖDER,

Professeur à l'École technique supérieure de Karlsruhe.

La notion d'*ordre* ayant, par les recherches profondes de M. Georg CANTOR, attiré récemment l'attention tant des mathématiciens que des philosophes, il ne sera pas déplacé d'en étudier ici une extension.

Rappelons d'abord les caractères distinctifs (*notae essentialies*) de cette notion.

Un système ou *ensemble* (*Menge*) a d' « éléments » $i, j, h, \dots$ peut être ordonné suivant des principes différents.

Le *principe* d'un *ordre* donné est le *relatif binaire* qui donne réponse à cette *question double* : Quel élément (de l'ensemble) précède quel élément??

Nommant x ce principe, j'avais réussi¹, moyennant le

1. Voir Ueber *Pasigraphie*, ap. *Verhandlungen des 1. internationalen Mathematiker-kongresses*, 1897, p. 147..162. — *On Pasigraphy, its present state and the pasigraphic movement in Italy*, ap. *The Monist*, vol. IX, p. 44..62. — Ueber zwei *Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze*, ap. *Nova Acta Acad. Leop. Carol.*, t. LXXI, p. 303..362. — Les notations employées ci-dessus sont celles qui sont exposées amplement dans mon livre *Algebra und Logik der Relative* (1^{re} partie, 649 pages, Leipzig, Teubner, 1895), ainsi que dans ma *Note über die Algebra der Relative*, ap. *Math. Annalen*, t. XLVI, p. 144..158. — Sur la théorie des ensembles, on peut consulter aussi l'excellent ouvrage de M. E. BOREL : *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1898, 136 pages).

capital de notations fourni par l'Algèbre des relatifs, à condenser les trois caractères essentiels de la notion d'un ordre simple en cet énoncé double :

$$0^0 \quad x; x \leq x = 0^{\check{x}}, \quad [\text{resp.} = 0^{\check{a}\check{a}\check{x}}]$$

ne faisant dépense que de cinq lettres.

Il est vrai qu'il fallait, pour atteindre une simplicité pareille, se borner à considérer les éléments de notre ensemble a ; dans le cas plus général d'un « univers du discours » (*Denkbereich*) plus étendu, on n'aurait qu'à ajouter le facteur $\check{a}\check{a}$ comme dans l'expression finale.

Malgré cette concision de notre énoncé, tous les théorèmes valables pour les ensembles ordonnés peuvent en être déduits.

La double proposition 0^0 veut dire : Tout élément précédant (dans l'ordre donné) un élément qui précède un élément, précédera aussi celui-ci (transitivité de la notion « ordre »). Et de plus : Tout élément précédant un élément quelconque sera différent de celui-ci et ne le suivra pas (c'est-à-dire : n'en sera pas précédé); et réciproquement.

Tout le monde en tirera aisément la conclusion, qu'aucun élément ne saurait se précéder soi-même.

L'extension, que j'ai en vue, de cette notion d'ordre pourra se nommer : une « gradation » (*Rangstufenfolge*).

Elle admet l'existence d'éléments divers comme possédant entre eux le même « degré » ou « rang », mais inférieurs (antérieurs) ou supérieurs (postérieurs) à d'autres éléments.

Pour déterminer une gradation, cinq marques (*notae*) sont essentielles, comme nous allons le voir.

De plus, il y a deux relatifs qui y jouent un rôle; l'un, ρ , ayant à répondre à la question double : Quel élément précède en rang quel élément??; l'autre, γ , ayant à répondre à cette question-ci : Quel élément possède le même rang que quel élément??

Les cinq caractères indispensables pour qu'un ensemble soit assujetti à une gradation sont (*par exemple*, car ils peuvent être choisis différemment) les suivants :

1° Entre deux éléments quelconques i, j il existe toujours cette relation : ou bien l'un, i , est inférieur en rang à l'autre, j , ou bien i est « du même rang » que j , ou bien j est inférieur à i ;

2° Si i est inférieur à j , il n'est pas de même rang que lui ;

3° Dans le même cas, j n'est pas inférieur à i ;

4° Si i est de même rang que h et h inférieur à j , alors i est inférieur à j ;

5° Il en est de même, quand i est inférieur à h et h inférieur à j .

On en déduira, peut-être encore plus facilement sans l'instrument artificiel de l'Algèbre des relatifs qu'à l'aide de celui-ci, que :

6° Tout élément est de même rang que soi-même ;

7° Si i est de même rang que j , alors j est de même rang que i ;

8° Si i est de même rang que h et h de même rang que j , alors i doit être de même rang que j ;

9° Si i est inférieur à h et h de même rang que j , alors i est inférieur à j .

Mais à l'aide de notre instrument algébrique nos cinq attributs fondamentaux seront capables d'être énoncés comme suit :

$$10^\circ \quad a\check{a} = \gamma + \rho + \check{\rho}, \quad \rho(\gamma + \check{\rho}) = 0, \quad (\gamma + \rho); \rho \notin \rho,$$

avec une dépense de treize lettres seulement!

De là, en effectuant seulement des *calculs* assez simples, mais néanmoins pas toujours faciles à découvrir, on peut déduire une foule de conclusions diverses, dont voici les plus remarquables (quelques-unes n'étant guère qu'une répétition de ce qui se rencontre déjà dans les prémisses) :

$$11^\circ \quad \gamma = \check{\gamma}, \quad \gamma; \gamma = \gamma, \quad 1'a = 1'\gamma, \quad \check{\gamma}; \gamma \notin a\check{\gamma}, \quad \gamma; \check{\gamma} \notin a\check{\gamma}.$$

$$12^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \notin 0', \quad \gamma\check{\rho} = 0, \quad \rho; \gamma \notin \rho, \quad (\gamma + \rho); (\gamma + \rho) \notin \gamma + \rho, \\ \check{\rho} \notin 0', \quad \check{\gamma}\rho = 0, \quad \gamma; \rho \notin \rho, \quad \rho; \rho \notin \rho. \end{array} \right.$$

$$13^\circ \quad \gamma = a\check{a}\check{\rho}\check{\rho}, \quad \rho + \check{\rho} = a\check{a}\check{\gamma}, \quad \rho\check{\rho} = 0.$$

Les propriétés caractéristiques de ρ , c'est-à-dire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un relatif ρ représente le principe fondamental (« primaire ») d'une gradation, se laissent énoncer explicitement, étant contenues dans cette ligne :

$$14^\circ \quad \rho; \rho \notin \rho \notin 0'a\check{a}\{\rho \vdash (\bar{a} + \rho)\}$$

ce qui implique entre autres que

$$\bar{\rho}; a\bar{\rho} \notin \bar{\rho}.$$

Cet énoncé 14° se compose d'un certain nombre de con-

ditions partielles. On peut les remplir toutes de la façon la plus générale, non seulement une à une en les résolvant séparément par rapport au relatif inconnu ρ , mais aussi simultanément en diverses combinaisons jusqu'à : toutes à la fois *sauf une*.

Trouver la racine générale de la totalité de leur système, ce serait faire un pas important vers la solution du grand problème fondamental de la théorie de l'ordre, à savoir : résoudre irréfutablement la question si le théorème suivant vaut nécessairement : *Tout ensemble peut être rangé dans un ordre simple*.

Actuellement, par exemple, personne ne saurait décidément dire s'il est possible ou non d'arranger en une simple succession toutes les courbes existantes ou imaginables dans notre espace. La propriété de pouvoir être ordonné repose-t-elle logiquement sur les attributs essentiels d'ensemble et d'ordre? La difficulté, non résolue jusqu'à ce jour, consiste, en cas d'affirmative, à l'en déduire, en cas de négative, à en prouver l'impossibilité.

Le relatif ρ étant donné, le relatif γ est complètement déterminé et aisément calculable par la première équation 13°.

Quoique sous 11° se trouvent énumérées maintes propriétés de ce « principe secondaire » γ de la gradation, celles-ci ne suffisent pas pour le caractériser entièrement. Ce relatif γ est réciproque (convertible, ou symétrique); en outre, il est non seulement transitif (ainsi que ρ et $\gamma + \rho$), mais même « copulatif », γ^2 ou $\gamma; \gamma$ *égalant* γ . Mais pour

épuiser toutes ses qualités fondamentales il faudrait effectuer certaines éliminations, dont on n'a pas pu trouver jusqu'ici la résultante sous forme explicite.

En attendant, le gain principal de ces recherches semble consister en ce qu'elles nous ont montré un moyen de construire une infinité de relatifs racines de l'équation $x; x = x$, mais non pas toutes.

A cet effet on n'a, dans l'univers du discours, qu'à choisir à volonté un certain ensemble a , pour le partager arbitrairement en groupes d'éléments ou ensembles subordonnés, lesquels enfin doivent être soumis au hasard à un ordre quelconque. L'on attribuera le même rang à tous les éléments appartenant au même groupe, et un rang inférieur (par exemple) à tout élément dont le groupe précède celui de l'autre élément dans l'ordre qu'on a bien voulu choisir pour ces groupes. Cela fait, on aura établi une gradation dont le principe primaire ρ est dès lors connu, et par suite le principe secondaire γ peut être calculé; il est du reste connu aussi indépendamment de la même manière.

Le relatif γ ainsi obtenu sera donc la racine demandée de notre équation $x^2 = x$.

Un autre profit de semblables investigations consistera en ce qu'elles fourniront une occasion à notre discipline (l'Algèbre des notions relatives et de la Logique) de montrer et de développer ses forces.

L'IDÉE D'ORDRE ET LA POSITION ABSOLUE DANS L'ESPACE ET LE TEMPS

Par BERTRAND RUSSELL,
Fellow of Trinity College, Cambridge.

Dans le présent mémoire, je me propose trois objets : 1° de distinguer deux théories, qui sont toutes deux possibles à l'égard d'un grand nombre de séries, et qu'on peut appeler respectivement la théorie absolutiste et la théorie relativiste ; 2° de prouver que c'est la première théorie qui est juste dans le cas de la série temporelle ; 3° de donner des raisons pour croire que c'est encore la même théorie qu'on doit appliquer à l'espace. Puisque mon sujet actuel est exclusivement logique, il sera bon d'indiquer dès le début jusqu'où s'étend la portée métaphysique de mes arguments. Ces arguments n'établissent pas la réalité de l'espace et du temps contre ceux qui (comme KANT) n'admettent pas non plus la réalité des événements ou des choses dans l'espace ; mais si on admet la réalité des événements et des choses dans l'espace, alors les arguments suivants prouveront que le temps et l'espace doivent aussi être réels. Ce résultat ne

réfute directement que les monadismes, tels que ceux de LEIBNIZ et de LOTZE (avant l'introduction de son unité qu'il appelle M). Les conséquences indirectes sont plus étendues, mais je ne les développerai pas.

Il faut d'abord distinguer parmi les séries celles qui *sont* des positions et celles qui *ont* des positions. Les nombres entiers, les quantités, les instants (s'il y en a) sont des positions; les collections, les grandeurs particulières, les événements ont des positions. Dans le cas général d'une série de termes qui ont des positions, il est permis de douter si les positions naissent des relations mutuelles des termes, ou si les positions sont des termes nouveaux avec lesquels les termes anciens ont des relations d'un certain type. On soutiendra la seconde théorie à l'égard de l'espace et le temps.

Tout ordre naît de relations d'un type qu'on peut appeler *asymétrique* et *transitif*. J'écris « $a R b$ » pour exprimer la proposition : « a a avec b telle ou telle relation ». Une relation est dite *symétrique* quand $a R b$ implique $b R a$; elle est dite *transitive* quand $a R b$ et $b R c$ impliquent $a R c$. Quand une relation est asymétrique, la relation de a à b diffère de celle de b à a ; on a alors un couple de relations réciproques, telles que *plus* et *moins*, *avant* et *après*, *au sud* et *au nord*. Si une telle relation est transitive, elle engendre une série. Suivant M. SCHRÖDER, je distinguerai un couple de relations réciproques par $R, \bar{R}$. Des termes $a, b, c, \dots$ sont des positions s'ils satisfont aux conditions suivantes :
1° Entre deux quelconques des termes (soient a et b) on a,

ou bien aRb , ou bien $a\check{R}b$; 2° aRb implique $b\check{R}a$ et *vice versa*; 3° aRb et bRc impliquent aRc . Une série de termes qui ont des positions (soient $\alpha, \beta, \gamma \dots$) peut se produire de deux manières : 1° Chaque terme α peut avoir une relation définie R' à un terme a ou b ou c , etc., de la série précédente; alors a est la position absolue de α , b de β , etc. Les $\alpha, \beta, \gamma \dots$ forment alors une série par corrélation, et non pas une série indépendante¹. 2° On peut avoir entre chaque couple de termes α, β ou bien une relation symétrique et transitive S , ou bien une relation asymétrique et transitive R ou $\check{R}$. On a alors une série où la position est relative, pourvu qu'on ait les conditions suivantes : 1° deux termes α, β ont une (et une seule) des relations $\alpha S \beta$, $\alpha R \beta$, $\alpha \check{R} \beta$; 2° $\alpha R \beta$ et $\beta S \gamma$ impliquent $\alpha R \gamma$; 3° $\alpha \check{R} \beta$ et $\beta S \gamma$ impliquent $\alpha \check{R} \gamma$. Avec ces conditions, on a une série définie, mais on n'a pas de position distincte de tous les termes qui ont une position; la position n'est que la propriété d'avoir la relation symétrique S avec plusieurs autres termes².

Qu'on puisse ou non montrer que cette théorie n'est jamais correcte, on peut la réfuter formellement dans le cas du temps. Dans ce cas, que nous allons maintenant examiner, les termes $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sont des événements, $a, b, c \dots$ (s'ils existent) sont des moments, S est la simultanéité, R est la priorité, et $\check{R}$ est la postériorité. La théorie

1. Voir notre article : Sur les axiomes de la Géométrie, *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VII, p. 704.

2. On remarquera que les séries à position relative sont les mêmes que celles que M. SCHROEDER appelle « gradations ». (Voir son mémoire *Sur une extension de l'idée d'ordre* dans ce volume.)

absolutiste soutient qu'il y a une relation R' entre un événement et le moment dans lequel il existe; la théorie relativiste soutient qu'il n'y a pas de moments, mais qu'il y a seulement la relation de simultanéité entre deux événements que le sens commun suppose être en même temps.

Pour la théorie du temps, il importe de dissiper tout d'abord une ambiguïté dans le mot *événement*. Ce mot peut signifier, ou bien seulement quelque chose qui existe dans un temps, sans tenir compte de sa position temporelle; ou bien ce qui existe avec sa position temporelle. C'est-à-dire, on peut définir un événement tout simplement par son contenu, ou bien par son contenu et sa position temporelle ensemble. Dans le premier sens, la migraine est un événement; dans le second, il faut spécifier une migraine particulière. Quand on parle d'un événement commun, ou d'un événement qui a lieu tous les jours à midi, on emploie le mot dans le premier sens, qui est le plus abstrait; quand on parle de la série des événements, on emploie le mot dans le sens plus concret. Comme on aura besoin de cette distinction dans toute la discussion du temps, il sera bon d'employer deux mots différents pour les deux sens. Je désignerai donc par *qualité* le sens plus abstrait, et par *événement* le seul sens plus concret. Ainsi les qualités peuvent persister ou revenir, tandis que les événements ne durent qu'un instant.

Il faut observer que la théorie relativiste doit se borner, en premier lieu, aux qualités, et n'obtient les événements que par le moyen des relations mutuelles des qualités. Car

cette théorie soutient qu'il n'y a pas vraiment des temps différents, et que par conséquent on ne peut transformer les qualités en événements par leur relation aux temps : il y a seulement les contenus du temps, c'est-à-dire les qualités, avec des relations de simultanéité ou de succession. Donc il est nécessaire de supposer que les qualités comme telles ont des relations temporelles. Ainsi si, par exemple, je ressens d'abord la douleur et ensuite le plaisir, on sera forcé de dire que la douleur comme telle précède le plaisir comme tel. On ne peut dire que cette consécution a lieu à présent, et non pas en d'autres temps, car le présent est constitué (selon la théorie relativiste) par ses contenus, dont la douleur et le plaisir forment une partie. Il est vrai qu'on peut dire, si l'on veut, que le présent est constitué par son contenu tout entier, et que l'état présent de l'univers tout entier ne peut jamais revenir. On pourrait objecter à cela que l'impossibilité d'un tel retour complet du présent n'est qu'un fait empirique, et n'est nullement une nécessité logique. Mais il vaut mieux montrer qu'en adoptant la théorie relativiste on rend ambigu le présent, et même toute la série temporelle. Car il faut toujours admettre notre proposition : la douleur comme telle précède le plaisir comme tel. Et puisque le plaisir et la douleur sont des concepts uniques, qu'on ne peut différencier par la position temporelle (si cette position n'est que relative), on ne pourra admettre aucune exception à cette proposition. Mais puisqu'il arrive malheureusement que le plaisir est parfois suivi de la douleur, il faudra aussi admettre que le plaisir comme tel précède la

douleur comme telle. Et puisque la souffrance de l'un fait souvent le bonheur d'un autre, il faudra admettre aussi que le plaisir et la douleur sont essentiellement simultanés. Mais c'est là la destruction de toute la série temporelle, qui dépend, comme toutes les autres séries, de l'incompatibilité mutuelle des relations constitutives. Le présent est devenu complètement vague; car, quoique toutes les qualités qui le composent soient simultanées, chacune d'elles est aussi avant et après chaque autre, à moins que ce ne soit une qualité qui n'a jamais existé auparavant, ou qui n'existera jamais à l'avenir. Ainsi la série temporelle s'écroule, et on est forcé de croire que tout ce qui peut exister en plus d'un seul instant est à la fois avant toute autre chose, après toute autre chose, et simultané avec toute autre chose. Le passage des qualités aux événements ne peut plus se faire, et tout l'édifice des propositions temporelles est ruiné.

Le même argument peut se présenter très simplement de la manière suivante. Nous avons admis que la simultanéité de a et b , et de b et c , entraîne celle de a et c . Mais il faut aussi admettre la possibilité de la répétition, c'est-à-dire des qualités qui existent deux fois ou plusieurs fois, ou qui persistent même pendant un temps continu (en employant pour le moment le langage du sens commun). Or, dans la théorie relativiste, la répétition d'une qualité ne signifie que sa simultanéité avec deux qualités qui ne sont point simultanées entre elles. Mais cela contredit notre axiome, qui disait que la simultanéité est une relation transitive; on voit

donc de nouveau qu'on a besoin de quelque chose de plus que des seules relations mutuelles pour transformer les qualités en événements.

De plus, une considération directe de la question rend difficile de croire que les événements simultanés n'aient absolument rien de commun en outre de ce qu'ils partagent avec les événements successifs. La succession semble indiquer entre les événements qui se succèdent une différence qui ne subsiste pas entre les événements simultanés, ce qui implique une propriété commune aux seuls événements simultanés. Mais on ne peut admettre une telle propriété dans la théorie relativiste, qui se borne strictement à la relation de simultanéité. Si l'on admettait une telle propriété, elle ne pourrait être autre chose que la position temporelle, d'où il s'ensuivrait qu'il y a des positions temporelles, distinctes de tous les événements qui ont ces positions, et que deux événements sont simultanés quand ils ont même relation à un même instant, laquelle consiste à occuper cet instant. Ainsi il est nécessaire d'admettre une qualité commune à un groupe d'événements simultanés, qui puisse les distinguer des autres événements; mais cette admission ruine la théorie relativiste du temps.

L'argument précédent peut se résumer d'une manière purement formelle. Si l'on veut arranger suivant la théorie relativiste des termes qui ont des positions, il faut que chacun ait à chaque autre une seule des trois relations $S, R, \check{R}$. Les événements satisfont à cette condition, mais les qualités n'y satisfont point. Or les événements ne diffèrent des qua-

lités qu'en ce qu'ils ont une position temporelle unique. Donc, pour éviter un cercle vicieux, il faut admettre les positions temporelles comme termes nouveaux auxquels les qualités se rapportent, et par rapport auxquels les qualités se transforment en événements.

L'argument que nous avons employé à l'égard du temps a une grande portée, et nous le trouverons utile aussi en discutant l'espace. Le théorème que je crois avoir démontré peut s'énoncer sans mention du temps, et on voit alors qu'il est évident. Il se formule comme il suit : Quand une collection de termes est susceptible d'arrangement en série, mais de sorte que quelques-uns de ses termes se trouvent dans plusieurs positions de la série, alors les termes dont il est question ne forment pas une série indépendante, mais seulement une série par corrélation.

A l'égard de l'espace, il n'existe pas d'argument aussi simple. Cela est dû principalement à trois raisons : 1° Il n'y a rien qui existe dans l'espace sans exister aussi dans le temps, tandis qu'on suppose d'habitude que les qualités mentales existent dans le temps sans exister dans l'espace. 2° On ne peut prendre comme prémisse évidente la proposition que deux choses ou deux qualités peuvent occuper le même endroit, soit en même temps, soit successivement; tandis qu'il est évident que deux événements peuvent être simultanés. 3° Le sens commun ne reconnaît rien qui ait une position fixe dans l'espace, telle que celle des événements dans le temps; au contraire, on croit que tout ce qui se trouve dans l'espace est en mouvement perpétuel.

Il faut ajouter, comme cause secondaire des difficultés de l'espace, la plus grande complexité qu'introduisent les dimensions. Pour ces raisons, il paraît impossible de prouver directement l'existence de la position absolue dans l'espace, en partant de prémisses que tout le monde admettra sans hésitation. J'essaierai cependant de montrer que la théorie relativiste a besoin de modifications qui l'exposent aux mêmes objections que celles qu'on allègue d'habitude contre la position absolue; que la théorie relativiste mène à des paradoxes et à des complications dont la théorie absolutiste est exempte; et, enfin, que tous les arguments en faveur de la théorie relativiste, tels qu'ils se trouvent par exemple chez LOTZE, portent à faux et comportent une réfutation décisive.

La théorie relativiste de l'espace a été surtout soutenue par LEIBNIZ¹ et LOTZE. On peut l'énoncer de la manière suivante. L'espace est constitué exclusivement par des relations; les termes de ces relations ne sont donc pas spatiaux. En vertu de leurs relations spatiales, ces termes apparaissent comme des points matériels. Ainsi la matière consiste, pour la Dynamique, en centres de forces ou en atomes sans extension. A un instant donné, deux atomes ont une distance donnée, mais cette distance peut changer avec le temps. Les distances de deux atomes à un troisième ont une relation qu'on appelle leur *angle*; lorsque l'angle est nul, on dit que les trois atomes sont collinéaires. Trois atomes ont une

1. Voir sa controverse avec Clarke, ap. *Phil. Schriften*, édition Gerhardt, t. VII, en particulier, p. 400.

relation qu'on appelle leur plan, et deux plans ont une relation qu'on appelle leur angle. (Je donne plus de détails que LEIBNIZ ou LOTZE, mais ces détails semblent essentiels à la théorie.) Le mouvement est une variation de distance, et est ainsi un phénomène réciproque. Tous les êtres qui ont des distances sont susceptibles de mouvement. Les distances et les angles sont des grandeurs, qui croissent ou diminuent pendant le mouvement. La *place* d'un atome n'est que l'ensemble de ses distances aux autres atomes.

Parmi tous ceux qui ont soutenu la théorie relativiste, on ne trouve personne qui l'ait développée en détail. C'est principalement à ce fait qu'on doit attribuer sa popularité. Son but est de se passer, en décrivant l'espace, de tous les termes tels que nous ne puissions, même en théorie, les identifier ou les reconnaître. Les distances, les angles, les aires et les volumes sont plus ou moins sensibles, et on peut les reconnaître (entre certaines limites). Mais les points individuels, les droites individuelles et les plans individuels sont tout à fait impossibles à identifier. Je ne puis découvrir par la simple inspection, même en théorie, si la partie de l'espace que je vois à présent est la même que celle que je voyais hier à la même heure, ou si c'est une autre partie. La théorie relativiste essaie de se passer de tout cet appareil d'êtres qu'on ne saurait ni distinguer ni reconnaître. Je vais montrer que cette théorie, quand on la développe comme il faut, est complètement incapable d'atteindre ce but. Il est vrai qu'on se passe des points; mais il reste toujours les droites et les plans, dont,

comme nous le verrons bientôt, il est impossible de se passer.

De la manière dont on l'expose d'habitude, la théorie relativiste n'admet qu'une seule relation immédiate entre deux points, savoir leur *distance*. Mais il se trouve qu'on a réellement besoin de deux relations ; il nous faut aussi ce qu'on peut appeler la *direction* ou la *droite projective*¹. On le prouve par la considération des angles. Si l'on suppose que deux atomes A, B n'ont pas d'autre relation que la distance, il faudra supposer que l'angle BAC est une relation entre les distances AB, AC. Mais il est évident que AC peut être égale à une autre distance AD sans que l'angle BAC soit égal à l'angle BAD. Ainsi les angles ne dépendent pas de la grandeur des distances. Il faut donc que les distances aient quelque propriété autre que la grandeur, et que ce soit par relation à cette autre propriété que les angles se déterminent. Cette propriété des distances est évidemment leur direction, la droite sur laquelle elles sont situées. Il s'en suit que, dans le sens où deux distances peuvent former un angle, la distance est un concept complexe, qu'on peut analyser en deux éléments : 1° la distance comme grandeur ; 2° la direction ou la droite projective. Il reste possible de regarder celle-ci comme relation entre deux atomes, de manière à ne pas abandonner la théorie relativiste ; mais on a maintenant deux relations indépendantes entre chaque couple d'atomes. Deux distances ont la relation d'être l'une plus grande que l'autre ; deux directions (pourvu

1. Voir *Revue de Métaphysique et de Morale*, art. cité, t. VII, p. 704.

qu'elles se coupent) ont la relation exprimée par leur angle.

L'avocat de la théorie relativiste pourrait essayer une théorie relativiste de la droite, c'est-à-dire qu'il pourrait soutenir que les angles sont des relations immédiates entre les distances, et que la collinéarité de deux distances ne signifie que ceci, que l'angle qu'elles forment est nul. Mais on réfuterait cette théorie par un argument formellement identique à celui que nous avons employé à l'égard du temps. La simultanéité se remplacerait par la collinéarité de différentes distances sur une même droite, et la répétition se remplacerait par l'égalité de différentes distances sur différentes droites. La distance avec sa droite remplace l'événement, tandis que la distance comme simple grandeur remplace la qualité. Le théorème général que nous avons énoncé à la fin de la discussion du temps montre alors que l'angle n'est pas formé par deux distances en tant que telles, mais seulement en vertu de leur corrélation avec les droites. On a en outre un argument spécial contre la définition de la collinéarité au moyen de l'angle. Deux distances peuvent être collinéaires sans avoir un point commun : elles ne forment alors aucun angle, et par suite elles ne forment pas un angle nul. Il est donc impossible de définir les distances collinéaires au moyen de l'angle nul¹.

La définition du plan exige une nouvelle relation fondamentale, qu'on peut regarder comme subsistant entre trois

1. Il importe d'observer qu'on ne peut pas définir la collinéarité par le moyen du théorème : $AB + BC = AC$ quand A, B, C sont collinéaires; car l'addition des distances présuppose la droite (Voir *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VII, p. 707).

points matériels ou entre deux droites qui se coupent. Car deux plans ABC, ABD forment un angle, qui ne dépend pas des distances mutuelles de A, B, C, D. Il faut donc que le plan soit une nouvelle relation indépendante de la distance.

Puisque les droites et les plans sont indépendants des distances, ils peuvent varier sans variation de distance. Le mouvement relatif de deux atomes peut donc consister en une variation de la distance, de la direction, ou de toutes les deux. Pour le mouvement relatif de trois atomes, il faut ajouter la variation du plan. Donc, lorsque tous les points matériels d'un système ont conservé sans variation leurs distances et leurs angles, il doit rester douteux, même dans la théorie relativiste, s'il y a eu une rotation absolue du système entier : il se peut toujours que toutes les droites et tous les plans déterminés par le système matériel aient changé, même lorsque les distances et les angles sont demeurés constants, et lorsque, par conséquent, il n'existe aucun mouvement relatif qu'on puisse observer. De même, lorsqu'il y a un mouvement sensible, il reste toujours à savoir si en outre il y a eu, ou non, une rotation absolue du système entier.

Dans la théorie relativiste, il est assez difficile de savoir ce qu'on doit dire de l'intersection. Deux droites que déterminent quatre points matériels AB, CD peuvent se couper ou ne pas se couper. Elles se coupent quand il y a un point matériel possible, soit E, qui soit collinéaire avec AB et CD en même temps. Mais on pourrait objecter avec raison que

cela ne peut être l'analyse ultime de l'intersection. Il faut qu'il y ait des conditions pour la possibilité du point E. On ne trouve pas ces conditions dans la coplanarité de A, B, C, D; car dans l'espace hyperbolique, le cas de la non-intersection des droites coplanaires est aussi général que le cas de l'intersection, et dans l'espace euclidien les parallèles ne se coupent que par une fiction. La théorie relativiste ne saurait donc nous dire la raison pour laquelle certains couples de droites se coupent et d'autres ne se coupent point.

De nouvelles difficultés surgissent dans la considération des aires et des volumes. Il faut admettre que trois points matériels A, B, C déterminent un triangle qui a une aire quelconque. Mais qu'est-ce que cette aire? Comme la distance est une relation entre deux points, de même l'aire devrait être une relation entre trois points. Mais que dirait-on des aires qui ne sont point triangulaires? N'ont-elles aucune signification que si on les entend comme sommes de triangles? Voilà assurément un grand paradoxe. Il faudrait admettre aussi que les volumes sont des relations entre quatre points, et par conséquent sont primitivement des tétraèdres. On n'a jamais ouvertement soutenu la théorie relativiste des aires et des volumes, mais on ne saurait nier que la théorie générale demande ce développement. Il est assurément très paradoxal de soutenir qu'une sphère ne renferme pas une certaine quantité d'espace, mais qu'elle contient un volume seulement en ce sens, qu'elle est la somme d'un nombre infini de tétraèdres infinitésimaux, dont chacun est une relation entre quatre points matériels.

On pourrait suggérer que les aires et les volumes ne sont pas du tout des quantités simples, mais ne sont que des sommes de points matériels possibles intérieurs à une courbe ou à une surface donnée et fermée. Mais alors il nous faudrait une méthode pour découvrir les conditions de la possibilité de tels points. Et ces conditions, la théorie relativiste ne nous permet pas de les trouver.

Une des plus grandes objections logiques à la théorie relativiste est celle-ci, qu'elle introduit comme fondamentales les propositions problématiques, tandis que ces propositions, à ce qu'il semble, doivent toujours reposer sur un fondement catégorique. Ces difficultés surgissent à l'occasion des distances possibles. Car les seules distances qui soient actuelles à un moment donné sont les distances auxquelles se trouvent à ce moment des atomes actuels; mais il faut avouer (ce que postule le mouvement) que toutes les autres distances sont possibles. Il se peut qu'il y en ait qui n'existent jamais, mais celles-ci sont quand même essentiellement possibles. Dans la théorie relativiste, il est difficile de déterminer la raison pour laquelle il est évident que ces distances sont possibles; il est même difficile de donner un sens à la possibilité dans une telle assertion. Dans la théorie absolutiste, toutes les distances existent toujours comme relations entre des points actuels; dans la théorie relativiste, une telle explication n'est pas permise.

Il y a un autre résultat curieux de la théorie relativiste, c'est que toutes les propositions géométriques doivent avoir une référence intrinsèque à un temps hypothétique. Elles

nous disent ce qui arrivera *si* certaines conditions se réalisent à un moment quelconque; mais il est impossible d'ôter cette référence au temps. Car il n'y a rien qui ait des relations spatiales (distance ou droite) sans être capable de mouvement; donc les relations spatiales ne découlent pas de la nature des termes qui subissent les relations, puisque, s'il en était ainsi, la relation devrait subsister éternellement. Il n'existe donc pas de propositions telles que « A et B sont distants d'un mètre ». Il nous faudra dire « A et B ont maintenant cette distance (ou bien, ils l'avaient, ou ils l'auront) ». Il est vrai qu'il pourrait y avoir deux atomes dont la distance ne changerait jamais, mais s'il y en avait, ce ne serait qu'un fait purement empirique. Du reste, la science semble indiquer qu'il n'y en a point. Puisque, dans la théorie relativiste, la distance et la droite sont le principe de tout ce qui est spatial, et puisqu'il n'y a pas d'êtres qui aient éternellement entre eux une certaine distance ou une certaine droite, il s'ensuit que les propositions géométriques ont toutes une référence à un moment auquel les distances et les droites en question sont censées être actuelles, c'est-à-dire être des relations que soutiennent à ce moment des atomes actuels. Par exemple, la huitième proposition d'EUCLIDE devrait s'énoncer : « Si à un moment quelconque trois atomes A, B, C ont les mêmes distances mutuelles que trois autres atomes D, E, F, alors, à ce moment, etc. » Il n'existe pas de triangle ABC exempt de changement, qu'on pourrait considérer sans aucun rapport au temps. Mais il est difficile de croire que de telles

propositions hypothétiques puissent être ultimes ou irréductibles.

Ainsi la théorie relativiste renferme toutes les prétendues difficultés de la théorie absolutiste. Elle implique l'admission des droites et des plans, qui, quoiqu'ils soient des relations entre les points matériels, peuvent pourtant varier quand même aucune variation *n'apparaît* dans les relations des points dont il est question; et ces droites et ces plans sont indiscernables, précisément dans le même sens où le sont les points dans la théorie absolutiste. De plus, la théorie relativiste renferme d'autres difficultés qui lui sont propres. Elle rend hypothétiques toutes les propositions de la Géométrie, et leur donne à toutes une référence au temps. Elle réduit à l'absurdité la théorie des aires et des volumes. Elle rend impossible l'énonciation de la condition sous laquelle deux droites forment un angle, condition qui ne peut être seulement, comme dans la théorie absolutiste, que les deux droites aient un point commun. Et tandis que la théorie absolutiste peut se contenter d'une relation fondamentale, la droite, la théorie relativiste rend extrêmement compliqué l'appareil nécessaire des relations spatiales fondamentales.

Puisque les arguments contre la position absolue ont convaincu le monde philosophique presque entier, il sera bon peut-être de leur répondre un à un. Ils se trouvent réunis dans la *Métaphysique* de LOTZE (§ 108 et suivants). LOTZE les confond avec les arguments en faveur de la

subjectivité de l'espace (problème tout différent, ce qui résulte évidemment de l'adhésion de KANT à la théorie absolutiste¹). En omettant les arguments sur la subjectivité de l'espace, ce qui suit est un sommaire des arguments de LOTZE contre la position absolue.

1° Les relations ne subsistent que comme (α) des représentations dans une conscience qui crée les relations, ou (β) des états internes des éléments réels qu'on dit soutenir ces relations (§ 109).

2° L'être de l'espace vide n'est ni l'être qui cause des effets (être qui appartient à une chose), ni la seule validité d'une vérité, ni le fait d'être représenté par nous. Quelle espèce d'être est-ce donc? (§ 109).

3° Tous les points se ressemblent complètement, et pourtant chaque couple a une relation qui lui est propre; mais puisque tous les couples se ressemblent, la relation devrait être la même pour tous les couples (§ 111).

4° L'être de chaque point doit consister en ce qu'il se distingue de tout autre point, et prend une position invariable par rapport à tout autre point. Donc l'être de l'espace consiste en ce que ses divers points se conditionnent mutuellement et activement, ce qui constitue en vérité une interaction (§ 110).

5° Si les relations des points n'étaient qu'un pur fait, on pourrait les changer, du moins dans la pensée; mais cela n'est pas possible: on ne peut mouvoir les points, ni s'imaginer des trous dans l'espace. Cette impossibilité

1. Voir VAISINGER, *Commentar*, p. 189-190.

s'explique facilement d'une manière psychologique (§ 110).

6° S'il y a de vrais points, ou bien (α) un point crée d'autres points avec les relations nécessaires par rapport à lui, ou bien (β) il amène d'autres points déjà existants dans les relations convenables qui sont indifférentes à la nature des points en question (§ 111).

1° Au fond, ces arguments dépendent tous du premier, c'est-à-dire du dogme sur la nature des relations. Puisqu'il est essentiel à la théorie absolutiste de nier ce dogme, j'en ferai pour commencer un examen assez minutieux. « Toutes les relations, nous dit LOTZE, n'existent que comme représentations dans une conscience qui crée les rapports, ou comme conditions internes dans les éléments réels, qui, comme on a l'habitude de le dire, soutiennent ces relations » (§ 109). LOTZE semble croire que ce dogme est évident. Voyons cependant jusqu'où nous en mènent les conséquences.

Il semble que si l'on accepte le dogme, il faut distinguer deux espèces de relations : (α) celles qui sont des représentations dans une conscience qui crée les rapports, et (β) celles qui sont des états internes des éléments entre lesquels on suppose une relation. Il se peut que ces deux espèces ne soient qu'une seule en dernière analyse, mais il sera mieux pour le moment de les supposer différentes. Commençons par les relations qui ne sont que des représentations dans une conscience créatrice de relations. Il faut supposer que ces représentations sont des croyances en des propositions qui affirment des relations entre les termes

qui paraissent être en rapport l'un avec l'autre. Car il faut admettre qu'on peut croire à de telles propositions, et que de telles croyances semblent seules capables d'être prises comme représentations dans lesquelles se trouve la véritable essence des relations. Mais si les relations auxquelles on croit n'ont pas d'être, excepté dans les croyances mêmes, il résulte nécessairement que ces croyances sont fausses. Si je crois que A est le père de B, quand cela n'a pas lieu, je me trompe; et si je crois que A est à l'ouest de B, quand l'ouest n'existe que dans mon esprit, je me trompe encore. Donc cette première classe de relations n'a aucune validité, et ne consiste qu'en une collection de croyances erronées. Les objets sur lesquels portent ces croyances sont en effet sans aucun rapport entre eux; il ne peut même (si l'on ne considère que cette classe de relations) y avoir *des objets*, car le pluriel implique la diversité, et toute croyance en la relation de diversité doit être erronée. Il ne peut même y avoir un seul objet distinct de moi-même, puisqu'un tel objet devrait avoir envers moi la relation de diversité, ce qui est impossible. Donc, en ce qui concerne cette première classe de relations, on se trouve acculé à un monisme rigide.

Mais que dira-t-on maintenant des relations de la seconde classe, qui se réduisent à des états internes des objets qui paraissent être en relation entre eux? Il faut observer que cette classe de relations présuppose une pluralité d'objets (deux objets au moins), et qu'elle implique par suite la relation de diversité. Or s'il y a quelque diversité,

elle ne peut être (nous l'avons déjà vu) une relation de la première classe; donc elle doit être elle-même de la deuxième classe. C'est-à-dire, le seul fait que A est différent de B doit se réduire à des états internes de A et de B. Mais n'est-il pas évident qu'il faut d'abord distinguer A de B avant qu'on puisse distinguer les états de A des états de B? c'est-à-dire, A et B doivent être des êtres différents, avant qu'ils puissent avoir différents états. Si l'on voulait dire que A et B se ressemblent complètement, et sont pourtant deux êtres, il serait encore plus évident que leur diversité ne résulte pas de la différence des états internes, mais qu'au contraire elle y est supposée. Donc le fait d'admettre qu'il y a des états internes de différentes choses détruit la théorie qui trouve l'essence des relations dans ces états internes. Nous nous trouvons ainsi ramenés à la notion que les relations apparentes de deux choses consistent en des états internes d'une seule chose, ce qui nous porte de nouveau au monisme rigide qu'impliquent les relations du premier type.

Ainsi la théorie des relations de LOTZE se réduit à cette affirmation qu'il n'y a point de relations. Les adhérents les plus logiques de ladite théorie (tels que SPINOZA et M. BRADLEY) l'ont reconnu; ils n'ont admis en conséquence qu'une seule chose, Dieu ou l'Absolu, et un seul type de proposition, à savoir celle qui attribue un prédicat à l'Absolu. Pour discuter ce développement de la susdite théorie des relations, il nous sera nécessaire d'examiner la doctrine du sujet et du prédicat.

Selon cette théorie, toute proposition vraie ou fausse

attribue un prédicat à un sujet, et par conséquent il n'y a qu'un sujet (car la proposition qu'il y a plusieurs sujets ne serait pas de la forme qui est seule admise comme possible). Les conséquences de cette doctrine sont si étranges, que je ne puis me persuader que ceux qui la soutiennent en aient aperçu les résultats.

La théorie qu'il n'y a qu'un substantif, et que tout le reste n'est qu'un adjectif, qui n'est rien excepté comme attribut du substantif, cette théorie semble demander qu'on néglige complètement la plupart des propositions, et qu'on analyse faussement celles qui restent. De plus, la théorie est contradictoire. Car si l'Absolu a des prédicats, alors il y a des prédicats; mais la proposition « il y a des prédicats » n'est pas de la forme qui seule est admise par la théorie. Nous ne pouvons échapper à cette conséquence en disant que les prédicats ne font que qualifier l'Absolu; car l'Absolu ne peut être qualifié par un rien, de sorte que les prédicats doivent être quelque chose, et que la proposition « il y a des prédicats » est antérieure logiquement à cette autre, « l'Absolu a des prédicats. » Ainsi la théorie même demande à titre de prémisse une proposition qui n'attribue pas un prédicat à un sujet. De plus, cette proposition implique la diversité, car même s'il n'y avait qu'un seul prédicat, ce prédicat devrait être différent du seul sujet. Et puisqu'il y a un prédicat, le prédicat est un être, et sa prédicabilité de l'Absolu est une relation entre lui et l'Absolu. Ainsi la proposition même qui servait de type pour les propositions qui n'expriment pas une relation, se trouve,

malgré tout, exprimer une relation. De plus, c'est une relation qui ne modifie nullement la nature de ses termes. Car le sujet et le prédicat sont tout simplement ce qu'ils sont, ni l'un ni l'autre ne se trouve modifié par son rapport à l'autre. Être modifié par la relation ne pourrait signifier que ceci : avoir quelque autre prédicat ; et ainsi nous serions entraînés dans un progrès à l'infini. Bref, nulle relation ne modifie jamais aucun de ses termes. Car si c'est une relation entre A et B, c'est entre A et B que c'est une relation, et dire que la relation modifie A et B, c'est dire qu'en effet c'est une relation entre C et D. Dire que deux termes qui ont une relation seraient différents s'ils n'avaient pas cette relation, c'est faire une remarque complètement stérile ; car s'ils étaient différents, ils seraient *autres*, et ce ne serait point ces termes, mais un autre couple, qui n'aurait pas la relation dont il est question. L'idée qu'un terme peut être susceptible de modification vient de ce qu'on néglige d'observer l'éternelle identité de tous les concepts logiques, qui seuls peuvent être constituants du monde ou des propositions¹. Ce qu'on appelle modification ne consiste qu'en ceci, que certains termes ont à un moment avec d'autres termes certaines relations qu'ils n'ont pas à un autre moment ; mais le terme qui a à un moment une relation qu'il n'a pas à un autre moment doit rester invariable, sans cela ce ne serait point ce même terme qui aurait cessé d'avoir ladite relation.

En somme, l'objection générale contre la théorie des

1. Voir G.-E. MOORE, *The Nature of Judgment*, ap. *Mina*, N. S. N° 30.

relations telle que LOTZE l'énonce est celle-ci : La théorie implique que toute proposition consiste dans l'attribution d'un prédicat à un sujet, et que cette attribution n'est pas une relation. On objecte que le prédicat est ou quelque chose, ou rien. S'il n'est rien, on ne peut l'attribuer, et la prétendue proposition disparaît. S'il est quelque chose, la prédication exprime une relation; et de plus, c'est une relation précisément de cette espèce que la théorie ne veut pas reconnaître. Ainsi dans les deux cas la théorie se trouve condamnée, et il ne reste aucune raison pour croire que toutes les relations peuvent se réduire à l'attribution des prédicats aux sujets.

2° Je passe à la deuxième des objections de LOTZE contre l'espace vide. Cette objection est encore d'un caractère un peu abstrait et logique, mais elle est bien plus facile à réfuter, puisqu'elle dépend d'une opinion qui est plus ou moins propre à LOTZE. Elle affirme qu'il n'y a que trois espèces d'être, dont aucune n'appartient à l'espace. Ces trois espèces sont : (α) l'être des choses, qui consiste dans l'activité ou le pouvoir de produire des effets; (β) la validité d'une vérité; (γ) l'être qui appartient aux contenus de nos représentations.

On répond à cet argument en faisant observer qu'il n'y a qu'une seule espèce d'être, qui est l'être *simpliciter*, et une seule espèce d'existence, qui est l'existence *simpliciter*. Je crois que l'être et l'existence appartiennent tous deux à l'espace vide; cependant, la discussion de l'existence n'appartient guère à notre question, mais plutôt à la question

que LOTZE confond avec la nôtre, savoir celle de la réalité ou de la subjectivité de l'espace. Il sera bon d'expliquer d'abord la distinction entre l'être et l'existence, et de revenir ensuite aux trois espèces de l'être selon LOTZE.

L'être est ce qui appartient à tout terme concevable, à tout objet possible de la pensée, bref à tout ce qui peut entrer dans une proposition quelconque, vraie ou fausse, et à toute proposition vraie ou fausse. L'être appartient à tout ce qu'on peut énumérer. Si A est un terme qu'on peut énumérer comme *un*, il est évident que A est quelque chose, et par suite que A est. « A n'est pas » est toujours, ou bien faux, ou bien un non-sens. Car si A n'était vraiment rien, on ne saurait dire que A n'est pas; « A n'est pas » implique qu'il y a un terme A dont on nie l'être, et par conséquent que A est. Ainsi, pourvu que « A n'est pas » ne soit point un son vide de sens, cette assertion est nécessairement fausse; quel que soit A, il est certain que A est. Les nombres, les chimères, les espaces à quatre dimensions, tous possèdent l'être; car si ce n'étaient pas des êtres, nous ne pourrions émettre aucune proposition sur leur compte. Ainsi l'être est un attribut général de tous les termes, et mentionner un terme, c'est prouver qu'il est.

L'existence, au contraire, est une prérogative que ne possèdent que certains êtres. Exister, c'est avoir une relation définie à l'existence (relation, soit dit en passant, dont l'existence même ne jouit pas). On voit ici la faiblesse de la théorie *existentielle* du jugement, à savoir de la théorie selon laquelle toute proposition porte sur quelque chose

qui existe. Car même si on supposait cette théorie, il faudrait admettre que l'existence possède l'être, et que l'existence même n'existe pas. Ainsi la considération de l'existence même nous mène à des propositions qui ne sont pas existentielles, et contredit ladite théorie. Il semble qu'en effet la théorie soit due à ce qu'on a négligé la distinction entre l'être et l'existence. Cette distinction est pourtant nécessaire, si l'on veut pouvoir nier l'existence de quoi que ce soit. Car ce qui n'existe pas doit être quelque chose, sans cela ce serait un non-sens de nier son existence; donc il nous faut le concept de l'être, comme ce qui appartient même à ce qui n'existe pas.

Revenons maintenant aux trois espèces d'être selon LOTZE; il est évident que ses vues sont pleines de confusions.

(α) L'être d'une chose, dit LOTZE (suivant LEIBNIZ comme d'habitude), consiste dans l'activité. Or l'activité est une notion fort complexe, que LOTZE n'a jamais réussi à analyser. Mais il est clair en tout cas que s'il y a de l'activité, tout ce qui est actif doit être et exister, dans les sens que j'ai expliqués ci-dessus. On m'accordera aussi, je crois, que l'existence est conceptuellement distincte de l'activité. Il se peut que l'activité soit une marque universelle de ce qui existe, mais il ne se peut guère que l'activité et l'existence soient synonymes. Il s'ensuit que LOTZE a besoin de la proposition très douteuse que tout ce qui existe doit être actif. On trouve la vraie réponse à cette proposition : 1° en réfutant les arguments allégués en sa faveur, 2° en prouvant que l'activité implique l'existence du temps, qui ne

peut lui-même être actif. Mais pour le moment nous pouvons nous contenter de constater que, puisque l'existence et l'activité sont logiquement distinctes, il ne peut y avoir d'absurdité logique à supposer que quelque chose existe sans être actif.

(β) La validité d'une vérité, qui est la seconde des espèces d'être selon LOTZE, n'est effectivement pas une espèce d'être du tout. En premier lieu, l'expression est mal choisie; ce que LOTZE veut dire, c'est la vérité d'une vérité, ou plutôt la vérité d'une proposition. Or une proposition est vraie quand elle a un certain rapport à la vérité, et la vérité d'une proposition en présuppose l'être. Et quant à l'être, les propositions fausses sont au même niveau que les propositions vraies, puisqu'une proposition ne saurait être fausse si elle n'était pas du tout. Ainsi la validité n'est pas une espèce de l'être, mais l'être appartient également aux propositions valides et aux invalides.

(γ) L'être qui appartient aux contenus de nos représentations est un sujet sur lequel il existe partout la plus grande confusion. LOTZE le décrit comme le fait d'être représenté par nous (« *ein Vorgestelltwerden durch uns* »). Il est à croire que LOTZE regarde l'âme comme créatrice en quelque sorte; ce qu'elle se représente est censé acquérir une espèce d'existence qui, sans cela, ne lui appartiendrait pas. Une théorie de cette espèce est essentielle à toute forme de kantisme, c'est-à-dire à la théorie selon laquelle des propositions, auxquelles nous croyons uniquement parce que l'âme est constituée de sorte que nous ne pouvons nous empêcher

de les croire, peuvent être vraies en vertu de notre croyance. Mais la théorie entière repose, si je ne me trompe, sur ce qu'on a négligé la distinction fondamentale entre une idée et son objet. Ayant négligé la notion de l'être, on a supposé que ce qui n'existe pas n'est rien. Voyant que les nombres, les relations, et beaucoup d'autres êtres, n'existent pas hors de l'esprit, on a supposé que les pensées dans lesquelles on pense à ces êtres créent actuellement leurs propres objets. Tout le monde (à l'exception des philosophes) peut voir la différence entre un arbre et mon idée d'un arbre, mais peu de gens voient la différence entre le nombre 2 et mon idée de ce nombre. Et pourtant la distinction est aussi nécessaire dans un cas que dans l'autre. Je ne pense pas le nombre 2, mais je pense au nombre 2. Car si l'on suppose que je pense le nombre 2 même, alors 2 est une de mes pensées, et par conséquent ce 2 diffère du 2 qui est une pensée de quelque autre. On ne pourra donc dire qu'il y a un nombre 2, auquel pensent les diverses personnes; il y aura autant de 2 qu'il y a d'esprits. On dira que tous ces 2 ont quelque chose en commun. Mais cela ne pourra être autre chose qu'une autre idée, qui consistera conséquemment elle-même en autant de différentes idées qu'il y a d'esprits. Cela nous entraîne dans un progrès à l'infini. Il s'ensuit, non seulement que deux personnes ne pourront pas penser à la même idée, mais que leurs idées n'auront même rien en commun, s'il n'y a pas des idées qui n'existent pas comme telles dans aucun esprit, quoiqu'elles soient les objets des pensées de divers esprits. Les objets

de la pensée possèdent l'être, qu'on y pense ou non ; et c'est parce qu'ils sont qu'on peut y penser. Leur être n'est point un résultat, mais une condition, du fait que nous y pensons. Mais quant à l'existence d'un objet de la pensée, on ne peut rien inférer du fait qu'il est pensé, car il est certain que l'objet n'existe pas dans la pensée même qui y pense. Donc finalement, aucune espèce particulière de l'être n'appartient aux objets de nos représentations en tant que tels. Par cette conclusion, on vient à bout du deuxième argument de LOTZE.

3° Le troisième argument de LOTZE a été très populaire, depuis que LEIBNIZ l'a d'abord introduit. On affirme que tous les points sont exactement semblables, et que par conséquent deux d'entre eux doivent avoir la même relation mutuelle que deux autres quelconques ; cependant il se trouve que leurs relations mutuelles doivent être différentes d'un couple à l'autre, et même, selon Lotze (quoiqu'en ceci il se trompe), que la relation de chaque couple doit être propre à ce couple seul. On verra que cet argument dépend encore de la théorie logique que nous avons déjà examinée, laquelle prend pour fondamentales les propositions qui ont un sujet et un prédicat. Comme dans l'identité des indiscernables chez LEIBNIZ, être exactement semblable ne peut signifier qu'une chose : ne pas avoir des prédicats différents. Mais quand on a reconnu qu'il n'y a pas de distinction fondamentale entre les sujets et les prédicats, on voit que deux termes simples quelconques doivent différer d'une manière immédiate ; il y en a deux, et c'est là le tout de leurs diffé-

rences. Les termes complexes, il est vrai, ont des différences qu'on peut trouver par l'analyse. Les constituants de l'un pourront être A, B, C, D, tandis que les constituants de l'autre seront A, E, F, G. Mais les différences entre B, C, D d'une part et E, F, G d'autre part restent toujours des différences immédiates, et la source de toute différence médiate doit se trouver dans des différences immédiates. C'est en effet une simple erreur de logique de supposer que s'il y a une distinction ultime entre les sujets et les prédicats, les sujets peuvent se distinguer entre eux par la différence des prédicats qui leur conviennent. Car la proposition, que deux sujets diffèrent quant à leurs prédicats, présuppose qu'il y a deux sujets; donc la diversité immédiate des sujets est antérieure à celle qu'on obtient par le moyen des prédicats. Et plus généralement, deux termes ne sauraient se distinguer primitivement par la différence de leurs rapports à d'autres termes; car la différence du rapport présuppose deux termes distincts, et ne peut être par conséquent la raison de ce que les deux termes sont distincts. Si donc il y a une diversité quelconque, il faut qu'il y ait une diversité immédiate, et cette espèce de diversité a lieu entre les divers points de l'espace.

Quand on a établi cette diversité immédiate, on ne trouve plus de difficulté dans la diversité dérivée, qui consiste en ce que les points diffèrent quant à leurs relations, non seulement entre eux, mais aussi des objets qui les occupent. Ils semblent avoir une complète analogie logique avec les couleurs, les sons ou les odeurs. Deux couleurs, ou deux

odeurs simples, n'ont aucune différence intrinsèque, excepté la diversité immédiate; mais elles ont, comme les points, différentes relations avec d'autres termes.

D'où vient donc la plausibilité de cette opinion, que tous les points se ressemblent complètement? Je crois que cette opinion ne vient que d'une illusion psychologique, qu'on doit attribuer au fait que nous ne pouvons nous rappeler un point de manière à le reconnaître si nous le voyons une seconde fois. Il est facile de distinguer (entre certaines limites) les points qu'on voit simultanément; mais, quoique nous soyons en mouvement perpétuel, de sorte que nous nous trouvons toujours parmi de nouveaux points, il nous est complètement impossible de découvrir ce fait par les sens, et nous ne reconnaissons les endroits que d'après les objets qu'ils contiennent. Mais cela ne paraît être qu'une espèce d'aveuglement de notre part : je ne vois aucune difficulté à supposer une différence immédiate entre les points, comme entre les couleurs, mais une différence telle que nos sens ne sont pas construits de manière à la reconnaître. Prenons une analogie. Supposons un homme qui se rappelle très mal l'apparence des personnes. Il saura à chaque moment s'il voit une personne ou plusieurs, mais il ne saura pas s'il a vu les mêmes personnes auparavant. Il pourrait être amené ainsi à définir les gens d'après la chambre dans laquelle il les a vus, et il pourrait supposer contradictoire la théorie qu'une personne n'est pas une simple propriété d'une chambre, mais qu'elle est capable de changer de chambre. En cela cependant il se trompe-

rait. Et il en est des points comme des personnes : l'impossibilité de les reconnaître doit être attribuée, non pas à l'absence d'individualité, mais exclusivement à notre incapacité.

4° Le quatrième argument de LOTZE essaie d'effectuer une réduction à l'absurde, en prouvant que dans la théorie absolue les points doivent agir l'un sur l'autre. L'être d'un point, nous dit LOTZE, doit consister en ce qu'il se distingue de tout autre point, et qu'il prend envers tout autre une position invariable. Beaucoup de sophismes se trouvent renfermés dans cet argument. Il y a d'abord ce qu'on peut appeler le sophisme du ratiocinateur, qui consiste à supposer qu'on doit expliquer toute chose en montrant que c'est quelque autre chose. Ainsi pour LOTZE l'être d'un point doit se trouver dans sa différence à l'égard des autres points, tandis qu'en vérité son être est tout simplement son être. Loin d'être expliqué par quelque chose d'autre, l'être d'un point est une présupposition de toutes les autres propositions au sujet du point, telles que la proposition que le point diffère des autres points. LOTZE suggère par son langage que le point se distingue des autres par une espèce d'affirmation de son *moi*, comme s'il pouvait ne pas être différent, s'il ne trouvait pas bon de différer. Cette suggestion conduit à la conclusion, que les relations entre les points sont une espèce d'interaction. Puisqu'il croit que l'activité est essentielle à l'existence, LOTZE ne peut se figurer d'autre relation entre les existences que celle de l'interaction. Cette idée se dissipe immédiatement par une analyse de l'interaction.

L'interaction présuppose beaucoup d'autres relations, et implique dans sa forme habituelle la distinction entre une chose et ses qualités, distinction qui dépend de la logique scolastique que nous avons déjà critiquée. Car parler de l'interaction plutôt que de la causalité implique qu'il y a des choses qui persistent pendant un certain temps, et dont les états changent de temps en temps. De plus l'interaction présuppose la causalité, et la pluralité des choses. Elle présuppose donc les relations suivantes : 1° la diversité des choses ; 2° la diversité des états des choses ; 3° la simultanéité ; 4° la succession ; 5° la causalité ; 6° la relation entre une chose et ses états. Et pourtant LOTZE suppose que cette notion, qui, nous le voyons, implique dans son analyse six relations plus simples, est la relation fondamentale par excellence ! Il n'est guère surprenant si des absurdités résultent d'une telle supposition, mais les absurdités sont propres à LOTZE, et non pas à l'espace. Les relations des points ne sont pas des interactions. Ce sont des relations éternelles entre des êtres, pareilles en cela à la relation de 1 à 2, ou à celle de l'interaction elle-même à la causalité. Les points ne s'assignent pas réciproquement leurs positions ; ils *n'ont* pas strictement de position, puisqu'ils *sont* des positions. Comme tous les autres êtres, ils ont éternellement les relations qu'ils ont. L'argument entier repose, on le voit, sur un dogme absurde, soutenu par une logique fausse et scolastique.

5° Le cinquième argument semble destiné à prouver l'apriorité de l'espace dans un sens kantien. Il y a, nous

dit-on, des propositions nécessaires sur la nature de l'espace, ce qui montre que cette nature n'est pas un « simple fait ». On en veut inférer que l'espace est une intuition *a priori*, et on donne une raison psychologique de l'impossibilité de s'imaginer des trous dans l'espace. L'impossibilité des trous paraît être ce qui s'appelle une nécessité de la pensée. Cet argument nécessite de nouveau une discussion logique. En ce qui concerne les nécessités de la pensée, la théorie kantienne semble amener ce résultat curieux, que tout ce qu'on ne peut s'empêcher de croire est faux. Dans le cas actuel, ce qu'on ne peut s'empêcher de croire, c'est quelque chose qui se rapporte à la nature de l'espace, non pas à celle de notre esprit. L'explication qu'on nous offre, c'est qu'il n'y a point d'espace hors de l'esprit; d'où j'infère que toutes nos croyances inévitables au sujet de l'espace sont erronées. Du reste, on n'a qu'à pousser l'analyse un peu plus loin pour revenir à la région des « simples faits »; car la nature de l'esprit reste encore un simple fait.

La théorie kantienne de la nécessité, que Lotze adopte ici, paraît radicalement fausse. En un certain sens, tout n'est qu'un simple fait. Une proposition est dite être prouvée quand on la déduit de certaines prémisses; mais il faut tout simplement admettre les prémisses mêmes, ainsi que la proposition qu'elles impliquent la conclusion. Ainsi dans un certain sens toute prémisses est un simple fait. Mais en revanche il paraît qu'il n'y a aucune proposition vraie dont on peut dire qu'elle aurait pu être fausse.

On pourrait tout aussi bien dire que le rouge aurait pu être un goût au lieu d'être une couleur. Ce qui est vrai, est vrai; ce qui est faux, est faux, et il n'y a rien de plus à dire. La nécessité semble être une notion plutôt psychologique que logique. Il y a certaines propositions (notamment celles qu'impliquent un grand nombre d'autres propositions que nous croyons être vraies) dont il nous semble presque impossible de douter. Nous les appelons alors nécessaires¹; et telles sont quelques-unes des propositions de la Géométrie. Il semble donc qu'on ne peut passer par un argument valable de l'impossibilité que nous expérimentons d'imaginer des trous dans l'espace à la conclusion qu'il n'y a pas d'espace excepté dans notre imagination.

6° On sera bientôt quitte du dernier argument. Lotze soutient, si je le comprends bien, que si les points sont des êtres indépendants, nous pouvons nous figurer qu'un nouveau point peut acquérir l'existence. Ce point devra avoir avec les autres points les relations qu'il faut. Ou bien il crée les points avec les relations, ou bien il crée seulement les relations aux points qui existent déjà. Or il faut admettre que s'il y a des points réels, il n'est pas contradictoire de supposer que certains d'entre eux n'existent pas. Mais à la rigueur aucune proposition isolée n'est contradictoire. La plus voisine d'une contradiction est celle-ci : « Aucune proposition n'est vraie »; car cela implique que cette proposition elle-même est vraie. Mais même ici il n'est pas strictement contradictoire de nier l'implication.

1. Voir G.-E. MOORE, *Necessity*, ap. *Mind*, N. S. N° 35.

On trouve partout des propositions qu'on n'accepte que parce qu'elles sont évidentes; tel est le principe de contradiction lui-même. Il paraît que l'implication réciproque de tous les points de l'espace en est une autre; on nie la supposition de LOTZE pour la même raison qu'on nie qu'une proposition peut être vraie et fausse en même temps, c'est-à-dire parce que les deux suppositions sont évidemment fausses. Mais si par impossible un point qui n'existait pas auparavant venait à acquérir subitement l'existence, il ne créerait pas de nouveaux points, mais il aurait les relations qu'il lui faut avec les autres points. Comme tout ce qui est capable d'exister, le point aurait déjà possédé l'être, et à titre d'être il aurait eu éternellement avec les autres points les mêmes relations que celles qu'il aura quand il existe. Ainsi l'argument de LOTZE repose ici comme ailleurs sur une logique vicieuse, et on le réfute facilement par des opinions plus correctes sur la nature du jugement.

Je n'ai pas critiqué en détail les arguments habituels contre la position absolue dans le temps, puisqu'ils se trouvent tous parmi les arguments que nous avons examinés au sujet de l'espace. Outre les paradoxes de la théorie relativiste, il faut admettre en faveur de la théorie absolutiste sa grande simplicité en comparaison de son adversaire. Cela est évident en ce qui concerne le mouvement. Dans la théorie relativiste, il est essentiel à un mouvement quelconque de spécifier toutes les variations de distance et d'angle par rapport à tous les autres atomes de l'univers, puisque toutes les combinaisons sont possibles. Mais, dans

la théorie absolutiste, on n'a dans la définition d'un mouvement qu'un seul changement de relation; l'atome qui était en un point est maintenant en un autre point. Les relations géométriques sont en premier lieu des relations entre des points; ce n'est que par corrélation qu'elles deviennent des relations entre des atomes. Ainsi les propositions de la Géométrie sont éternelles et n'ont aucune référence au temps, et le mouvement se simplifie infiniment. Je ne puis rien trouver à opposer à ces avantages, si ce n'est une logique antique qu'on n'a pas examinée de nouveau dans ce qui lui est fondamental, et qui est susceptible, si je ne me trompe, d'une réfutation simple et facile.

LES DÉFINITIONS MATHÉMATIQUES

Par GIUSEPPE PEANO,

Professeur à l'Université et membre de l'Académie Royale des Sciences
de Turin.

Les définitions, telles qu'on les rencontre dans les sciences mathématiques, satisfont en général à des règles, que nous voulons formuler.

Une définition est réductible à une égalité, dont un membre (le premier) est le nom qu'on définit, et l'autre en exprime la valeur. Exemple :

(dérivée d'une fonction) = (limite du rapport des accroissements de la fonction et de la variable).

En conséquence, une proposition qui n'est pas une égalité ne pourra pas être une définition. Ainsi la proposition :

$$2 < e < 3$$

ne pourra pas être prise comme définition de la base e des logarithmes naturels.

La valeur du nom qu'on définit doit être exprimée en termes connus. Lorsqu'on donne une définition, on doit

dire, explicitement ou implicitement, quels sont les termes supposés connus.

Dans un traité, une définition suppose connus les termes expliqués dans les pages précédentes. Il ne peut y avoir de difficultés que dans les premières pages d'un traité, pour les premières définitions.

On ne peut pas juger de la valeur d'une définition isolée. Les questions : « Peut-on définir le nombre, le point? » ne sont pas bien posées, si l'on n'ajoute pas la table des idées qu'on suppose connues.

Il ne suffit pas de dire qu'on suppose connu le langage ordinaire, car plusieurs mots scientifiques, comme *nombre*, *point*,... y appartiennent. Ensuite les bornes du langage ordinaire ne sont pas bien fixées.

A l'exception de quelques travaux sur la Logique mathématique, il n'y a pas de traité qui commence par la table des idées qu'on suppose connues. Toutefois, il est aisé de construire cette table; nous allons l'entreprendre, à titre d'exemple, pour la *Géométrie* de LEGENDRE. Au point de vue où nous nous plaçons ici, cette Géométrie ne diffère pas de celle d'Euclide et de tous les autres traités.

Écrivons le signe d'égalité à sa place dans les définitions; il est indiqué dans le texte par les mots *est*, *le*, *la*, *tout*, *un*. Les premières propositions deviennent :

1. (Géométrie) = (science qui a pour objet la mesure de l'étendue).
- 1'. L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur.

- 2. (Ligne) = (longueur sans largeur).
- 2'. (Point) = (extrémité d'une ligne).
- 2". Le point n'a pas d'étendue.
- 3. (Ligne droite) = (le plus court chemin d'un point à un autre).
- 4. (Ligne courbe) = (ligne ni droite, ni composée de lignes droites).
- 5. (Surface) = (ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur).

Les propositions 1' et 2" ne sont pas des égalités, et en conséquence ne sont pas des définitions.

Pour simplifier, supprimons les propositions 1 et 4, qui nous intéressent moins. On trouvera :

- 2. Le mot *ligne* exprimé par « longueur », « largeur ».
- 2'. — *point* — « extrémité ».
- 3. — *droite* — « le plus court », « chemin ».
- 5. — *surface* — « hauteur ou épaisseur ».

On a donc ici quatre idées définies au moyen de six idées géométriques non définies. On pourrait se demander s'il n'est pas plus simple de supprimer ces définitions, et de prendre comme idées non définies celles de *ligne*, *point*, *droite*, *surface*.

Nous venons d'énumérer les idées géométriques contenues dans ces définitions. Pour que l'analyse soit complète, il importe aussi d'énumérer les idées de logique, indiquées par les mots *sans*, *de*, *à*, ... et par les formes grammaticales contenues dans ces propositions.

On en aperçoit la nécessité, si l'on analyse par exemple les premières définitions arithmétiques d'EUCLIDE, livre VII. Librement traduites, elles s'énoncent comme suit :

$$\begin{aligned}(\text{unité}) &= (\text{qualité de ce qui est un}) \\(\text{nombre}) &= (\text{ensemble d'unités}).\end{aligned}$$

Sont-elles rigoureuses? On peut répondre oui, si l'on suppose connues toutes les idées qui figurent dans le second membre. Mais on peut objecter que dans la première les mots *unité* et *un* ne sont que des formes grammaticales différentes d'une même idée. Dans la seconde, on peut considérer l'idée de nombre comme implicitement contenue soit dans celle d'*ensemble*, soit dans la désinence du mot *unités* au pluriel. La différence entre les deux opinions provient de la différente importance qu'on donne aux formes grammaticales.

L'énumération des idées de toute sorte contenues dans nos traités n'est pas excessivement longue, comme on pourrait le craindre d'abord. Il est bien connu que dans les sciences mathématiques on fait usage seulement d'une petite partie du dictionnaire et des règles grammaticales d'une langue. Ensuite le nombre des mots adoptés est supérieur au nombre des idées représentées. Par exemple les mots *produit*, *facteur*, *multiplier*, *multiplicande*, *multiplicateur*, *multiple*, *diviseur*, *coefficient*,... ne sont que des formes linguistiques différentes, pour indiquer sous différents points de vue la même idée, représentée dans les formules algébriques par un seul signe $\times$.

Cette énumération a été faite, pour différentes théories, par divers auteurs, dans le *Formulaire de Mathématiques* que nous publions. Le nombre des idées de toute sorte, logiques ou mathématiques, simples ou composées, qui figurent dans les théories traitées dans le tome III, année 1901, approche de 100. Ces théories embrassent déjà une partie importante des sciences mathématiques.

Une définition considérée en elle-même, indépendamment des idées qu'on suppose connues, est une égalité dont le premier membre est un mot, ou signe, qui ne figure pas dans le second.

Nous appellerons « définitions possibles » les égalités qui ont cette forme. Par exemple, les propositions :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

sont des définitions possibles. La première est la plus répandue comme définition réelle; la deuxième se rencontre dans quelques traités; la troisième n'a pas été adoptée.

Dans quelques cas on ne définit pas un mot ou un signe seul, mais toute une expression; ainsi, en supposant connue la valeur des formules $x=y$, $x>y$, $x+y$, $x \times y$,... où x et y sont des nombres entiers, on doit la définir si l'on suppose que x et y soient des nombres rationnels. Dans ce

cas, le second membre peut contenir les signes qui figurent dans le premier membre, mais dans une combinaison différente.

De l'ensemble des propositions d'une science qui ont le caractère de définitions possibles on déduit les différentes théories, ou façons d'exposer cette science. On choisit un ordre pour les idées de la science. Si une idée a plusieurs définitions possibles qui l'expriment au moyen des idées précédentes, dans l'ordre fixé, on pourra choisir entre elles la plus commode. S'il n'y a pas de définition possible d'une idée qui l'exprime au moyen des précédentes, cette idée sera dite *primitive*, relativement à l'ordre fixé. Quel que soit l'ordre fixé, il y aura nécessairement des idées primitives, car on ne peut pas définir la première idée.

Il convient de donner aux idées d'une science un ordre tel que le nombre des idées primitives relativement à cet ordre soit le plus petit possible.

Une définition doit satisfaire à la loi de l'homogénéité, que nous allons expliquer.

D'abord, une définition doit être une proposition complète, intelligible par elle-même, détachée des autres propositions du texte. C'est ainsi que j'entends une définition, à la différence de quelques auteurs qui appellent *définition* la partie la plus importante, ou la formule, contenue dans la proposition complète.

Ensuite, les deux membres de l'égalité qui constitue une définition doivent contenir les mêmes lettres variables réelles.

Ainsi la formule :

$$0 = a - a$$

n'est pas une définition, car elle n'est pas une proposition complète; on n'a pas dit quelle valeur nous attribuons à la lettre a .

La proposition :

Soit a un nombre; on a : $0 = a - a$

est une proposition complète; mais elle ne peut pas être prise comme définition du signe 0, car elle n'est pas homogène. En effet, le premier membre est un symbole constant 0; le second est une fonction de la lettre variable a .

La proposition :

$0 =$ (la valeur constante de l'expression $a - a$, quel que soit le nombre a)

est une égalité homogène, car, bien que dans le second membre figure la lettre a , elle n'y figure qu'en apparence, puisque la valeur de ce second membre n'est pas une fonction de a . Cette proposition est une définition possible.

Non seulement les deux membres de l'égalité-définition doivent contenir les mêmes lettres variables réelles, mais il faut qu'elles y entrent d'une façon semblable. Par exemple, considérons les nombres rationnels; on a l'égalité logique suivante :

Soient a, b, c, d , des nombres entiers; l'égalité : $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$
est identique à l'égalité : $ad = bc$,

proposition que plusieurs auteurs prennent pour défini-

tion ¹. Alors, si a et b sont des entiers, a/b est un nombre rationnel; réciproquement, x étant un nombre rationnel, il y a une infinité de couples de nombres entiers a et b qui satisfont à l'égalité $a/b = x$. En conséquence, on ne peut pas dire « le nombre rationnel x est une fraction irréductible »; on ne peut pas parler du numérateur et du dénominateur de x .

Maintenant, si l'on veut définir la somme de deux nombres rationnels x et y , il faut former une égalité de la forme :

$x + y =$ (expression composée avec les lettres x et y ,
et avec les opérations arithmétiques sur les nombres
entiers).

La proposition :

1. Ainsi font MM. O. STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, p. 43 (1885); *Theoretische Arithmetik*, p. 57 (1900); J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. VIII (1886); et plus explicitement : *Leçons d'Arithmétique*, p. 148 (1894); L. COUTURAT, *De l'Infini mathématique*, p. 1 (1896).

Alors la fraction a/b est introduite « par abstraction ». On n'a pas une égalité de la forme :

$a/b =$ (expression composée avec les idées précédentes),
mais on donne seulement une définition nominale de la relation $a/b = c/d$.

Nous préférons considérer a/b comme représentant l'opération composée $\times a/b$, c'est-à-dire « multiplier par a , et diviser par b ». Les deux opérateurs a/b et c/d sont égaux, lorsque, appliqués à un même nombre qui rende les deux opérations possibles, ils donnent des résultats égaux. De cette définition découle immédiatement la proposition citée dans le texte. Voir le *Formulaire de Mathématiques*, t. III, p. 55 (1901), ou mes *Arithmetices principia*, p. 13 (1889), où ces théories sont exprimées en symboles idéographiques.

On rencontre aussi cette façon de considérer les fractions comme des opérateurs dans les *Leçons sur l'Analyse infinitésimale* de M. MÉRAY, p. 2 (1894), qui l'avait déjà publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1889, p. 421. Cette idée est la plus naturelle. On peut la voir par exemple dans le papyrus Rhind (an 2000 environ avant J.-C.) où le calculateur égyptien ANHÉS dit (colonne 12) :

$$1 - 2/3 - 1/15 = 1/5 + 1/15$$

* en effet, en opérant sur 15, on a :

$$15 - 10 - 1 = 3 + 1 *$$

En suivant l'auteur, nous n'avons pas écrit le numérateur, lorsqu'il est l'unité.
(Note ajoutée en 1901.)

Soient a, b, c, d des nombres entiers; on a : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ n'est pas une définition possible. En effet, le premier membre se présente comme une fonction des nombres rationnels a/b et c/d ; le second, comme une fonction des nombres entiers a, b, c, d , qui ne sont pas des fonctions des nombres rationnels donnés.

Les définitions non homogènes ne sont pas très rares dans les traités de Mathématiques. La précision intrinsèque des sciences mathématiques corrige les imprécisions du vêtement sous lequel nous les présentons. Ces inexactitudes de forme ne portent pas les bons auteurs à des conséquences fausses. Ainsi EULER, en opérant sur des séries sans s'occuper de leur convergence, arrive à une foule de théorèmes tous vrais. Les impropriétés dans l'énoncé des définitions en général n'apportent que des longueurs et de l'obscurité. Mais, si l'on veut, on peut d'une définition non homogène tirer des conséquences fausses. Ainsi, posons par définition :

$$\frac{a}{b} ? \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}, \text{ où } a, b, c, d \text{ sont des entiers. »}$$

Le signe (?) indique une opération (non légitime). On en déduit : $\frac{1}{2} ? \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$, $\frac{2}{4} ? \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$; or $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, d'où la conclusion fausse : $\frac{3}{5} = \frac{4}{7}$.

Cette difficulté a été aperçue par plusieurs auteurs; pour justifier la définition précédente, on suppose que $\frac{a}{b}$ n'est pas

un nombre rationnel, mais bien un couple de nombres séparés par le signe de division. Mais cela produirait des ambiguïtés, car dans tous les traités les expressions $2 + 2$, 2×2 , $8/2$, $6 - 2$, 2^2 , ... ne sont que des noms différents du même nombre : 4.

Remarquons enfin que tout signe ou mot défini dans une science peut être supprimé, à la condition de le remplacer par sa valeur. Autrement dit, toute définition exprime une abréviation, qui théoriquement n'est pas nécessaire; elle peut être commode, et même pratiquement indispensable au progrès de la science.

La suppression dans une théorie d'un signe défini est un exercice très utile pour reconnaître l'exactitude de la définition; car si l'on n'arrive pas à le remplacer partout par sa valeur, la définition sera incomplète. Elle sert aussi à juger de l'utilité de la définition; car si les propositions où figure un signe défini ne s'allongent pas trop quand on le supprime, il convient de le supprimer. Dans les traités de Mathématiques il y a beaucoup de mots qu'il conviendrait de supprimer.

SUR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES LOGIQUES POUR LA DÉFINITION DU NOMBRE RÉEL

Par CESARE BURALI-FORTI,

Professeur à l'Académie Royale militaire de Turin.

Dans ce mémoire, je me propose de fixer logiquement la signification du mot *définir*, d'examiner les différentes formes de définitions logiques du nombre réel, et de déduire de leur comparaison l'importance scientifique de la définition nominale ainsi que l'importance didactique due à sa grande simplicité ¹.

Dans le § I je fixe la signification de quelques mots et de quelques relations qui vont paraître dans la Logique générale, et je me sers de ces mots et de ces relations pour éta-

1. Dans mon mémoire : *Les propriétés formales des opérations algébriques* (*Revue de Mathématiques*, t. VI, 1899, et librairie G. B. Petrini, Torino) j'ai, pour la première fois, donné la définition nominale du nombre réel, et j'ai aussi montré comment la théorie des nombres réels peut s'obtenir rapidement par cette définition, et de manière tellement simple qu'elle peut, immédiatement, être applicable dans l'enseignement secondaire supérieur. On peut encore comparer mon article : *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science*, ap. *L'enseignement mathématique*, 1899.

Les recherches qui m'ont conduit aux résultats contenus dans ce mémoire ont été faites en tirant parti des puissants moyens d'analyse logique fournis par le symbolisme logique du *Formulaire de Mathématiques*. Cependant j'ai tout exposé avec les formes usuelles du langage, pour rendre la lecture de mon travail possible même à ceux qui ne sont pas familiers avec ce symbolisme.

blir trois formes de définitions logiques auxquelles, je crois, peuvent être réduites toutes les définitions scientifiques. Je déduis de ces formes de définitions la signification exacte des mots *concept*, *intuition*, signification que je crois être précisément celle qu'entendait KANT. J'appelle *nominale*, *par postulats*, *par abstraction*, les trois formes de définitions : j'appelle *concept* toute chose x de laquelle nous pouvons donner une définition nominale. Les définitions du nombre entier dues à MM. DEDEKIND, PEANO, G. CANTOR¹, appartiennent à la deuxième et à la troisième forme (voir § III de ce mémoire), c'est-à-dire qu'elles donnent le nombre comme une *intuition*² : ma définition nominale du nombre (§ II) donne, au contraire, le nombre entier comme un *concept*. Je prouve aussi que même le nombre réel peut être donné comme concept (§ IV), tandis qu'à présent il est toujours donné comme une intuition.

I. — *Les définitions logiques.*

1. Le mot *classe* a, à peu près, la signification des mots *groupe*, *collection*, *ensemble*, *nom commun*, *conceptus*,

1. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen* (Braunschweig, Vieweg, 1887, 1893). — PEANO, *Arithmetices principia*..... (Torino, Bocca, 1889); Sul concetto di numero (*Rivista di Matematica*, 1891); *Formulaire de Mathématiques* (t. II, n° 2, 3). — G. CANTOR, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (*Math. Annalen*, t. XLVII).

2. L. COUTURAT, *Sur une définition logique du nombre*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale* (t. VIII, janv. 1900). Dans cet article, M. Couturat remarque justement que la définition de M. Dedekind donne le nombre entier comme une intuition; mais il soutient aussi (p. 36) que *le nombre n'est point un concept, mais une intuition*. J'arrive à une thèse contraire à celle-ci, bien entendu, en admettant que les mots *concept* et *intuition* aient pour M. Couturat et pour moi la même signification.

terminus,.... ὅνομα, ὅρος,.... Begriff, Menge,.... term, conception; mais nous ne lui donnons pas toutes les significations de ces mots. Nous indiquerons quelques-unes des propriétés du mot *classe* lorsque nous en aurons besoin; pour les autres, on peut voir le *Formulaire de Mathématiques*.

2. Si a est une classe, la phrase « x est un élément de a » ou « x est un a », a , habituellement, une signification précise.

La phrase « x est un a » exprime une *condition* à laquelle x satisfait. Réciproquement, tous les x qui satisfont à une condition exprimée par x , forment une classe a bien déterminée. On entrevoit déjà, par ce que nous venons de dire, que la classe a est formée seulement par les x qu'elle contient, et est indépendante, par exemple, de l'ordre des éléments qui la forment.

3. Soient a, b, c , des classes. « Tout a est b », ou « a est contenu en b », ou, « b contient a », exprime que « si x est un a , alors, quel que soit x , cet x est aussi un b ».

Parmi les propriétés fondamentales du mot *classe*, nous avons les deux formes suivantes de syllogisme :

Si x est un a , et si tout a est b , alors x est un b ,
Si tout a est b , et si tout b est c , alors tout a est c .

Cette dernière forme de syllogisme établit la propriété *transitive* de la relation « *est contenue* ». La relation « *est un* » n'est pas transitive, car si x est un a et si a est un b ,

x n'est pas un b ¹. Donc « *est contenue* », et « *est un* », indiquent deux relations bien différentes entre elles.

4. Soient x, y des objets quelconques. Nous disons que $x=y$, dans le seul cas où « toute classe qui contient x contient aussi y », ou bien, « toute *propriété* de x est aussi une *propriété* de y ».

C'est bien la *totalité absolue* des propriétés de x que nous considérons, et non une *totalité relative au sujet de notre discours*. Par exemple, les géomètres qui par la notation $x=y$ indiquent que « la figure x est *superposable* à la figure y », considèrent comme *totalité* des propriétés des figures les seules propriétés métriques, c'est-à-dire qu'ils considèrent une *totalité relative*. Il est fort important d'observer que les mêmes considérations logiques qui permettent aux géomètres d'écrire $x=y$ au lieu de « x est superposable à y », permettent aussi, à tout le monde, de donner à la notation $x=y$ les significations : « x est équivalent à y », « x est semblable à y », « x est parallèle à y », etc. Aucune de ces relations n'est l'*égalité*, car il est évident que, par exemple, si x est équivalent à y , et si x a la propriété d'être un triangle, y n'a pas nécessairement la même propriété.

De la définition de la relation $x=y$ on déduit que :

$x=x$ (propriété réflexive);

si $x=y$, alors $y=x$ (propriété symétrique);

si $x=y$, et si $y=z$, alors $x=z$ (propriété transitive);

1. Si x est un a , et si a est un b , alors b doit être une classe dont les éléments sont eux-mêmes des classes.

mais on ne peut pas tirer de ces propriétés la définition de l'égalité, car elles sont vérifiées si au lieu de $=$ nous posons : *est superposable, est équivalent, est semblable,...*

Si a, b sont des classes, de la définition de l'égalité on déduit que :

si $a = b$, alors, tout a est b ;

la propriété inverse :

si tout a est b , alors $a = b$

doit être admise si nous voulons que, par exemple, la classe a soit indépendante de l'ordre dans lequel on dispose ses éléments.

5. Soit a une classe; nous appelons « opération pour les a », tout signe f qui placé (par exemple) devant un élément x quelconque de a , produit un élément fx bien déterminé. Le mot *opération* exprime l'idée ordinaire de correspondance¹. On sait, par exemple, que *sin*, *cos*, *tang*, *log*,... sont des opérations pour les nombres réels; *longueur de* est une opération pour les lignes; *masse de*, *température de* sont des opérations pour les corps.

Si x, y sont des a , et si $x=y$, alors $fx=fy$. En effet : y est un des éléments z tels que $fz=fy$; or puisque $x=y$, x est aussi un des z tels que $fz=fy$, c'est-à-dire que $fx=fy$.

La propriété inverse n'est, en général, pas vraie, car de : $\sin x = \sin y$, on ne peut point, en général, déduire : $x=y$.

6. Indiquons par la notation $(x; y)$ le couple dont le premier élément est x et le deuxième est y . En vertu de la

1. Voir *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n° 3, p. 24.

définition de l'égalité, on a $(x; y) = (x'; y')$ seulement lorsque $x = x'$ et $y = y'$ ¹.

Si a, b sont des classes, nous indiquons par la notation $(a; b)$ la classe dont les éléments sont les couples qui ont un a pour premier élément et un b pour deuxième élément.

Si f est une opération pour les $(a; b)$, une opération pour des couples, si x est un a et si y est un b , la notation $f(x; y)$ a déjà reçu une signification. Nous écrirons toujours xfy au lieu de $f(x; y)$. Il résulte que les signes ordinaires algébriques $+$, $-$, $\times$, $:$ ou $/$, sont des opérations pour des couples de nombres réels (le zéro, au surplus, étant exclu après le signe $:$ ou $/$.)

Nous disons que l'opération f pour des couples est *semblable*, lorsque, si $xfy = xfz$, on a toujours $y = z$. Les opérations $+$, $-$ sont semblables pour les nombres, et les opérations $\times$, $/$, sont semblables pour les nombres non nuls.

7. *Définir* un objet x quelconque signifie : « donner une ou plusieurs relations logiques contenant x , et telles que, un élément y étant donné, il soit possible d'affirmer ou de nier la relation $x = y$ ». En d'autres termes, x est défini lorsqu'on peut *déduire* toutes les propriétés de x des relations logiques en question.

Il y a trois formes de définitions logiques.

La *définition nominale* de l'objet x a la forme : $x = a$, où a est une expression formée avec des éléments *déjà connus*. On donne, ordinairement, une définition nominale

1. *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n° 2.

des mots *triangle*, *cercle*, *sphère*, *nombre premier*, *classe dérivée*, *sin*, *cos*, *log*,... On ne sait pas, jusqu'à présent, donner la définition nominale des mots *point*, *mouvement*, *masse de*, *température de*, *nombre ordinal des*,...

On emploie la *définition par postulats* pour un groupement x d'objets, quand nous ne *savons* ou ne *voulons* pas le définir nominalelement. Le groupe x est défini par postulats au moyen de relations logiques entre les x . M. PEANO définit, sous cette forme, le groupe des mots *point*, *segment*¹, et le groupe des mots *nombre entier*, *zéro*, *suivant d'un nombre*², et M. PIERI le groupe des mots *point*, *mouvement*³.

On définit *par abstraction* une opération f , lorsqu'on dit à quelle classe a elle est applicable et que, x étant un élément quelconque de a , on établit quels sont les y de a tels que $fy = fx$. Il est fort naturel qu'on applique une telle forme de définition, lorsqu'on ne sait pas définir nominalelement fx , ce qui reviendrait à donner la définition nominale de l'opération f . On peut définir par abstraction les opérations *direction de*, *masse de*, *température de*, *longueur de*, *aire de*, *nombre ordinal des*, *nombre cardinal des*,... Nous disons, par exemple, que « *direction de* » est une opération f pour les droites, telle que, quelle que soit la droite x , les droites y pour lesquelles $fy = fx$ (les droites

1. *I principii di Geometria logicamente esposti* (Torino, Bocca, 1889).

2. *Formulaire de Mathématiques*, § N₀.

3. *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo* (*Memorie dell' Accademia delle Scienze*, Torino, 1899). Cf. son mémoire *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique*, dans le présent volume.

qui ont la même direction que x) sont toutes les parallèles à x , et celles-là seulement¹.

L'opération f pour les a une fois définie par abstraction, on définit nominalement la classe fa qu'on obtient en appliquant f à tous les a . On peut dire par exemple : *direction* = « les x tels qu'il existe une droite a telle que $x = \text{direction de } a$. » Il en est de même pour les classes *masse*, *température*, *longueur*, *aire*, *nombre ordinal*,...

8. Je crois que toutes les définitions logiques peuvent être réduites à une des trois formes que nous venons d'examiner. Je crois aussi que la distinction entre *concept* et *intuition* peut être réduite à la suivante : Est un *concept* toute chose x qui *peut être* définie nominalement; à l'*intuition* appartient toute chose qui *doit être* définie par postulats ou par abstraction, c'est-à-dire toute chose que nous ne savons pas définir nominalement.

En conséquence, le mot *concept* vient d'acquérir une signification *absolue*, tandis que le mot *intuition* a une signification relative à l'état de la science. Par exemple, les définitions du nombre de MM. DEDEKIND, PEANO et G. CANTOR (par postulats et par abstraction) donnent le nombre comme une intuition; ma définition nominale (voir le § II de ce mémoire) donne le nombre comme un concept.

1. Voir, à ce propos, mon article déjà cité *Sur l'égalité*..., d'où il résulte qu'on ne peut point dire « *direction de* » est l'opération..... au lieu de « *direction de* » est une opération.....

II. — Définition nominale du nombre entier.

1. « Si $+$ est une opération semblable pour des couples, nous disons que u est une *classe homogène par rapport à $+$* , lorsque, x, y étant des éléments quelconques de u , $x + y$ (c'est-à-dire $+(x; y)$) est un élément bien déterminé de u ».

La signification du signe $+$ est tout à fait générale; c'est-à-dire que nous ne considérons pas seulement l'opération ordinaire de *somme*. On trouve, par exemple, que les nombres réels positifs ou négatifs forment une classe homogène par rapport aux signes algébriques $+$ et $-$; et que les nombres réels positifs non nuls forment une classe homogène par rapport aux signes algébriques $\times$ et $/$.

Il faut remarquer que nous avons ainsi défini nominale-ment le concept ordinaire de *grandeur*, ou plus exactement, nous avons donné une signification exacte aux locutions ordinaires « grandeurs homogènes », « les grandeurs a, b sont de la même espèce ». Les mots usuels « classe homogène de grandeurs », « grandeur », signifient respectivement « classe », « classe totale », comme on peut voir dans mon mémoire *Les propriétés formales...* déjà cité.

2. « Soient $+$ une opération semblable pour des couples et u une classe homogène par rapport à $+$. Nous indiquons par la notation $0(u, +)$, *élément de u nul par rapport à $+$* , l'élément x de u tel que, quel que soit l'élément y de u , on ait toujours : $y + x = y$. »

Si $0(u, +)$ existe, alors il est unique, car $+$ est une opération semblable.

3. A présent nous sommes en mesure de définir nominativement la classe N_0 (nombre entier positif ou nul).

« N_0 est la classe d'opérations telle que, quels que soient l'élément x et l'opération semblable $+$ pour des couples, la classe N_0x (c'est-à-dire la classe qu'on obtient en appliquant à x toutes les opérations de la classe N_0) est la classe qui a les propriétés suivantes :

1° N_0x est homogène par rapport à $+$;

2° $0(N_0x, +)$ et x sont des éléments de N_0x ;

3° Tout N_0x qui n'est pas égal à $0(N_0x, +)$ est de la forme $y + x$, où y est un N_0x^1 . »

Il résulte de cette définition que la classe N_0x (les multiples de x) est formée par les éléments $0(N_0x, +)$, x , $x + x$, $x + x + x$, ... et seulement par ces éléments.

La classe N_0 , telle que nous venons de la définir, existe-t-elle? est-elle une classe univoquement déterminée?

La réponse est affirmative. La démonstration de cette proposition est implicitement contenue dans mon mémoire *Le classi finite*², comme il est facile de le reconnaître en comparant la définition 2 avec la définition de la *classe normale* donnée au § 3 de *Le classi finite*.

4. « Le nombre entier 0 (zéro) est défini comme l'entier

1. On donne à cette définition la forme nominale de la manière suivante :

$N_0 =$ « la classe f d'opérations telle que : quels que soient l'élément x et l'opération semblable $+$, alors fx est la classe u telle que : u est homogène par rapport à $+$; $0(u, +)$ et x sont des u ; chaque u qui n'est pas égal à $0(u, +)$ est la somme d'un u et de x ».

La forme donnée dans le texte élimine les lettres f , u qui sont nécessaires pour traduire cette définition en symboles de Logique. Nous entendons répéter cette remarque pour les définitions suivantes.

2. *Atti dell' Accademia delle Scienze*, Torino, 1897.

tel que : si $+$ est une opération semblable pour des couples, si u est une classe homogène par rapport à l'opération $+$, s'il existe un élément $0(u, +)$, et si y est un u , alors, quels que soient $+, u, y$, on a toujours : $0y = 0(u, +)$. »

5. « Soit m un entier quelconque; nous appelons *suivant de m* , et nous indiquons par la notation *seq m* , l'entier tel que : si $+$ est une opération semblable, si u est une classe homogène par rapport à $+$, et si y est un élément de u , alors, quels que soient $+, u$ et y , on a toujours :

$$(\text{seq } m) y = my + y. »$$

6. Par les propositions 4 et 5 nous avons défini nominale-ment l'*entier nul* (le *zéro*), et le *suivant d'un nombre*.

De ces définitions on peut déduire que¹ :

(a). *Zéro* est un entier.

(b). Si m est un entier, *seq m* est aussi un entier.

(c). Deux entiers suivis par un même entier sont égaux; c'est-à-dire que, si m, n sont des entiers, et si *seq m* = *seq n* , alors : $m = n$.

(d). Le zéro n'est point le suivant d'un entier; c'est-à-dire que, si m est un entier, on a toujours : *seq m* $\neq 0$.

(e). Si u est une classe d'entiers, si 0 est un u et si chaque entier qui est le suivant d'un u est aussi un u , alors tout entier est un u . En d'autres termes : si une proposition est exprimable au moyen d'un entier m , si cette proposition est vraie pour $m = 0$, et si cette proposition, supposée vraie pour m , est vraie pour *seq m* , alors elle est vraie pour tout

1. Voir *Le classi finite*.

entier. (*Principe d'induction complète*, ou conclusion de m à $m + 1$ ¹).

De ces propositions il résulte² que la classe N_0 , que nous avons définie nominale, à toutes les propriétés attribuées habituellement aux éléments qu'on appelle *nombre entiers*.

III. — *Définition par postulats et par abstraction du nombre entier.*

1. A M. PEANO est due la définition par postulats du groupe d'idées exprimées par les mots *nombre entier*, *zéro*, *suivant d'un nombre*, ou par les signes

$$N_0, \quad 0, \quad \text{seq.}$$

Les postulats dont nous venons de parler sont précisément les propositions $(a) — (e)$; et M. Peano observe qu'« il y a une infinité de systèmes qui satisfont à toutes les propositions $(a) — (e)$. Le nombre, N_0 , est ce qu'on obtient par abstraction de tous ces systèmes; autrement dit le nombre, N_0 , est le système qui a toutes les propriétés $(a) — (e)$, et celles-là seulement ».

Mais nous observons encore que les propositions $(a) — (e)$ donnent, sous la même forme abstraite, l'idée de *classe finie*. Pour N_0 , lisons *classe finie* (suivant M. DEDEKIND par exemple); pour 0, lisons *classe nulle*; et pour *seq a*, a étant une classe finie, lisons *classe dont les éléments sont les*

1. Voir *Le classi finite*, § 3, prop. 12.

2. Voir *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n° 3, p. 30.

classes qu'on déduit de a en y joignant un élément qui n'appartient pas à a . Alors, en observant que *seq a* est une classe de classes et que par conséquent la relation logique *est un* doit être remplacée par la relation *est contenue dans* les propositions (b) (d) et (e), nous voyons aisément que les propositions (a) — (e) subsistent encore pour la nouvelle signification donnée aux signes N_0 , 0, *seq*. Cette remarque prouve la liaison, déjà connue, entre les idées exprimées par les mots *nombre entier* et *classe finie*, et on aboutit à la conclusion (contraire à celle énoncée par M. POINCARÉ) que le principe d'induction complète n'est point l'expression de l'*infini*, mais qu'en revanche il *est le caractère distinctif de la classe finie*¹.

De la remarque de M. Peano et de la nôtre, nous croyons pouvoir conclure que la définition nominale des idées N_0 , 0, *seq* est préférable à leur définition par postulats, car elle donne les éléments N_0 , 0, *seq* d'une manière unique sans avoir recours au procédé d'abstraction dont les lois logiques ne sont pas encore établies.

2. La définition de M. DEDEKIND diffère de celle de M. PEANO par l'introduction de l'idée de *chaîne*, mais au point de vue logique elle peut être classée parmi les définitions par postulats².

3. La méthode de M. G. CANTOR pour l'introduction des nombres ordinaux et cardinaux est applicable aux nombres

1. H. POINCARÉ, *Sur la nature du raisonnement mathématique*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. II, p. 371 (1894); voir aussi M. COUTURAT, *art. cit.*, p. 23, note 2.

2. Voir à ce propos l'article déjà cité de M. COUTURAT.

entiers sous la forme que nous avons appelée *par abstraction*.

Dans mon mémoire *Le classi finite* je traite cette question et je démontre que pour les entiers (et les nombres cardinaux) il n'est point nécessaire, comme font MM. G. CANTOR et BETTAZZI¹, d'avoir recours à l'ordre des éléments d'une classe, les idées de *classe* et d'*opération* étant suffisantes.

J'expose brièvement cette troisième forme de définition pour les entiers.

Considérons l'opération pour les classes appelée : « *nombre des* ». Nous posons la définition suivante :

« *Nombre des* est une des opérations pour les classes, telle que : quelle que soit la classe a , alors les classes b telles que

$$\text{Nombre des } b = \text{Nombre des } a$$

sont toutes les classes semblables à la classe a (les classes qui peuvent être mises en correspondance *univoque* et *réci-proque* avec la classe a) et celles-là seulement ».

Soient a, b deux classes quelconques ; par cette définition on décide si nous pouvons affirmer ou nier la relation :

$$\text{Nombre des } a = \text{Nombre des } b.$$

En conséquence, l'opération pour les classes « *Nombre des* » est *définie par abstraction* selon les conventions que nous venons de faire.

A présent nous sommes en mesure de définir les éléments $N_0, 0$, *seq.*

1. *Atti dell' Accademia delle Scienze*, Torino, 1897.

« Nous disons que m est un entier, N_0 , lorsqu'il existe une classe finie a telle que : $m = \text{Nombre des } a$ ».

« Nous appelons zéro, 0, le nombre des éléments de la classe nulle.

« Soient m un entier et a une quelconque des classes finies telle que $m = \text{Nombre des } a$, nous appelons « suivant de m , $\text{seq } m$, » le nombre des éléments de l'une quelconque des classes b qu'on déduit de a en y joignant un élément qui n'est point contenu en a ».

Des définitions que nous venons d'énoncer¹, on déduit les propositions (a) — (e) et par conséquent la définition par abstraction conduit, elle aussi, à l'idée usuelle d'entier ; mais, comme avec la définition par postulats, la nature, l'espèce exacte des éléments N_0 n'est point établie.

Si au mot *classe finie* nous substituons dans les définitions précédentes le mot *classe*, on obtient alors les nombres *cardinaux* de M. G. CANTOR, pour lesquels la proposition (e) n'est pas vraie, et on confirme une fois de plus que le principe d'induction n'est pas l'expression de l'infini, mais au contraire du fini.

IV. — Définitions nominales des nombres rationnels et des nombres réels.

1. Pour définir les nombres rationnels et les irrationnels, il est utile d'introduire une classe homogène spéciale par rapport à l'opération $+$ pour des couples.

1. Voir *Le classi finite*.

« Soit $+$ une opération semblable pour des couples, nous disons que u est une *classe normale par rapport à l'opération $+$* , lorsque u est une classe homogène par rapport à $+$ et que l'opération $+$ jouit des propriétés ordinaires de la somme pour les longueurs, aires, volumes... »

Il est utile de préciser ces diverses propriétés :

(1) Propriété commutative : $x + y = y + x$.

(2) » associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(3) Il existe un élément $0(u, +)$.

(4) Il existe des u différents de $0(u, +)$.

(5) Si x, y sont des u , et si $x \neq 0(u, +)$, alors :

$$x + y \neq 0(u, +).$$

(6) Si x, y sont des u , alors $y = x$ ou $x > y$ ou $x < y$, [« $x > y$ » signifie : x est la somme de y avec un u différent de $0(u, +)$].

(7) Si x est un u , et si $x \neq 0(u, +)$, alors il existe au moins un u plus petit que x .

(8) Si a est une classe existante et limitée (dont les éléments sont plus petits qu'un u donné), alors il existe un élément x de u tel que les u plus petits que x sont tous les u plus petits que quelques éléments de a et ceux-là seulement. Cet élément x est unique ; on l'appelle « limite supérieure des a » et nous l'indiquons par la notation $l'a$.

Par exemple, si a est la classe formée par les longueurs des périmètres des polygones convexes inscrits dans une circonférence, $l'a$ est la longueur de la circonférence ¹.

1. Dans mon mémoire déjà cité, *Les propriétés formales.....*, sont données toutes les principales propriétés de la classe que j'appelle ici *normale*.

2. Nous voulons, à présent, définir les nombres rationnels, la classe R_0 , c'est-à-dire la classe dont chaque élément est représenté par la notation générique m/n , où m, n sont des entiers et $n \neq 0$.

« Si m, n sont des entiers et si $n \neq 0$, par la notation m/n nous indiquons l'opération telle que : si $+$ est une opération semblable, si u est une classe normale par rapport à l'opération $+$, et si x est un u , on a, quels que soient $+, u, x$:

$$n[(m/n)x] = mx.$$

On obtient ainsi la signification usuelle des fractions, par exemple :

$\frac{1}{5}x =$ la grandeur qui multipliée par 5 donne x ,

$\frac{4}{5}x = 4$ fois la grandeur $\frac{1}{5}x$.

De la définition précédente il résulte aussi que chaque entier est un nombre rationnel, et que $(mn)/n = m$.

La somme des deux nombres rationnels m, n , qui reste indiquée par $m + n$, est définie par la relation

$$(m + n)x = mx + nx$$

$+, u, x$ ayant les significations précédentes.

Dans le *Formulaire de Mathématiques*, la classe R_0 est définie nominalement comme une classe d'opérations pour les entiers.

3. Les nombres réels, positifs ou nuls, Q_0 , se définissent aussi nominalement, et aussi aisément que la classe R_0 .

« Nous disons que m est un nombre réel, lorsque, si $+$ est une opération semblable pour des couples, si u est une classe normale par rapport à $+$, et si x est un u , quels que soient $+$, u , x , il existe une classe limitée a de nombres rationnels, telle que $mx = l'(ax)$ » (c'est-à-dire telle que mx est la limite supérieure des éléments qui sont les produits de x par les nombres rationnels de a).

Si, par exemple, a est la classe des nombres rationnels dont le carré est plus petit que 2, alors $\sqrt{2}$ est définie par la condition

$$\sqrt{2}x = l'(ax).$$

On démontre aisément¹ que la classe R_0 est contenue dans la classe Q_0 . Le mot « nombre rationnel » est traduit par « R_0 qui ne sont point Q_0 ».

Dans le *Formulaire de Mathématiques*, la classe Q_0 est définie par abstraction, ou plutôt on a défini la condition d'égalité de la limite supérieure de deux classes de nombres rationnels.

4. MM. DEDEKIND et J. TANNERY définissent aussi par abstraction la classe Q_0 , mais la limite supérieure d'une seule classe est remplacée par la considération de deux classes, ce qui apporte des complications qui sont éliminées par l'emploi de la limite supérieure².

Il est fort important de faire remarquer que la méthode de MM. DEDEKIND et TANNERY est parfaitement logique, et que,

1. Voir *Les Propriétés formales...*

2. Dans mon mémoire déjà cité, *Les propriétés formales....*, on peut voir avec quelle facilité on obtient les propriétés des Q_0 .

la considération des deux classes exceptée, elle est d'une simplicité vraiment remarquable ; mais certains auteurs, qui ont transformé la méthode de DEDEKIND, ont en même temps compliqué tellement les points de départ, les transformations et les idées, que leurs théories sont tout à fait inintelligibles.

ESSAI D'UNE THÉORIE ALGÈBRIQUE
DES NOMBRES ENTIERS,
PRÉCÉDÉ D'UNE INTRODUCTION LOGIQUE
A UNE THÉORIE DÉDUCTIVE QUELCONQUE

Par ALESSANDRO PADOA,
Docteur ès sciences mathématiques, à Rome.

Avant-propos.

1. Nous supposons préalablement connue la signification du mot **classe** (qui correspond aux mots : *terminus* des scolastiques, *ensemble* des mathématiciens, *nom commun* du langage ordinaire); néanmoins, pour éviter toute ambiguïté, nous voulons *préciser* cette idée et d'autres qui s'y rattachent (sans avoir la prétention de les *définir*¹).

Pour nous, une *classe* est complètement connue lorsqu'on sait quels *individus* y appartiennent. (Par suite, l'idée de *classe* n'implique aucunement l'idée d'*ordre*, que nous considérons en dehors du domaine de la *Logique générale*.)

1. Pour la représentation symbolique de ces idées, pour une étude plus accomplie de leurs propriétés formelles et pour des renseignements historiques et bibliographiques, voir le *Formulaire de Mathématiques*, publié à Turin par la *Revue de Mathématiques* dirigée par M. G. PEANO, à qui je désire exprimer publiquement ma vive reconnaissance de disciple.

Parfois, dans le langage ordinaire, le *nom* d'une *classe* et le *nom* qui convient à chaque *individu* qu'elle renferme sont des mots différents : par exemple, *humanité* et *homme*. Nous supprimons cette distinction; par conséquent, nous donnons la même signification aux P^1 : « x est un individu qui appartient à la classe a » et « x est un a », en préférant la seconde qui, par suite, impliquera toujours la P : « a est une classe² ». Voilà pourquoi dans ce travail on trouvera souvent l'idée, mais presque jamais le mot de *classe*.

2. Selon que a et b sont des *classes* ou des *individus* [1], « a est égal à b » signifie respectivement : « les mêmes *individus* appartiennent à a et à b » ou « les mêmes *classes* renferment a et b ».

Au lieu de *est égal à* nous écrivons $=$.

Par conséquent :

Si x est un a [1] et si $a = b$, alors x est un b .

Si x est un a et si $x = y$, alors y est un a .

On a toujours : $a = a$; si $a = b$, alors $b = a$; si $a = b$ et si $b = c$, alors $a = c$.

(Évidemment, l'égalité *numérique* n'est qu'une *égalité logique*³ entre individus : voilà pourquoi nous la représen-

1. Nous écrivons « P » au lieu de *proposition*, même au pluriel.

2. Voir à ce sujet mes *Note di Logica matematica* (*Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 405, Turin, 1899).

3. Si l'on considère les *points* comme *individus* et les *figures* comme *classes* (de points), la *coïncidence géométrique* est aussi une *égalité logique* : car les mêmes *points* appartiennent à deux *figures* coïncidentes quelconques, et les mêmes *figures* renferment deux *points* coïncidents quelconques. Tandis que l'égalité *géométrique* (comme *possibilité de coïncidence*) est une relation d'autre nature (quoiqu'elle aussi ait les trois propriétés formelles de l'égalité *logique* que nous venons d'énoncer : $a = a$, etc.) : car deux *figures* peuvent être *égales* (*superposables*) même n'ayant aucun *point* commun.

tons, comme d'ordinaire, par le signe $=$, sans autres explications.)

3. Comme toute *Df symbolique*¹ doit être de la forme $y = b [2]$, où y est le nouveau symbole et b est une suite de symboles déjà considérés (et où le signe $=$ peut être lu *signifie*), il nous faut voir comment l'on peut transformer la P « la classe a renferme le seul individu x » en une *égalité logique* résolue soit par rapport à a , soit par rapport à x .

D'abord, nous remarquons que notre P peut être exprimée, au moyen des symboles logiques déjà considérés (*est un* [1] et *est égal à* [2]), de la manière suivante : « x est un a ; et, toutes les fois que y est un a , $y = x$. »

Or, si nous convenons de considérer la phrase *est égal à* comme une abréviation de la liaison des phrases *est un* et *égal à*, alors, quel que soit l'objet x : « x est un [égal à x] (puisque $x = x [2]$); et, toutes les fois que y est un [égal à x] (en conséquence de notre convention), $y = x$ ». Il suit de là que « égal à x » est la classe qui renferme le seul individu x ², et que notre P « la classe a renferme le seul individu x » peut être remplacée par la P « $a =$ égal à x », qui est une *égalité logique* résolue par rapport à a .

D'ailleurs, même dans le langage ordinaire, si a est une

1. Nous écrivons « Df » au lieu de *définition*, même au pluriel.

2. Les idées x et « égal à x » sont évidemment différentes; car (par suite de notre convention), si l'on opère par « y est un », on obtient les P différentes : « y est un x » et « $y = x$ ». Voir : *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n° 3, p. 22 (Turin, 1899), et G. PEANO : E. Schröder, *Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien* (*Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 93, Turin, 1899).

classe qui renferme un seul individu, cet individu est désigné par « **le** a ». Par suite, on peut remplacer notre P « la classe a renferme le seul individu x » par la P « $x = \text{le } a$ » (où le signe $=$ peut être lu *est*), qui est une égalité logique résolue par rapport à x ¹.

4. Après le mot *ou* nous sous-entendons toujours la locution *au moins*. (Par suite, la P « $[x \text{ est un } a] \text{ ou } [x \text{ est un } b]$ » n'exclut pas que x soit un individu commun aux classes a et b .)

Au lieu de « $[x \text{ est un } a] \text{ ou } [x \text{ est un } b]$ » nous écrivons aussi « $x \text{ est un } [a \text{ ou } b]$ ». Par conséquent, si a et b sont des classes, « $a \text{ ou } b$ » est la classe à laquelle appartiennent tous les individus de a et tous les individus de b , et rien d'autre².

5. Si a est une classe, par **non- a** nous représentons la classe qui renferme tout ce qui n'appartient pas à a ; c'est-à-dire : nous donnons la même signification aux P « x n'est pas un a » et « $x \text{ est un } [\text{non-}a]$ » [1].

Nous représentons la phrase *n'est pas égal à* par le signe $\neq$. (Bien qu'il soit possible d'exprimer la P « $x \neq y$ » au moyen des symboles logiques déjà considérés, de la manière suivante : « x n'est pas un [égal à y] » [3]; ou bien : « $x \text{ est un } [\text{non-égal à } y]$ ».)

1. Par exemple, on peut écrire indifféremment :

$$13 = \text{le nombre premier entre 12 et 16}$$

ou :

$$\text{nombre premier entre 12 et 16} = \text{égal à 13}.$$

2. Par exemple, quels que soient x et y (même si $x = y$ [2]), la classe qui renferme x et y , et rien d'autre, est « [égal à x] ou [égal à y] » [3]. Par suite :

$$\text{* nombre } x \text{ tel que } [x^2 - 8x + 15 = 0] \text{ * } = \text{* égal à 3 ou égal à 5 *}.$$

6. Tout en employant les phrases ordinaires : *il y a des*, et : *il n'y a pas de*, il n'est pas inutile de remarquer qu'elles peuvent être exprimées par les symboles logiques déjà considérés.

En effet : quelle que soit la classe a , la classe « a ou non- a » [4, 5] renferme tout objet; d'ailleurs, la P « il n'y a pas de a » a le même sens que la P « la classe non- a renferme tout objet »; par conséquent [2], la P « il n'y a pas de a » signifie la même chose que la P

$$\text{non-}a = a \text{ ou non-}a.$$

Par suite [5], la P « il y a des a » a le même sens que la P

$$\text{non } a \neq a \text{ ou non-}a.$$

7. Soient a et b des classes. Supposons que, toutes les fois que x est un a , « ux » soit un b . Nous disons alors que u est un **transformateur des a en b** ¹.

Évidemment, quelle que soit la signification donnée séparément à y et « uy », u est un transformateur des « égal à y » [3] en « égal à uy ». Par suite, si $x=y$ (c'est-à-dire [3] : si x est un « égal à y »), il résulte que (« ux est un « égal à uy »; c'est-à-dire [3] :) $ux = uy$. Par conséquent :

$$\text{si } x = y, \quad \text{alors } ux = uy^2.$$

1. Par exemple, « $1 +$ » est un transformateur des *nombre pairs* en *nombre impairs* (car, toutes les fois que x est un nombre pair, $1 + x$ est un nombre impair) et des *nombre impairs* en *nombre pairs*; de même, quel que soit le nombre a , « $a +$ » est un transformateur des *nombre* en *nombre*.

2. Dans le *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n° 3, p. 25, on trouve une P symbolique dont la traduction est : « si a et b sont des classes, si u est un transformateur des a en b , si x et y sont des a , et si $x=y$, alors $ux=uy$ ». Il nous semble que l'énonciation explicite des trois premières conditions de l'Hp de cette P n'est pas nécessaire.

Il suit de là que, même avant de donner une signification à la notation $a + x$, la P « si $x = y$, alors $a + x = a + y$ » doit être acceptée en conséquence des *seules propriétés* de l'égalité logique. (Voilà pourquoi, dans notre essai d'Algèbre, nous n'énoncerons pas cette P et ses analogues, sans que cela nous empêche de nous en servir pour démontrer d'autres P, et sans que pour cela cette P et ses analogues doivent être considérées comme des *postulats* de l'Algèbre.)

Mais, si u est un transformateur des a en b , si x et y sont des a et si $ux = uy$, on ne peut pas conclure que nécessairement $x = y$.¹ (Par suite, il nous faudra démontrer des P telles que : « si a, x, y sont des nombres et si $a + x = a + y$, alors $x = y$ ».)

Il est presque inutile de remarquer que, si a et b sont des classes, et si u est un transformateur des a en b , il ne suit pas de là que, y étant un b quelconque, il y ait toujours un a , par exemple x , tel que $ux = y$.²

Introduction logique à une théorie déductive quelconque.

8. Si x et y sont des individus³, alors $x = y$ ou $x \neq y$. Pour nous, ce sont là les *seules relations* que l'on puisse

1. En effet, par exemple, le carré de est un transformateur des nombres (*positifs* ou *négatifs*) en nombres *positifs*; 3 et -3 sont des nombres; le carré de 3 = le carré de -3 ; et, néanmoins, $3 \neq -3$.

2. En effet, par exemple, « $2 \times$ » est un transformateur des nombres *impairs* en nombres *pairs*: mais, bien que 4 soit un nombre *pair*, il n'y a pas un nombre *impair* x , tel que $2 \times x = 4$.

3. Quels que soient x et y , ils sont des individus de la classe « [égal à x] ou [égal à y] » [4, note].

puisse considérer entre des *individus*, sans franchir les bornes qui séparent la *Logique générale* des *théories déductives particulières*¹.

Comme on fait d'ordinaire, au commencement d'une théorie déductive quelconque nous présupposons la connaissance des symboles et des P de *Logique générale* dont on fait usage dans la théorie en question; et nous appelons respectivement *symboles particuliers* et *P particulières* de cette théorie tous les *autres* symboles qui y sont considérés et toutes les *autres* P qui y sont énoncées.

9. Si *définir* un symbole signifie l'exprimer par d'autres déjà considérés, et si *démontrer* une P signifie la déduire d'autres déjà énoncées, alors il est évident, pour chaque théorie déductive [8], que

1° lorsqu'on dit qu'un symbole particulier [8] est ou n'est pas *définissable*, il faut ajouter : au moyen des autres symboles particuliers *a, b, c, ...*; et, lorsqu'on dit qu'une P particulière [8] est ou n'est pas *démontrable*, il faut

1. Nous disons *théories déductives particulières* (mais dans le titre et dans la suite nous sous-entendons le mot *particulières*) parce qu'on pourrait former d'abord une *théorie déductive générale*, en considérant seulement les symboles et les P de *Logique générale*.

A ce sujet, on lit dans le *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n° 3, p. 41 : « La démonstration d'une P de logique n'a pas, en général, pour but de nous assurer de sa vérité, mais bien de réduire ce mode de raisonnement à d'autres plus simples, que nous ne pourrions plus décomposer et que nous appelons P *primitives*. LEIBNIZ a exprimé par le langage ordinaire plusieurs démonstrations; dans SCHRÖDER : *Algebra der Logik*, 1890, on en trouvera un grand nombre. Des systèmes de P *primitives* et de démonstrations symboliques, ou des remarques relatives, sont contenus dans le *Formulaire de Mathématiques*, t. I et t. II, n° 1, la *Revue de Mathématiques*, et BURALI-FORTI : *Logica Matematica*, Milano, 1894; PADOA : *Conférences sur la Logique mathématique*, Bruxelles, 1898; COUTURAT : *La logique mathématique de M. Peano*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VII, p. 616, 1899. Il serait intéressant de coordonner ces théories ». Mais ce n'est pas ici que nous voulons nous en occuper.

ajouter : au moyen des autres P particulières $a, b, c, \dots$ ¹;

2° il n'est pas possible de définir tous les symboles particuliers et de démontrer toutes les P particulières².

10. Dans chaque théorie déductive il y a donc nécessairement [9] des symboles particuliers qui ne sont pas définis [8] et que nous appelons justement *symboles non-définis* de la théorie en question.

Comme il y a de l'arbitraire dans le choix du *système des symboles non-définis* d'une théorie déductive (car, presque toujours, il serait possible d'échanger le rôle de *définis* et de *non-définis* entre quelques-uns des symboles particuliers de la même théorie), il nous semble nécessaire et naturel de commencer une théorie déductive quelconque par l'énonciation *explicite et complète* de ce *système* : néanmoins il paraît que peu d'auteurs s'en préoccupent.

(Faut-il remarquer que les symboles non-définis d'une théorie n'en représentent pas nécessairement les *idées* les plus *simples*? d'ailleurs, saurait-on imaginer une *règle*

1. Tandis que, selon BLAISE PASCAL (*De l'Esprit géométrique*, Section I), « il y a des mots incapables d'être définis... parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient... que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction », et il y a des P qui ne sont pas démontrables parce qu'il n'y a « rien de plus clair pour les prouver.

2. BLAISE PASCAL (*Op. cit.*), avant d'énoncer « la manière de prouver la vérité et de l'exposer aux hommes... que la géométrie observe... », donne l'idée d'une méthode encore plus éminente et plus accomplie, mais où les hommes ne sauraient jamais arriver... Cette véritable méthode... consisterait en deux choses principales... définir tous les termes et prouver toutes les propositions ». Après être arrivé à notre affirmation 2°, il conclut : « D'où il paraît que les hommes sont dans une impuissance naturelle et immuable de traiter quelque science que ce soit dans un ordre absolument accompli ».

Ce pessimisme nous semble injustifié : car, si les hommes ne sauraient jamais arriver à la méthode que PASCAL appelle *véritable*, ce n'est pas à cause de leur impuissance naturelle, etc., mais de la contradiction qu'il y a entre cette méthode et la signification des mots *définir* et *prouver*.

pour choisir à coup sûr *la plus simple* parmi deux idées?)

11. Dans chaque théorie déductive, une *Df symbolique* n'est que la convention de remplacer par un nouveau symbole x (nouveau par rapport à la théorie) une suite a de symboles déjà considérés (savoir : symboles *logiques* [8], ou *non-définis* [10], ou *déjà définis*); c'est-à-dire : la convention de considérer dorénavant $x = a$.

Par conséquent, les Df symboliques, bien que très utiles au point de vue de la concision des P suivantes, ne sont pas nécessaires. En effet, par une simple *traduction symbolique* (c'est-à-dire : en remplaçant chaque symbole défini par la suite de symboles qui le définit), on peut réduire le système des symboles particuliers de la théorie au système des symboles non-définis.

12. Il suit aussi de ce que nous avons dit que, parmi les P particulières [8] d'une théorie déductive quelconque, qui ne sont pas des Df symboliques [11], il y en a nécessairement [9] qui ne sont pas démontrées; nous les appelons justement *P non-démontrées*.

On peut répéter pour ces P les considérations faites au sujet des symboles non-définis [10], en y remplaçant respectivement les mots *symbole*, *défini*, *idée* et *simple* par les mots *proposition*, *démontrée*, *fait* et *évident*.

13. Nous avons déjà vu que le point de départ nécessaire d'une *théorie déductive* quelconque [8] est un *système de symboles non-définis* [10] et un *système de P non-démontrées* [12]. D'ailleurs, il est évident qu'une théorie

déductive n'a aucune *importance pratique*, si ses symboles non-définis et ses P non-démontrées ne représentent pas (ou ne peuvent pas représenter) respectivement des *idées* et des *faits*. L'origine *psychologique* d'une théorie déductive est donc *empirique* ; néanmoins, son point de départ *logique* peut être considéré comme *conventionnel*.

En effet, pendant la période d'*élaboration* d'une théorie déductive quelconque, nous choisissons les *idées* que nous représentons par les symboles non-définis et les *faits* que nous énonçons par les P non-démontrées ; mais, lorsque nous commençons à *formuler* la théorie, nous pouvons imaginer que les symboles non-définis soient *complètement dépourvus de signification* et que les P non-démontrées (au lieu d'énoncer des *faits*, c'est-à-dire des *relations* entre les *idées* représentées par les symboles non-définis) ne soient que des *conditions* auxquelles les symboles non-définis sont assujettis.

Alors, le *système* des *idées* que nous avons choisi d'abord n'est qu'une *interprétation* du *système* des *symboles non-définis* ; mais, au point de vue déductif, cette interprétation peut être ignorée par le lecteur, qui peut librement la remplacer, dans sa pensée, par une *autre interprétation* qui vérifie les conditions énoncées par les *P non-démontrées*. Et, comme celles-ci, au point de vue déductif, n'énoncent pas des *faits*, mais des *conditions*, on ne peut les considérer comme de vrais *postulats*.

Ainsi les questions *logiques* acquièrent une complète indépendance à l'égard des questions *empiriques* ou

psychologiques (et, en particulier, du *problème de la connaissance*); et toute question relative à la *simplicité* des *idées* [10] et à l'*évidence* des *faits* [12] disparaît.

Néanmoins, si l'on fait usage d'une *écriture conventionnelle*, il est convenable d'énoncer le *système* des *idées* qu'on a voulu représenter par le système des symboles non-définis; ou, ce qui revient au même, il convient de proposer une *lecture* de ces *symboles*, par des mots ou des phrases du langage ordinaire (en ajoutant aussi des *explications* pour préciser la signification de ces mots ou phrases); pourvu que tout cela ne forme qu'un *commentaire* à la théorie, très utile pour faciliter la lecture et la compréhension du texte, mais complètement inutile au point de vue déductif; car ce qui est nécessaire au développement logique d'une théorie déductive n'est pas *la connaissance empirique des propriétés des choses*¹, mais *la connaissance formelle des relations entre les symboles*.

14. Dorénavant, nous considérerons seulement des théories déductives dans lesquelles la signification des symboles non-définis est énoncée comme un simple *commentaire* [13] et que l'on pourrait appeler *théories génériques*.

Il peut se faire qu'il y ait plusieurs (et même un nombre infini d') *interprétations* du système des symboles non-définis, qui *vérifient* le système des P *non-démontrées* et, par conséquent, toutes les P d'une théorie. Alors le sys-

1. Parfois même cette connaissance empirique est dangereuse, parce qu'elle peut combler et cacher des lacunes dans les raisonnements.

tème des symboles non-définis peut être considéré comme l'*abstraction* de toutes ces interprétations, et la *théorie générique* peut être considérée comme l'*abstraction* des *théories spécialisées* qu'on obtient en y remplaçant séparément le système des symboles non-définis par chacune de ses interprétations.

Par un seul raisonnement, qui démontre une *P* de la théorie générique, on démontre alors implicitement une *P* dans chacune de ses théories spécialisées¹.

15. On peut ajouter qu'une *Df symbolique* [11] n'*individualise* pas la signification du *symbole* qu'elle définit; elle exprime seulement une *relation* entre ce symbole et les symboles déjà considérés, qui suffit à *individualiser* sa *signification* dès que l'on choisit une *interprétation* du système des symboles *non-définis* (ou seulement des symboles non-définis qui forment, explicitement, la *Df* considérée).

16. Maintenant, nous pouvons résoudre complètement (et, croyons-nous, pour la première fois) une question de la plus grande importance logique.

Considérons une théorie générique quelconque [14] et supposons (pour faciliter notre étude sans en diminuer la généralité [11]) que dans les *P* non-démontrées [12] on n'ait employé d'autres symboles particuliers [8] que les symboles non-définis [10]².

1. La loi de dualité de la *Géométrie projective* donne une confirmation et un exemple des plus intéressants de ce que nous avançons.

2. Si l'on ne veut pas renoncer aux *Df symboliques*, il suffit de les énoncer après les *P non-démontrées*.

Nous disons que *le système des symboles non-définis est irréductible par rapport au système des P non-démontrées*, lorsque *du système des P non-démontrées il n'est pas possible de déduire la Df symbolique d'aucun des symboles non-définis*; c'est-à-dire [11] : lorsqu'il n'est pas possible d'en déduire une relation de la forme $x=a$, où x est un des symboles non-définis et a est une suite d'autres de ces symboles (et de symboles logiques [8]).

Évidemment, l'*infructuosité* des tentatives faites pour déduire du système des P non-démontrées une relation quelconque de la forme considérée ne peut pas suffire à *prouver* l'irréductibilité dont il est question; il faut donc trouver une *méthode de démonstration* de cette irréductibilité¹.

Supposons qu'après avoir déterminé une *interprétation* du système des symboles non-définis, qui vérifie le système des P non-démontrées [14], toutes ces P continuent à être vérifiées si l'on change convenablement la *seule* signification du symbole non-défini x . Alors, puisque la signification de x ne se trouve pas *individualisée* après avoir choisi une *interprétation* des *autres* symboles non-définis, on peut affirmer que des P non-démontrées il n'est pas possible de déduire une relation de la forme $x=a$, où a est une suite d'autres symboles non-définis [11, 15].

Réciproquement, pour pouvoir affirmer qu'il n'est pas possible de déduire des P non-démontrées une relation de la forme considérée, il faut montrer que la signification

1. Dans le cas, naturellement, où elle existe.

de x ne se trouve pas individualisée après avoir choisi une interprétation des autres symboles non-définis; et cela en déterminant une interprétation du système des symboles non-définis, qui vérifie le système des P non-démontrées et qui continue à le vérifier si l'on change convenablement la seule signification de x .

Par conséquent : *Pour démontrer que le système des symboles non-définis est irréductible par rapport au système des P non-démontrées, il est nécessaire et suffisant de trouver, pour chaque symbole non-défini, une interprétation du système des symboles non-définis, qui vérifie le système des P non-démontrées et qui continue à le vérifier si l'on change convenablement la seule signification du symbole considéré.*

Dans notre essai d'Algèbre, nous démontrons que le système des *symboles non-définis* est irréductible par rapport au système des P non-démontrées : ce que nous croyons n'avoir jamais été fait par d'autres auteurs, pas même dans d'autres théories.

17. Considérons encore une théorie qui vérifie les conditions énoncées au commencement du § précédent.

Nous disons que *le système des P non-démontrées est irréductible* (ou que ces P sont *absolument indépendantes*) lorsqu'il n'est pas possible de déduire aucune des P non-démontrées d'autres de ces P (et des P logiques [8]).

Par analogie avec ce que nous avons dit pour l'irréductibilité du système des symboles primitifs [16], on ne

pourrait accepter comme *preuve* de l'irréductibilité dont il est question l'*infructuosité* des tentatives faites pour déduire une quelconque des P non-démontrées d'autres de ces P . Mais on connaît depuis longtemps une *méthode de démonstration* de cette irréductibilité¹.

Supposons que nous ayons déterminé une *interprétation* du système des symboles non-définis, qui vérifie le système des P non-démontrées [14], exception faite pour *une seule* de ces P . Alors, cette P n'est pas une conséquence logique des autres P ; c'est-à-dire : il n'est pas possible de déduire la P considérée des autres P non-démontrées.

Réciproquement, pour pouvoir nier la possibilité de déduire la P considérée des autres P non-démontrées, il faut montrer qu'elle pourrait être fausse même si toutes les autres étaient vraies; et cela en déterminant une *interprétation* du système des symboles non-définis, qui vérifie toutes les autres P non-démontrées.

Par conséquent : *Pour démontrer que le système des P non-démontrées est irréductible, il est nécessaire et suffisant de trouver, pour chacune de ces P , une interprétation du système des symboles non-définis, qui vérifie toutes les autres P non-démontrées, mais non cette P .*

Dans notre essai d'*Algèbre*, nous *démontrons* que le système des P non-démontrées est irréductible.

1. Dans le cas, naturellement, où elle existe. Par exemple, dans le *Formulaire de Mathématiques* (t. II, n° 3, p. 30) on trouve la démonstration de l'indépendance absolue des P non-démontrées de l'*Arithmétique*.

18. Une autre remarque est nécessaire au sujet des *Df symboliques* [11, 15].

Parfois, il est convenable de représenter par un *nouveau symbole*, par exemple x , le seul individu qui appartient à une classe (déjà considérée dans la théorie), par exemple a . Or, avant d'énoncer, comme *Df symbolique*, la P « $x = \text{le } a$ » [3], il faut s'assurer si des P précédentes de la théorie, ou de l'hypothèse de la *Df* elle-même, on peut déduire l'*existence* et l'*unicité* de l'individu à définir; c'est-à-dire, si l'on en peut déduire les P : « il y a des a [6] » et « si y et z sont des a [1], alors, quels que soient y et z , $y = z$ [2] » (c'est-à-dire : il n'y a pas des a différents). Car, si cela n'était pas, après la P « $x = \text{le } a$ » on aurait le droit logique d'affirmer l'*existence* et l'*unicité* de x , que l'on n'avait pas avant : ce qui ôterait à la P « $x = \text{le } a$ » le caractère de *Df symbolique* [11] ¹.

1. Autrement, on justifierait ceux qui affirmaient que *Dieu existe par définition*. (Ce n'est pas une critique théologique que nous voulons faire ici, mais une simple remarque logique.)

Néanmoins, plusieurs auteurs énoncent, comme *Df symboliques*, des P de la forme « $x = \text{le } a$ », sans se préoccuper de déduire préalablement, des P précédentes de la théorie, l'*existence* et l'*unicité* de l'individu à définir ou de restreindre la *Df*, au moyen d'une hypothèse convenable, au cas où cette existence et cette unicité subsistent. S'ils n'arrivent presque jamais à des erreurs, c'est seulement parce qu'ils tirent de leurs connaissances empiriques la preuve qui ne découle pas toujours des P énoncées : et parfois, en procédant ainsi, ils diminuent en apparence le nombre des P non-démonstrées.

I. — *Propriétés générales des entiers.*

19². Les *symboles non-définis* de notre théorie [10] sont :

ent qu'on lira *entier*,

suc le *successif* de,

sym le *symétrique* de.

20. Les *P non-démontrées* de notre théorie [12] sont :

Si a est un **ent**, alors

P 1. « **suc** a » est un **ent**,

P 2. « **sym** a » est un **ent**,

P 3. **sym** (**sym** a) = a ,

P 4. **sym** { **suc** [**sym** (**suc** a)] } = a .

P 5. Il y a un **ent**, par exemple x , tel que « **sym** x = x ».

P 6. Si a et b sont des **ent**, si $a \neq b$, et si « **sym** a = a », alors « **sym** $b \neq b$ ».

P 7. Si un **ent** est un u ; si toutes les fois qu'un **ent**, par exemple x , est un u , « **suc** x » est un u ; et si, toutes les fois que y est un **ent** tel que « **suc** y » est un u , y est un u ; alors, chaque **ent** est un u .

21. P 8. Si a et b sont des **ent**, et si « **sym** a = **sym** b », alors $a = b$.

*Dem.*¹ De « **sym** a = **sym** b » on déduit [7]² :

$$\text{sym}(\text{sym } a) = \text{sym}(\text{sym } b)$$

d'où [*Hp* et P 3] la *Ts*.

1. Voir, dans le COMMENTAIRE, les §§ 55-59.

2. Nous abrégeons les mots *démonstration*, *hypothèse* et *thèse* en *Dem*, *Hp* et *Ts*.

3. Presque toujours nous citons le § 7 de l'*Avant-propos* pour rappeler la *P* logique : Quelle que soit la signification de x, y, u , si $x = y$, alors $ux = uy$.

P 9. Si a est un **ent**, et si « **sym** $a = x$ », alors $a = \mathbf{sym} x$.

Dem. De « **sym** $a = x$ » on déduit [7] :

$$\mathbf{sym} (\mathbf{sym} a) = \mathbf{sym} x$$

d'où [Hp et P 3] la Ts .

22. P 10. Si a est un **ent**, alors

$$\mathbf{suc} [\mathbf{sym} (\mathbf{suc} a)] = \mathbf{sym} a.$$

Dem. De l' Hp et des P 1, 2 on déduit :

$$\text{« } \mathbf{suc} [\mathbf{sym} (\mathbf{suc} a)] \text{ » est un ent;} \quad (1)$$

de (1) et des P 4, 9 on déduit la Ts .

P 11. Si a est un **ent**, alors

$$\mathbf{suc} \{ \mathbf{sym} [\mathbf{suc} (\mathbf{sym} a)] \} = a.$$

Dem. De l' Hp et de la P 2 on déduit :

$$\text{« } \mathbf{sym} a \text{ » est un ent;}$$

d'où, par les P 10 (en y remplaçant a par « **sym** a ») et 3, on déduit la Ts .

23. P 12. Si a et b sont des **ent**, et si « **suc** $a = \mathbf{suc} b$ », alors $a = b$.

Dem. De « **suc** $a = \mathbf{suc} b$ » on déduit [7] :

$$\mathbf{sym} \{ \mathbf{suc} [\mathbf{sym} (\mathbf{suc} a)] \} = \mathbf{sym} \{ \mathbf{suc} [\mathbf{sym} (\mathbf{suc} b)] \}$$

d'où [Hp et P 4] la Ts .

P 13. Si a est un **ent**, alors il y a un **ent**, par exemple x , tel que « **suc** $x = a$ ».

Dem. De l' Hp et des P 1, 2 on déduit :

$$\mathbf{sym} [\mathbf{suc} (\mathbf{sym} a)] \text{ est un ent;}$$

par conséquent, si

$$x = \text{sym} [\text{suc} (\text{sym } a)] \quad (1)$$

$$x \text{ est un ent}; \quad (2)$$

mais de (1) on déduit [7]

$$\text{suc } x = \text{suc} \{ \text{sym} [\text{suc} (\text{sym } a)] \}$$

d'où [Hp et P 11]

$$\text{suc } x = a; \quad (3)$$

les formules (1), (2), (3) prouvent qu'il est possible de déterminer un **ent**, par exemple x , tel que $\text{suc } x = a$.

P 14. Si a est un **ent**, alors il n'y a qu'un **ent**, par exemple x , tel que $\text{suc } x = a$.

Dem. En d'autres termes [3] : Si a, x, y sont des **ent**, si $\text{suc } x = a$ et si $\text{suc } y = a$, alors $x = y$. Or, de l'Hp de cette P on déduit : x, y sont des **ent** et $\text{suc } x = \text{suc } y$; d'où [P 12] $x = y$.

24. Maintenant que (a étant un **ent**) nous avons démontré l'existence [P 13] et l'unicité [P 14] de l'**ent** x , tel que $\text{suc } x = a$, nous pouvons [18] le représenter par un nouveau symbole, par exemple « **prec** a » (qu'on lira : le précédent de a). En d'autres termes, nous énonçons comme *Df symbolique* la

P 15. Si a est un **ent**, alors

$$\text{prec } a = \text{« l'ent } x, \text{ tel que } \text{suc } x = a \text{ »}.$$

On en déduit immédiatement les

P 16. Si a est un **ent**, alors **prec** a est un **ent**.

P 17. Si a est un **ent** et si $x = \text{prec } a$, alors $\text{suc } x = a$.

De la P 15, en remplaçant x par b , on déduit encore la P 18. Si a et b sont des **ent** et si **suc** $b = a$, alors $b = \text{prec } a$.

Puisque l'on a toujours [2] **prec** $a = \text{prec } a$, de la P 17 (en y remplaçant x par **prec** a) on déduit la

P 19. Si a est un **ent**, alors **suc** (**prec** a) = a .

Puisque l'on a toujours [2] **suc** $b = \text{suc } b$, de la P 18 (en y remplaçant a par **suc** b [P 1]) on déduit la P : Si b est un **ent**, alors $b = \text{prec} (\text{suc } b)$; d'où la

P 20. Si a est un **ent**, alors **prec** (**suc** a) = a .

Remarquons encore la

P 21. Si a et b sont des **ent** et si **prec** $a = \text{prec } b$, alors $a = b$.

Dem. De **prec** $a = \text{prec } b$ on déduit [7]

$$\text{suc} (\text{prec } a) = \text{suc} (\text{prec } b)$$

d'où [*Hp* et P 19] la Ts^1 .

25. P 22. Si a est un **ent**, alors

$$\text{sym} (\text{suc } a) = \text{prec} (\text{sym } a). \quad (1)$$

Dem. de l'*Hp* et des P 1, 2 on déduit

$$\text{sym } a \text{ et } \text{sym} (\text{suc } a) \text{ sont des ent;} \quad (2)$$

de (2) et de la P 18 [en y remplaçant respectivement a et b par **sym** a et **sym** (**suc** a)] on déduit :

$$\text{si } \text{suc} [\text{sym} (\text{suc } a)] = \text{sym } a, \text{ alors on a (1);}$$

d'où [P 10] la P à démontrer.

1. Toutes les P du § 24 sont des conséquences logiques de la seule P 15 : ce qui confirme ce que nous avons dit au § 18.

P 23. Si a est un **ent**, alors

$$\mathbf{sym}(\mathbf{prec} a) = \mathbf{suc}(\mathbf{sym} a).$$

Dem. De l'*Hp* et de la P 10 (en y remplaçant a par $\mathbf{prec} a$ [P 16]) on déduit

$$\mathbf{suc}\{\mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{prec} a)]\} = \mathbf{sym}(\mathbf{prec} a); \quad (1)$$

de la P 19 on déduit [7]

$$\mathbf{suc}\{\mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{prec} a)]\} = \mathbf{suc}(\mathbf{sym} a)$$

d'où [(1)] la *Ts*.

P 24. Si a est un **ent**, alors

$$\mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym} a)] = \mathbf{prec} a^1.$$

Dem. De l'*Hp* et de la P 22 (en y remplaçant a par $\mathbf{sym} a$ [P 2]) on déduit

$$\mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym} a)] = \mathbf{prec}[\mathbf{sym}(\mathbf{sym} a)]; \quad (1)$$

de la P 3 on déduit [7]

$$\mathbf{prec}[\mathbf{sym}(\mathbf{sym} a)] = \mathbf{prec} a$$

d'où [(1)] la *Ts*.

P 25. Si a est un **ent**, alors

$$\mathbf{sym}[\mathbf{prec}(\mathbf{sym} a)] = \mathbf{suc} a^1.$$

Dem. De l'*Hp* et de la P 23 (en y remplaçant a par $\mathbf{sym} a$ [P 2]) on déduit

$$\mathbf{sym}[\mathbf{prec}(\mathbf{sym} a)] = \mathbf{suc}[\mathbf{sym}(\mathbf{sym} a)]; \quad (1)$$

1. Cette P donne la possibilité de définir le symbole **prec** au moyen des symboles **sym** et **suc**.

2. Cette P donne la possibilité de définir le symbole **suc** au moyen des symboles **sym** et **prec**.

de la P 3 on déduit [7]

$$\text{suc} [\text{sym} (\text{sym } a)] = \text{suc } a$$

d'où [(1)] la *Ts*.

26. Puisque nous avons admis l'*existence* [P 5] et l'*unicité* [P 6] de l'**ent** x , tel que **sym** $x = x$, nous pouvons [18] le représenter par un *nouveau symbole*, par exemple 0 (qu'on lira *zéro*).

En d'autres termes, nous énonçons comme *Df symbolique* la

P 26. $0 =$ « l'**ent** x , tel que **sym** $x = x$. »

On en déduit immédiatement les

P 27. 0 est un **ent**.

P 28. **sym** 0 = 0.

P 29. Si a est un **ent** et si **sym** $a = a$, alors $a = 0^1$.

27. Maintenant, nous énonçons, comme *Df symbolique* du *nouveau symbole* 1 (qu'on lira *un*), la

P 30. $1 = \text{suc } 0^2$.

Des P 27 et 1 on déduit **suc** 0 est un **ent**; d'où [P 30] la

P 31. 1 est un **ent**.

De la P 30 on déduit encore [7]

$$\text{sym } 1 = \text{sym} (\text{suc } 0); \quad (1)$$

des P 27 et 22 on déduit

$$\text{sym} (\text{suc } 0) = \text{prec} (\text{sym } 0); \quad (2)$$

de la P 28 on déduit [7]

$$\text{prec} (\text{sym } 0) = \text{prec } 0; \quad (3)$$

1. Toutes les P du § 26 sont des conséquences logiques de la seule P 26 : ce qui confirme, encore une fois [§ 24, *note*], ce que nous avons dit au § 18.

2. Voir, dans le *COMMENTAIRE*, le § 60.

des formules (1), (2) et (3) on déduit la

P 32. **sym** 1 = **prec** 0.

Des P 31 et 2 on déduit la

P 33. **sym** 1 est un **ent**.

28. P 34. Si 0 est un u et si, toutes les fois qu'un **ent** x est un u , **suc** x et **prec** x sont aussi des u , alors chaque **ent** est un u .

Dem. D'abord, de la P 27 et de l'*Hp* on déduit

$$\text{un ent est un } u; \quad (1)$$

dans l'*Hp* on trouve énoncé explicitement que

$$\text{toutes les fois qu'un ent } x \text{ est un } u, \text{ suc } x \text{ est un } u. \quad (2)$$

$$\text{Si } y \text{ est un ent et suc } y \text{ est un } u, \quad (3)$$

$$\text{alors [P1 et Hp] } \text{prec (suc } y) \text{ est un } u,$$

$$\text{d'où [(3) et P 20] } y \text{ est un } u; \quad (4)$$

donc [(3), (4)] :

$$\text{toutes les fois que } y \text{ est un ent et que suc } y \text{ est un } u, y \text{ est un } u. \quad (5)$$

Mais les formules (1), (2), (5) forment l'*Hp* de la P 7; d'où la *Ts*.

P 35. Si 0 est un u et si, toutes les fois qu'un **ent** x est un u , **suc** x et **sym** x sont aussi des u , alors chaque **ent** est un u .

Dem. Si

$$x \text{ est un ent qui est un } u \quad (1)$$

$$\text{alors [P 2 et Hp] } \text{sym } x \text{ est un ent qui est un } u$$

$$\text{et aussi [P1 et Hp] } \text{suc (sym } x) \text{ est un ent qui est un } u;$$

$$\text{par conséquent [Hp] } \text{sym [suc (sym } x)] \text{ est un } u. \quad (2)$$

Des formules (1), (2) et de la P 24 on déduit

toutes les fois qu'un **ent** x est un u , **prec** x est aussi un u . (3)

De l'*Hp* et de (3) on déduit l'*Hp* de la P 34; d'où la *Ts*.

P 36. Si 0 est un u et si, toutes les fois qu'un **ent** x est un u , **prec** x et **sym** x sont aussi des u , alors chaque **ent** est un u .

Dem. Si

x est un **ent** qui est un u (1)

alors [P 2 et *Hp*] **sym** x est un **ent** qui est un u

et aussi [P 16 et *Hp*] **prec** (**sym** x) est un **ent** qui est un u ;

par conséquent [*Hp*] **sym** [**prec** (**sym** x)] est un u . (2)

Des formules (1), (2) et de la P 25 on déduit

toutes les fois qu'un **ent** x est un u , **suc** x est aussi un u . (3)

De l'*Hp* et de (3) on déduit l'*Hp* de la P 34 (ou 35); d'où la *Ts*¹.

II. — *Sommes d'entiers.*

29. Moyennant les

P 37. Si a est un **ent**, $a + 0 = a$,

P 38. Si a et b sont des **ent**,

$$a + (\text{suc } b) = \text{suc } (a + b),$$

P 39. Si a et b sont des **ent**,

$$a + (\text{prec } b) = \text{prec } (a + b),$$

nous définissons par enchaînement algébrique la notation

1. Voir, dans le COMMENTAIRE, le § 61.

$x + y$, où x et y sont des **ent** et où le *nouveau symbole* + se lira *plus*, comme d'ordinaire¹.

30. P 40. Si a et b sont des **ent**, alors $a + b$ est un **ent**².

Dem. Soit u la classe des **ent** x , tels que

$$a + x \text{ est un ent.} \quad (1)$$

$$\text{D'abord [Hp, P 27, 37 et (1)] } 0 \text{ est un } u. \quad (2)$$

$$\text{Toutes les fois que } x \text{ est un } u, \quad (3)$$

on a, à cause de (1) et de la P 1,

$$\begin{aligned} & \text{suc } (a + x) \text{ est un ent} \\ \text{d'où [Hp, P 38 et § 2] } a + (\text{suc } x) & \text{ est un ent} \\ \text{c'est-à-dire [P 1 et (1)] } \text{suc } x & \text{ est un } u; \end{aligned} \quad (4)$$

d'ailleurs [(3), (1) et P 16] on a

$$\begin{aligned} & \text{prec } (a + x) \text{ est un ent} \\ \text{d'où [Hp, P 39 et § 2] } a + (\text{prec } x) & \text{ est un ent} \\ \text{c'est-à-dire [P 16 et (1)] } \text{prec } x & \text{ est un } u. \end{aligned} \quad (5)$$

De (2), (3-4), (3-5) et de la P 34 on déduit

$$\begin{aligned} & \text{chaque ent est un } u \\ \text{c'est-à-dire [(1)]} \end{aligned}$$

$$\text{si } x \text{ est un ent, alors } a + x \text{ est un ent;}$$

mais, par Hp, b est un **ent**, donc la Ts est vraie.

31. P 41. Si a est un **ent**, alors $a + 1 = \text{suc } a$.

Dem. De la P 30 on déduit [7]

$$a + 1 = a + (\text{suc } 0); \quad (1)$$

1. Voir, dans le COMMENTAIRE, le § 62.

2. Cette P est nécessaire pour donner une signification à la notation $a + b + c$ (c'est-à-dire $(a + b) + c$), où a, b, c sont des **ent**.

de l'*Hp* et des P 27 et 38 on déduit

$$a + (\text{suc } 0) = \text{suc } (a + 0); \quad (2)$$

de l'*Hp* et de la P 37 on déduit [7]

$$\text{suc } (a + 0) = \text{suc } a; \quad (3)$$

des formules (1), (2), (3) on déduit la *Ts*.

P 42. Si a est un **ent**, alors $a + (\text{sym } 1) = \text{prec } a'$.

Dem. De la P 32 on déduit [7]

$$a + (\text{sym } 1) = a + (\text{prec } 0); \quad (1)$$

de l'*Hp* et des P 27 et 39 on déduit

$$a + (\text{prec } 0) = \text{prec } (a + 0); \quad (2)$$

de l'*Hp* et de la P 37 on déduit [7]

$$\text{prec } (a + 0) = \text{prec } a; \quad (3)$$

des formules (1), (2), (3) on déduit la *Ts*.

32. P 43. Si a , b et c sont des **ent** et si $a + c = b + c$, alors $a = b$.

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que,

$$\text{si } a + x = b + x, \quad \text{alors } a = b. \quad (1)$$

$$\text{D'abord [Hp et P 27, 37]} \quad 0 \text{ est un } u. \quad (2)$$

$$\text{Toutes les fois que } x \text{ est un } u, \quad (3)$$

$$\text{si } a + (\text{suc } x) = b + (\text{suc } x) \quad (4)$$

alors [*Hp* et P 38]

$$\text{suc } (a + x) = \text{suc } (b + x)$$

1. Voir, dans le COMMENTAIRE, le § 63.

2. Dans le § 7 on trouve la preuve de la nécessité de démontrer la P 43, qui n'exprime pas un fait purement logique, comme, par exemple, celui qui est énoncé dans la P

Si a , b , c sont des **ent** et si $a = b$, alors $a + c = b + c$.

et par suite [P 40 et 12] $a + x = b + x$

d'où [(3), (1)] $a = b$ (5)

et par conséquent [(4-5), P 1 et (1)]

suc x est un u ; (6)

d'autre part, si $a + (\text{prec } x) = b + (\text{prec } x)$ (7)

alors [Hp et P 39]

prec $(a + x) = \text{prec } (b + x)$

et par suite [P 40 et 21] $a + x = b + x$

d'où [(3), (1)] $a = b$ (8)

et par conséquent [(7-8), P 16 et (1)] **prec** x est un u . (9)

Des formules (2), (3-6), (3-9) et de la P 34 on déduit

chaque **ent** est un u

c'est-à-dire [(1)]

si x est un **ent** et si $a + x = b + x$, alors $a = b$;

mais, par Hp, c est un **ent**; donc la Ts est vraie.

P 44. Si a , b , c et d sont des **ent**, si $c = d$ et si $a + c = b + d$, alors $a = b$.

Dem. De l'Hp on déduit $d = c$ et par suite [7]

$a + d = a + c$;

mais, par Hp

$a + c = b + d$;

donc

$a + d = b + d$

d'où, par la P 43 (en y remplaçant c par d), la Ts.

33. P 45. Si a , b et c sont des **ent**, alors

$(a + b) + c = a + (b + c)$ ¹.

1. Voir la note à la P 40.

Dem. De l'*Hp* et des P 40 et 37 on déduit

$$(a + b) + 0 = a + b; \quad (1)$$

de l'*Hp* et de la P 37 on déduit $b + 0 = b$, d'où [7]

$$a + (b + 0) = a + b; \quad (2)$$

par suite [(1), (2)]

$$(a + b) + 0 = a + (b + 0). \quad (3)$$

Si

$$x \text{ est un ent}, \quad (4)$$

de l'*Hp* et des P 40 et 38 on déduit

$$(a + b) + (\text{succ } x) = \text{succ } [(a + b) + x] \quad (5)$$

et

$$\text{succ } [a + (b + x)] = a + [\text{succ } (b + x)]; \quad (6)$$

de la P 38 on déduit

$$\text{succ } (b + x) = b + (\text{succ } x)$$

et par suite [7]

$$a + [\text{succ } (b + x)] = a + [b + (\text{succ } x)]; \quad (7)$$

De l'*Hp* et des P 40 et 39 on déduit

$$(a + b) + (\text{prec } x) = \text{prec } [(a + b) + x] \quad (8)$$

et

$$\text{prec } [a + (b + x)] = a + [\text{prec } (b + x)]; \quad (9)$$

de la P 39 on déduit

$$\text{prec } (b + x) = b + (\text{prec } x)$$

et par suite [7]

$$a + \text{prec } (b + x) = a + [b + (\text{prec } x)]. \quad (10)$$

Maintenant, soit u la classe des ent x tels que

$$(a + b) + x = a + (b + x). \quad (11)$$

D'abord [P 27, (11) et (3)] 0 est un u . (12)

Toutes les fois que x est un u , (13)

$$[(11) \text{ et } \S 7] \quad \text{suc} [(a + b) + x] = \text{suc} [a + (b + x)] \quad (14)$$

et [(11) et § 7]

$$\text{prec} [(a + b) + x] = \text{prec} [a + (b + x)]; \quad (15)$$

par conséquent [(4-5), (14), (4-6), (4-7)],

$$(a + b) + (\text{suc } x) = a + [b + (\text{suc } x)] \quad (16)$$

et [(4-8), (15), (4-9), (4-10)]

$$(a + b) + (\text{prec } x) = a + [b + (\text{prec } x)]; \quad (17)$$

d'où [(11), P 1 et (16), P 16 et (17)]

$$\text{suc } x \text{ et } \text{prec } x \text{ sont des } u. \quad (18)$$

Des formules (12), (13-18) et de la P 34 on déduit

chaque **ent** est un u

c'est-à-dire [(1)]

$$\text{si } x \text{ est un } \text{ent}, (a + b) + x = a + (b + x);$$

mais, par *Hp*, c est un **ent**; donc la *Ts* est vraie.

34: P 46. Si a est un **ent**, alors $1 + a = \text{suc } a$.

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que

$$1 + x = \text{suc } x. \quad (1)$$

D'abord [P 31, 37] $1 + 0 = 1$,

$$\text{d'où [P 30]} \quad 1 + 0 = \text{suc } 0,$$

c'est-à-dire [P 27 et (1)]

$$0 \text{ est un } u. \quad (2)$$

Toutes les fois que x est un u , (3)

$$[\text{P } 31, 38] \quad 1 + (\text{suc } x) = \text{suc} (1 + x)$$

$$\text{d'où [(1) et } \S 7] \quad 1 + (\text{suc } x) = \text{suc} (\text{suc } x)$$

$$\text{c'est-à-dire [P 1 et (1)]} \quad \text{suc } x \text{ est un } u; \quad (4)$$

de même [P 31, 39]

$$1 + (\text{prec } x) = \text{prec } (1 + x)$$

d'où [(1) et § 7] $1 + (\text{prec } x) = \text{prec } (\text{suc } x)$

et par suite [P 20, 19]

$$1 + (\text{prec } x) = \text{suc } (\text{prec } x)$$

c'est-à-dire [P 16 et (1)] $\text{prec } x$ est un u . (5)

Des formules (2), (3-4), (3-5) et de la P 34 on déduit

chaque **ent** est un u

c'est-à-dire [(1)]

si x est un **ent**, alors $1 + x = \text{suc } x$;

mais, par *Hp*, a est un **ent**, donc la *Ts* est vraie.

P 47. Si a et b sont des **ent**, alors

$$(\text{suc } a) + b = \text{suc } (a + b).$$

Dem. Puisque [*Hp* et P 41]

$$\text{suc } a = a + 1$$

$$(^{\circ}) \quad (\text{suc } a) + b = (a + 1) + b$$

d'où [*Hp* et P 31, 45]

$$(\text{suc } a) + b = a + (1 + b); \quad (1)$$

mais [*Hp* et P 46] $1 + b = \text{suc } b$

$$\text{d'où [7]} \quad a + (1 + b) = a + (\text{suc } b) \quad (2)$$

Des formules (1), (2) et de la P 38 on déduit la *Ts*.

P 48. Si a et b sont des **ent**, alors

$$(\text{prec } a) + b = \text{prec } (a + b).$$

1. En appliquant la *P logique* • quels que soient x, y, u , si $x = y$, alors $xu = yu$ • qui est implicitement énoncée dans le § 7.

Dem. De l'*Hp* on déduit (P 16)

prec a et b sont des **ent**;

d'où, en remplaçant, dans la P 47, a par **prec** a ,

$$[\text{suc}(\text{prec } a)] + b = \text{suc}[(\text{prec } a) + b]; \quad (1)$$

mais [*Hp*, P 19 (1)]

$$\begin{aligned} & [\text{suc}(\text{prec } a)] + b = a + b \\ \text{et par suite [(1)]} \quad & \text{suc}[(\text{prec } a) + b] = a + b \end{aligned} \quad (2)$$

Puisque [*Hp* et P 16, 40]

$(\text{prec } a) + b$ et $a + b$ sont des **ent**,

de la formule (2) et de la P 18 on déduit la *Ts*.

35. P 49. Si a est un **ent**, alors $0 + a = a$.

Dem. Des P 27, 31, 30 et 18 on déduit $0 = \text{prec } 1$,
d'où¹

$$0 + a = (\text{prec } 1) + a; \quad (1)$$

d'autre part [P 31, *Hp* et P 48]

$$(\text{prec } 1) + a = \text{prec}(1 + a) \quad (2)$$

[*Hp*, P 46 et § 7]

$$\text{prec}(1 + a) = \text{prec}(\text{suc } a) \quad (3)$$

[*Hp* et P 20]

$$\text{prec}(\text{suc } a) = a. \quad (4)$$

Des formules (1), (2), (3), (4) on déduit la *Ts*.

P 50. Si a et b sont des **ent**, alors $a + b = b + a$.

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que

$$a + x = x + a, \quad (1)$$

1. Voir la note à la P 47.

D'abord [*Hp* et P 27, 37, 49] 0 est un *u*. (2)

Toutes les fois que *x* est un *u*, (3)

[(3), (1) et § 7] $\text{suc}(a + x) = \text{suc}(x + a)$

d'où [*Hp* et P 38, 47]

$$a + (\text{suc } x) = (\text{suc } x) + a$$

c'est-à-dire [P 1 et (1)] $\text{suc } x$ est un *u*; (4)

de même [(3), (1) et § 7]

$$\text{prec}(a + x) = \text{prec}(x + a)$$

d'où [*Hp* et P 39, 48]

$$a + (\text{prec } x) = \text{prec}(x + a)$$

c'est-à-dire [P 16 et (1)] $\text{prec } x$ est un *u*. (5)

Des formules (2), (3-4), (3-5) on déduit

chaque **ent** est un *u*,

c'est-à-dire [(1)]

si *x* est un **ent**, alors $a + x = x + a$;

mais, par *Hp*, *b* est un **ent**; donc la *Ts* est vraie.

36. P 51. Si *a* et *b* sont des **ent**, alors

$$a + (\text{sym } b) = \text{sym}[(\text{sym } a) + b].$$

Dem. Soit *u* la classe des **ent** *x* tels que

$$a + (\text{sym } x) = \text{sym}[(\text{sym } a) + x] \quad (1)$$

Puisque [P 28 et § 7] $a + (\text{sym } 0) = a + 0$

[*Hp* et P 37] $a + (\text{sym } 0) = a$; (2)

mais [*Hp*, P 2 et 37]

$$\text{sym } a = (\text{sym } a) + 0$$

d'où [*Hp* et P 9] $a = \text{sym}[(\text{sym } a) + 0]$; (3)

donc [(1), (2), (3) et P 27] 0 est un *u*. (4)

Toutes les fois que x est un u , (5)

[P 22 et § 7]

$$a + [\text{sym}(\text{suc } x)] = a + [\text{prec}(\text{sym } x)], \quad (6)$$

[Hp, P 2 et 39]

$$a + [\text{prec}(\text{sym } x)] = \text{prec}[a + (\text{sym } x)], \quad (7)$$

[(1) et § 7]

$$\text{prec}[a + (\text{sym } x)] = \text{prec}\{\text{sym}[(\text{sym } a) + x]\}; \quad (8)$$

puisque [Hp, P 2, 40]

$$« (\text{sym } a) + x » \text{ est un ent}$$

[P 22]

$$\text{prec}\{\text{sym}[(\text{sym } a) + x]\} = \text{sym}\{\text{suc}[(\text{sym } a) + x]\}; \quad (9)$$

mais [Hp, P 2 et 38]

$$\text{suc}[(\text{sym } a) + x] = (\text{sym } a) + (\text{suc } x)$$

d'où [7]

$$\text{sym}\{\text{suc}[(\text{sym } a) + x]\} = \text{sym}[(\text{sym } a) + (\text{suc } x)]; \quad (10)$$

des formules (6), (7), (8), (9), (10) on déduit

$$a + [\text{sym}(\text{suc } x)] = \text{sym}[(\text{sym } a) + (\text{suc } x)]$$

c'est-à-dire [P 1 et (1)] $\text{suc } x$ est un u . (11)

De même (en remplaçant, dans les (6)-(11), **suc** et **prec** par **prec** et **suc**, et, dans les citations, les P 22, 38, 39, 1 par les P 23, 39, 38, 16) de la (5) on déduit

$$\text{prec } x \text{ est un } u. \quad (12)$$

Des formules (4), (5-11), (5-12) et de la P 34 on déduit

$$\text{chaque ent est un } u,$$

c'est-à-dire [(1)] si x est un **ent**, on a (4);

mais, par Hp, b est un **ent**; donc la Ts est vraie.

P 52. Si a et b sont des **ent**, alors

$$(\text{sym } a) + (\text{sym } b) = \text{sym } (a + b).$$

Dem. De la P 51 (en y remplaçant a par **sym** a [Hp et P 2]) on obtient

$$(\text{sym } a) + (\text{sym } b) = \text{sym } \{[\text{sym } (\text{sym } a)] + b\}; \quad (1)$$

mais [Hp et P 3⁽¹⁾]

$$[\text{sym } (\text{sym } a)] + b = a + b$$

$$\text{d'où [7]} \quad \text{sym } \{[\text{sym } (\text{sym } a)] + b\} = \text{sym } (a + b) \quad (2)$$

Des formules (1) et (2) on déduit la *Ts*.

P 53. Si a est un **ent**, alors $a + (\text{sym } a) = 0$.

Dem. De l'Hp et des P 2 et 40 on déduit

$$a + (\text{sym } a) \text{ est un ent}; \quad (1)$$

de l'Hp et de la P 51 on déduit

$$a + (\text{sym } a) = \text{sym } [(\text{sym } a) + a],$$

d'où [(1) et P 9]

$$\text{sym } [a + (\text{sym } a)] = a + (\text{sym } a), \quad (2)$$

d'où [(1) et P 29] on déduit la *Ts*.

Des P 2, 50, 53 on déduit immédiatement la

P 54. Si a est un **ent**, alors $(\text{sym } a) + a = 0$, moyennant laquelle on démontre la

P 55. Si a et b sont des **ent** et si $a + b = 0$, alors

$$b = \text{sym } a.$$

Dem. Puisque [Hp et P 50]

$$b + a = 0,$$

1. Voir la note à la P 47.

[Hp et P 54] $b + a = (\text{sym } a) + a;$

d'où [Hp, P 2 et 43] la Ts.

37. Comme application des P 45 et 50, remarquons les

P 56. Si a, b et c sont des **ent**, alors

$$(a + b) + c = (a + c) + b.$$

Dem. De l'Hp et de la P 50 on déduit

$$b + c = c + b$$

d'où [7] $a + (b + c) = a + (c + b)$

d'où [Hp et P 45] la Ts.

P 57. Si a, b, c et d sont des **ent**, alors

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d).$$

Dem. De l'Hp et de la P 56 on déduit¹

$$[(a + b) + c] + d = [(a + c) + b] + d; \quad (1)$$

mais [Hp et P 40]

$$a + b \text{ et } a + c \text{ sont des ent}; \quad (2)$$

de l'Hp, de (1), (2) et de la P 45 on déduit la Ts.

III. — Produits d'entiers.

38. Moyennant les

P 58. Si a est un **ent**, alors $a. 0 = 0$,

P 59. Si a et b sont des **ent**,

$$a. (\text{suc } b) = a. b + a,$$

P 60. Si a et b sont des **ent**,

$$a. (\text{prec } b) = a. b + (\text{sym } a),$$

nous définissons par enchaînement algébrique la notation

1. Voir la note à la P 47.

x, y , où x et y sont des **ent** et où le *nouveau symbole* «. » se lira par¹.

39. P 61. Si a et b sont des **ent**, alors $a. b$ est un **ent**¹.

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que

$$a.x \text{ est un ent.} \quad (1)$$

$$\text{D'abord [Hp, P 58 et 27]} \quad 0 \text{ est un } u. \quad (2)$$

$$\text{Toutes les fois que } x \text{ est un } u, \quad (3)$$

$$[(1), \text{Hp et P 2}] \quad a.x, a, \text{sym } a \text{ sont des ent}$$

et par suite [P 40]

$$a.x + a \text{ et } a.x + (\text{sym } a) \text{ sont des ent}$$

c'est-à-dire [Hp et P 59, 60]

$$a. (\text{suc } x) \text{ et } a. (\text{prec } x) \text{ sont des ent}$$

$$\text{c'est-à-dire [(1) et P 1, 16]} \quad \text{suc } x \text{ et prec } x \text{ sont des } u. \quad (4)$$

De (2), (3-4) et de la P 34 on déduit

$$\text{chaque ent est un } u$$

c'est-à-dire [(1)]

$$\text{si } x \text{ est un ent, alors } a.x \text{ est un ent;}$$

mais, par Hp, b est un **ent**; donc la Ts est vraie.

40. P 62. Si a, b et c sont des **ent**, alors

$$(a + b).c = a.c + b.c.$$

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que

$$(a + b).x = a.x + b.x. \quad (1)$$

1. Voir, dans le COMMENTAIRE, le § 62; on peut ajouter au sujet de la *multipli-*
cation des remarques analogues à celles qu'on y trouve énoncées au sujet de
l'*addition*.

2. Remarque analogue à celle contenue dans la *note* à la P 40.

D'abord [Hp, P 40 et 58]

$$(a + b). 0 = 0; \quad (2)$$

mais [Hp et P 58, 27, 37]

$$a. 0 + b. 0 = 0 + 0 = 0; \quad (3)$$

$$\text{donc [(1), (2), (3) et P 27]} \quad 0 \text{ est un } u. \quad (4)$$

$$\text{Toutes les fois que } x \text{ est un } u, \quad (5)$$

[Hp, P 40 et 59]

$$(a + b). (\text{succ } x) = (a + b). x + (a + b), \quad (6)$$

$$[(1)^1] \quad (a + b). x + (a + b) = (a.x + b.x) + (a + b), \quad (7)$$

[Hp et P 61, 57]

$$(a.x + b.x) + (a + b) = (a.x + a) + (b.x + b), \quad (8)$$

[Hp et P 59]

$$(a.x + a) + (b.x + b) = a. (\text{succ } x) + b. (\text{succ } x), \quad (9)$$

$$\text{d'où [(6)-(9), (1) et P 1]} \quad \text{succ } x \text{ est un } u; \quad (10)$$

d'ailleurs [Hp, P 40 et 60]

$$(a + b). (\text{prec } x) = (a + b). x + [\text{sym } (a + b)], \quad (11)$$

[(1), Hp et P 52]

$$\begin{aligned} (a + b). x + [\text{sym } (a + b)] &= \\ &= (a.x + b.x) + [(\text{sym } a) + (\text{sym } b)], \end{aligned} \quad (12)$$

[Hp et P 61, 2, 57]

$$\begin{aligned} (a.x + b.x) + [(\text{sym } a) + (\text{sym } b)] &= \\ &= [a.x + (\text{sym } a)] + [b.x + (\text{sym } b)], \end{aligned} \quad (13)$$

[Hp et P 60]

$$\begin{aligned} [a.x + (\text{sym } a)] + [b.x + (\text{sym } b)] &= \\ &= a. (\text{prec } x) + b. (\text{prec } x), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{d'où [(11)-(14), (1) et P 16]} \quad \text{prec } x \text{ est un } u. \quad (15)$$

1. Voir la note à la P 47.

Des formules (4), (5-10), (5-15) et de la P 34 on déduit
chaque **ent** est un u ,

c'est-à-dire [(1)]

si x est un **ent**, alors $(a + b).x = a.x + b.x$;

mais, par *Hp*, c est un **ent**; donc la *Ts* est vraie.

41. P 63. Si a est un **ent**, alors $0.a = 0$.

Dem. Si x est un **ent** quelconque, (1)

[*Hp* et P 27, 62]

$$0.a + x.a = (0 + x).a, \quad (2)$$

$$[(1) \text{ et P 49}^1] \quad (0 + x).a = x.a, \quad (3)$$

$$[(1), \text{Hp}, \text{P 61 et 49}] \quad x.a = 0 + x.a, \quad (4)$$

$$\text{d'où [(2), (3), (4)]} \quad 0.a + x.a = 0 + x.a; \quad (5)$$

mais [*Hp*, (1) et P 27, 61]

$0.a, 0, x.a$ sont des **ent**,

d'où [(5) et P 43] la *Ts*.

P 64. Si a est un **ent**, alors $a.1 = a$.

Dem. D'abord [P 30 et § 7]

$$a.1 = a.(\text{suc } 0); \quad (1)$$

mais [*Hp* et P 27, 59]

$$a.(\text{suc } 0) = a.0 + a, \quad (2)$$

et [*Hp* et P 58, 49]

$$a.0 + a = 0 + a = a; \quad (3)$$

d'où [(1), (2), (3)] la *Ts*.

P 65. Si a est un **ent**, alors $1.a = a$.

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que

$$1.x = x. \quad (4)$$

1. Voir la note à la P 47.

D'abord [P 27, 31, 58 et (1)] 0 est un u . (2)

Toutes les fois que x est un u , (3)

[P 31, 59] $1. (\text{suc } x) = 1.x + 1$; (4)

mais [(1) et P 41]

$1.x + 1 = x + 1 = \text{suc } x$; (5)

donc [(4), (5), (1) et P 1] $\text{suc } x$ est un u ; (6)

d'autre part [P 31 et 60]

$1. (\text{prec } x) = 1.x + (\text{sym } 1)$; (7)

mais [(1) et P 42]

$1.x + (\text{sym } 1) = x + (\text{sym } 1) = \text{prec } x$; (8)

donc [(7), (8), (1) et P 16] $\text{prec } x$ est un u . (9)

Des formules (2), (3-6) et (3-9) on déduit

chaque **ent** est un u

c'est-à-dire [(1)] si x est un **ent**, alors $1.x = x$;

mais, par *Hp*, a est un **ent**; donc la *Ts* est vraie.

42. P 66. Si a et b sont des **ent**, alors

$(\text{sym } a).b = \text{sym } (a.b)$.

Dem. De l'*Hp* et des P 2, 62 on déduit

$a.b + (\text{sym } a).b = [a + (\text{sym } a)].b$; (1)

mais [*Hp* et P 53, 63]

$[a + (\text{sym } a)].b = 0.b = 0$;

d'où [(1)] $a.b + (\text{sym } a).b = 0$; (2)

mais [*Hp* et P 2, 61]

$a.b$ et $(\text{sym } a).b$ sont des **ent**;

d'où [(2) et P 55] la *Ts*.

P 67. Si a est un **ent.** alors

$$a.(\text{sym } 1) = \text{sym } a.$$

Dem. D'abord [P 32]

$$a.(\text{sym } 1) = a.(\text{prec } 0); \quad (1)$$

mais [Hp, P 27 et 60]

$$a.(\text{prec } 0) = a.0 + (\text{sym } a), \quad (2)$$

$$[\text{Hp et P 58}] \quad a.0 + (\text{sym } a) = 0 + (\text{sym } a), \quad (3)$$

$$[\text{Hp et P 2, 49}] \quad 0 + (\text{sym } a) = \text{sym } a; \quad (4)$$

des formules (1)-(4) on déduit la T_s .

P 68. Si a est un **ent.** alors

$$(\text{sym } 1).a = \text{sym } a.$$

Dem. De la P 31, de l'Hp et de la P 66 on déduit

$$(\text{sym } 1).a = \text{sym } (1.a); \quad (1)$$

$$\text{mais} [\text{Hp, P 65 et § 7}] \quad \text{sym } (1.a) = \text{sym } a; \quad (2)$$

d'où [(1), (2)] la T_s .

43. P 69. Si a et b sont des **ent.** alors $a.b = b.a$.

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que

$$a.x = x.a. \quad (1)$$

$$\text{D'abord} [\text{Hp et P 27, 58, 63}] \quad 0 \text{ est un } u. \quad (2)$$

$$\text{Toutes les fois que } x \text{ est un } u, \quad (3)$$

$$[\text{Hp, P 59}] \quad a.(\text{suc } x) = a.x + a$$

$$\text{d'où} [(3), (1) \text{ et Hp, P 65}] \quad \succ \quad = x.a + 1.a$$

$$\text{d'où} [\text{Hp, P 31 et P 62}] \quad \succ \quad = (x + 1).a$$

$$\text{d'où} [\text{P 41}] \quad \succ \quad = (\text{suc } x).a$$

$$\text{c'est-à-dire} [(1) \text{ et P 1}] \quad \text{suc } x \text{ est un } u; \quad (4)$$

d'autre part [Hp, P 60]

$$a.(\text{prec } x) = a.x + (\text{sym } a)$$

d'où [(3), (1) et *Hp*, P 68]

$$a. (\text{prec } x) = x.a + (\text{sym } 1).a$$

d'où [*Hp*, P 33 et 62] » $= [x + (\text{sym } 1)].a$

d'où [P 42] » $= (\text{prec } x).a$

c'est-à-dire [(1) et P 16] **prec** x est un u ; (5)

Des formules (2), (3-4), (3-5) et de la P 34 on déduit

chaque **ent** est un u

c'est-à-dire [(1)] si x est un **ent**, alors $a.x = x.a$;

mais, par *Hp*, b est un **ent**; donc la *Ts* est vraie.

44. P 70. Si a et b sont des **ent**, alors

$$a. (\text{sym } b) = \text{sym } (a.b).$$

Dem. D'abord [*Hp*, P 2 et 69]

$$a. (\text{sym } b) = (\text{sym } b).a;$$

d'où [*Hp* et P 66] » $= \text{sym } (b.a)$

et [*Hp*, P 69 et § 7] » $= \text{sym } (a.b).$

P 71. Si a et b sont des **ent**, alors

$$(\text{sym } a).(\text{sym } b) = a.b.$$

Dem. De l'*Hp* et de la P 66 (en y remplaçant b par **sym** b [P 2]) on obtient

$$(\text{sym } a).(\text{sym } c) = \text{sym } [a.(\text{sym } b)]$$

d'où [*Hp*, P 70 et § 7] » $= \text{sym } [\text{sym } (a.b)]$

d'où [*Hp*, P 61, 3] » $= a.b.$

45. P 72. Si a , b et c sont des **ent**, alors

$$c.(a + b) = c.a + c.b.$$

Dem. De l'*Hp* et des P 40, 69 on déduit

$$c.(a + b) = (a + b).c$$

d'où [Hp et P 62]

$$\gg = a.c + b.c$$

d'où [Hp et P 69]

$$\gg = c.a + c.b.$$

P 73. Si a, b, c et d sont des **ent**, alors

$$(a + b).(c + d) = (a.c + a.d) + (b.c + b.d).$$

Dem. De l'Hp et des P 40, 62 on déduit

$$(a + b).(c + d) = a.(c + d) + b.(c + d)$$

d'où [Hp et P 72]

$$\gg = (a.c + a.d) + (b.c + b.d).$$

46. P 74. Si a, b et c sont des **ent**, alors

$$(a.b) c = a (b.c) \text{ (1)}.$$

Dem. Soit u la classe des **ent** x tels que

$$(a.b) x = a (b.x). \quad (1)$$

D'abord [Hp, P 61 et 58]

$$(a.b). 0 = 0 \quad (2)$$

et [Hp, P 58 et P 58]

$$a (b.0) = a. 0 = 0 \quad (3)$$

d'où [(1), (2), (3) et P 27]

$$0 \text{ est un } u. \quad (4)$$

Toutes les fois que x est un u ,

(5)

[Hp, P 61, 59]

$$(a.b).(\text{suc } x) = (a.b). x + a.b$$

d'où [(1)]

$$\gg = a.(b.x) + a.b$$

d'où [Hp, P 61 et 72]

$$\gg = a.(b.x + b)$$

d'où [Hp et P 59]

$$\gg = a.[b.(\text{suc } x)]$$

d'où [(1) et P 1]

$$\text{suc } x \text{ est un } u; \quad (6)$$

d'autre part [Hp, P 61 et 70]

$$(a.b).(\text{sym } x) = \text{sym} [(a.b). x]$$

d'où [(1) et § 7]

$$\gg = \text{sym} [a.(b.x)]$$

d'où [Hp, P 61, 70]

$$\gg = a. [\text{sym} (b.x)]$$

d'où [» et § 7]

$$\gg = a. [b.(\text{sym } x)]$$

d'où [(1) et P 2]

$$\text{sym } x \text{ est un } u. \quad (7)$$

1. Voir la note à la P 61.

Des formules (2), (5-6), (5-7) et de la P 35 on déduit
chaque **ent** est un u ,
c'est-à-dire [(1)]

si x est un **ent**, alors $(a.b).x = a.(b.x)$;

mais, par *Hp*, c est un **ent**; donc la *Ts* est vraie.

IV. — Différences d'entiers.

47. P 75. Si a et b sont des **ent**, alors

$$a - b = a + (\text{sym } b).$$

C'est la *Df symbolique* de la notation $a - b$, où a et b sont des **ent** et où le *nouveau symbole* « $-$ » peut être lu *moins*, comme d'ordinaire¹.

48. P 76. Si a et b sont des **ent**, alors $a - b$ est un **ent**.

Dem. De l'*Hp* et des P 2, 40, 75 on déduit la *Ts*.

P 77. Si a et b sont des **ent**, alors $(a + b) - b = a$.

Dem. De l'*Hp* et des P 2, 45, 53, 37 on déduit successivement

$$(a + b) + (\text{sym } b) = a + [b + (\text{sym } b)] = a + 0 = a; \quad (1)$$

mais [*Hp*, P 40, 75]

$$(a + b) - b = (a + b) + (\text{sym } b)$$

d'où [(1)] la *Ts*.

P 78. Si a et b sont des **ent**, alors $(a - b) + b = a$.

Dem. De l'*Hp* et des P 2, 45, 54 [et § 7], 37 on déduit successivement

$$[a + (\text{sym } b)] + b = a + [(\text{sym } b) + b] = a + 0 = a; \quad (1)$$

1. Voir, dans le COMMENTAIRE, le § 64.

mais [*Hp*, P 75¹]

$$(a - b) + b = [a + (\text{sym } b)] + b$$

d'où [(1)] la *Ts*.

P 79. Si *a* et *b* sont des **ent**, alors $a - b = \text{sym } (b - a)$.

Dem. De l'*Hp* et des P 75, 51 on déduit

$$a - b = \text{sym } [(\text{sym } a) + b]; \quad (1)$$

mais de l'*Hp* et des P 75, 2, 50 on déduit aussi

$$b - a = b + (\text{sym } a) = (\text{sym } a) + b$$

$$\text{d'où [7]} \quad \text{sym } (b - a) = \text{sym } [(\text{sym } a) + b]; \quad (2)$$

des formules (1), (2) on déduit la *Ts*.

P 80. Si *a* et *b* sont des **ent**, alors $a - (a - b) = b$.

Dem. De l'*Hp* et des P 76, 75 on déduit

$$a - (a - b) = a + [\text{sym } (a - b)]; \quad (1)$$

mais, puisque [*Hp*, P 2, 40]

$$« (\text{sym } a) + b » \text{ est un ent,}$$

de la formule (1) de la P 79 et de la P 9 on déduit

$$\text{sym } (a - b) = (\text{sym } a) + b$$

d'où [7 et P 2, 45, 53, 49]

$$\begin{aligned} a + [\text{sym } (a - b)] &= a + [(\text{sym } a) + b] = [a + (\text{sym } a)] + b = \\ &= 0 + b = b; \end{aligned} \quad (2)$$

des formules (1), (2) on déduit la *Ts*.

49. P 81. Si *a*, *b* et *c* sont des **ent**, et si $a + b = c$, alors

$$c - b = a.$$

1. Voir la note à la P 47.

Dem. De l'*Hp* on déduit¹

$$(a + b) - b = c - b$$

d'où [*Hp* et P 77] la *Ts*.

P 82. Si *a*, *b* et *c* sont des **ent** et si $a - b = c$, alors

$$c + b = a.$$

Dem. De l'*Hp* on déduit¹

$$(a - b) + b = c + b$$

d'où [*Hp* et P 78] la *Ts*.

50. P 83. Si *a* est un **ent**, $a - a = 0$.

Dem. De l'*Hp* et des P 75, 53 on déduit

$$a - a = a + (\text{sym } a) = 0.$$

P 84. Si *a* est un **ent**, alors $a - 0 = a$.

Dem. De l'*Hp* et des P 75, 27, 28, 37 on déduit

$$a - 0 = a + (\text{sym } 0) = a + 0 = a.$$

P 85. Si *a* est un **ent**, alors $0 - a = \text{sym } a$.

Dem. De l'*Hp* et des P 27, 79 on déduit

$$0 - a = \text{sym } (a - 0),$$

d'où [P 84, § 7] la *Ts*.

P 86. Si *a* est un **ent**, alors $a - 1 = \text{prec } a$.

Dem. De l'*Hp* et des P 31, 75, 42 on déduit

$$a - 1 = a - (\text{sym } 1) = \text{prec } a.$$

P 87. Si *a* et *b* sont des **ent**, alors $a - (\text{sym } b) = a - b$.

Dem. De l'*Hp* et des P 2, 75, 3 et § 7 on déduit successivement

$$a - \text{sym } b = a - (\text{sym } (\text{sym } b)) = a - b.$$

1. Voir la note 1 à p. 47.

51. P 88. Si a, b et c sont des **ent**, alors

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

Dem. De l'*Hp* et des P 40, 75, 52 [et § 7], 2, 45, 75, 76, 75 on déduit successivement

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + [\text{sym}(b + c)] = a + [(\text{sym } b) + (\text{sym } c)] = \\ &= [a + (\text{sym } b)] + (\text{sym } c) = (a - b) + (\text{sym } c) = (a - b) - c. \end{aligned}$$

P 89. Si a, b et c sont des **ent**, alors

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Dem. De l'*Hp* et des P 75 [et § 7], 2, 45, 40, 75 on déduit successivement

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= a + [b + (\text{sym } c)] = (a + b) + (\text{sym } c) = \\ &= (a + b) - c. \end{aligned}$$

P 90. Si a, b et c sont des **ent**, alors

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Dem. De l'*Hp*, en remplaçant, dans la P 88, c par **sym** c [P 2], moyennant les P 75 [et § 7], 76, 87, on déduit la *Ts*.

52. P 91. Si a, b, c sont des **ent**, alors

$$(a + c) - (b + c) = a - b$$

Dem. De l'*Hp* et des P 50, 40, 88, 77 on déduit successivement

$$(a + c) - (b + c) = (a + c) - (c + b) = [(a + c) - c] - b = a - b.$$

P 92. Si a, b, c sont des **ent**, alors

$$(a - c) - (b - c) = a - b.$$

Dem. De l'*Hp* et des P 75, 2, 91 on déduit

$$(a - c) - (b - c) = [a + (\text{sym } c)] - [b + (\text{sym } c)] = a - b.$$

53. P 93. Si a, b, c sont des **ent**, alors

$$(a - b).c = a.c - b.c.$$

Dem. De l'*Hp* et des P 75, 2, 62, 66, 61, 75 on déduit successivement

$$\begin{aligned} (a - b).c &= [a + (\text{sym } b)].c = a.c + (\text{sym } b).c = \\ &= a.c + [\text{sym } (b.c)] = a.c - b.c \end{aligned}$$

P 94. Si a, b, c sont des **ent**, alors

$$c.(a - b) = c.a - c.b.$$

Dem. De l'*Hp* et de la P 93, moyennant les P 76, 69, on déduit la *Ts*.

54. P 95. Si a, b, c, d sont des **ent**, alors

$$(a + b).(c - d) = (a.c + b.c) - (a.d + b.d).$$

Dem. De l'*Hp* et des P 40, 94 on déduit

$$(a + b).(c - d) = (a + b).c - (a + b).d$$

d'où [*Hp* et P 62] la *Ts*.

P 96. Si a, b, c, d sont des **ent**, alors

$$(a - b).(c + d) = (a.c + a.d) - (b.c + b.d).$$

Dem. De l'*Hp* et des P 40, 93 on déduit

$$(a - b).(c + d) = a.(c + d) - b.(c + d)$$

d'où [*Hp* et P 72] la *Ts*.

P 97. Si a, b, c, d sont des **ent**, alors

$$(a - b).(c - d) = (a.c + b.d) - (b.c + a.d).$$

Dem. De l'*Hp* et des P 76, 93, 94 on déduit

$$(a-b).(c-d) = a.(c-d) - b.(c-d) = (a.c - a.d) - (b.c - b.d)$$

d'où [*Hp*, P 61, 91]

$$\begin{aligned} (a-b).(c-d) &= \\ &= [(a.c + b.d) - (a.d + b.d)] - [(b.c + a.d) - (b.d + a.d)] \end{aligned}$$

d'où [*Hp*, P 61, 40, 50, 92] la *Ts*.

Commentaire.

55. Une *interprétation générale* [14] de nos *symboles non-définis* [19], qui vérifie nos *P non-démontrées* [20] (et, par suite, *toutes nos P* [20-54]), est la suivante :

ent signifie la classe des symboles qu'on obtient de m_x en y remplaçant x par chaque *nombre*¹, l'interprétation de chacun de ces symboles étant complètement arbitraire, pourvu que, si a, b sont des *nombres* et si $a \neq b$, alors $m_a \neq m_b$; et toutes les fois que x est un **ent**,

suc m_x signifie m_{x+1} ,

sym $m_x. . . . m_{-x}$ ⁽²⁾.

56. *L'interprétation que nous proposons* [13] est un

1. Dans nos explications, *nombre* signifie *nombre entier algébrique* (c'est-à-dire : positif, ou négatif, ou nul).

2. La constatation de la vérité des P 1, 2 [20] est immédiate; pour la P 3, il suffit de se rappeler que, si x est un *nombre*, $-(-x) = x$; pour la P 4, il faut observer que, si x est un *nombre*, $-[-(x+1)+1] = (x+1)-1 = x$; pour les P 5, 6, il faut remarquer que 0 est le seul *nombre* x tel que $-x = x$; pour la P 7, il faut observer que si une classe u [1] satisfait aux conditions énoncées dans l'*Hp*, puisqu'elle renferme un *nombre*, elle renferme aussi tous les *nombres* qui le précèdent et le suivent dans la suite ... - 2, - 1, 0, 1, 2 ..., savoir tous les *nombres*.

cas particulier de celle que nous venons d'énoncer [55]; on l'obtient en y remplaçant m_x par x . Alors [55] :

ent signifie *nombre*¹;

et, toutes les fois que x est un **ent**,

suc x signifie $x + 1$,

sym x — x (²).

57. Soient a, b, c, d, e, f des symboles à significations arbitraires, mais toutes différentes. Alors,

si **ent** signifie « égal à a ou égal à b ou égal à c »³;

si **suc** $a, \text{ suc } b, \text{ suc } c, \text{ suc } d, \text{ suc } e, \text{ suc } f$

signifient respectivement

$b, \quad c, \quad a, \quad e, \quad f, \quad d,$

et si **sym** $a, \text{ sym } b, \text{ sym } c, \text{ sym } d, \text{ sym } e, \text{ sym } f$

signifient respectivement

$a, \quad c, \quad b, \quad d, \quad f, \quad e,$

on obtient une *interprétation* [14] de nos *symboles non-définis* [19], qui vérifie nos *P non-démontrées* [20]⁴, et

1. Voir la note 1 du § 55.

2. Voir la note 2 du § 53.

3. Voir la note du § 4.

4. La constatation de la vérité des P 1, 2, 3 [20] est immédiate; pour la P 4, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \text{sym} \{ \text{suc} [\text{sym} (\text{suc } a)] \} &= \text{sym} [\text{suc} (\text{sym } b)] = \text{sym} (\text{suc } c) = \text{sym } a = a \\ &\dots\dots\dots b \dots\dots\dots c \dots\dots\dots b \dots\dots\dots c \dots\dots b \\ &\dots\dots\dots c \dots\dots\dots a \dots\dots\dots a \dots\dots\dots a \dots\dots\dots b \dots\dots c; \end{aligned}$$

pour les P 5, 6, il suffit d'observer que a est le *seul ent* x , tel que

$$\text{sym } x = x;$$

et pour la P 7 il suffit de constater qu'elle serait vérifiée même si l'on supprimait la troisième condition énoncée dans l'*Hp*.

qui *continue* à les vérifier si l'on change, de la manière suivante, la seule interprétation du symbole **ent** :

ent signifie « égal à d ou égal à e ou égal à f »¹ ;

ou la seule interprétation du symbole **suc** :

suc a , **suc** b , **suc** c

signifient respectivement

c , a , b ⁽²⁾ ;

ou la seule interprétation du symbole **sym** :

sym a , **sym** b , **sym** c

signifient respectivement

b , a , c ⁽³⁾.

Ainsi nous avons démontré [16] que notre système de symboles non-définis est irréductible par rapport à notre système de P non-démontrées.

1. Pour constater la vérité des P 1-7 [20] il suffit de relire la note précédente en y remplaçant respectivement a, b, c par d, e, f .

2. Il suffit de constater la vérité des P où se trouve le symbole **suc** ; c'est-à-dire des P 1, 4, 7 [20].

Pour la P 1, la constatation est immédiate ; pour la P 4, il suffit d'observer que

sym { **suc** [**sym** (**suc** a)] } = **sym** [**suc** (**sym** c)] = **sym** (**suc** b) = **sym** a = a
 b a a c b
 c b c b c

et, pour la P 7, voir la note précédente.

3. Il suffit de constater la vérité des P où se trouve le symbole **sym**, c'est-à-dire des P 2, 3, 4, 5, 6 [20].

Pour les P 2, 3, la constatation est immédiate ; pour la P 4, il suffit d'observer que

sym { **suc** [**sym** (**suc** a)] } = **sym** [**suc** (**sym** b)] = **sym** (**suc** a) = **sym** b = a ,
 b c c a b ,
 c a b c c ;

et, pour les P 5, 6, il suffit de remarquer que c est le seul **ent** x , tel que

sym x = x .

58. Pour démontrer que notre système de P non-démontrées [20] est irréductible [17], il suffit de constater que l'interprétation de nos symboles non-définis [19] :

1°) Si a, b sont des symboles à significations arbitraires différentes,

ent signifie « égal à a » [3],

suc a et **suc** b signifient respectivement b et a ,

sym a et **sym** b a et b ,

vérifie les P 2-7, mais non la P 1¹.

2°) **ent** signifie « nombre entier positif (0 compris) »
et, toutes les fois que x est un nombre²,

suc x signifie $x + 1$

sym x x

vérifie les P 1 et 3-7, mais non la P 2³.

3°) Si a, b, c, d sont des symboles à significations arbitraires, mais toutes différentes,

ent signifie « égal à a ou égal à b ou égal à c ou égal à d »

suc a , **suc** b , **suc** c , **suc** d

signifient respectivement

$b, \quad c, \quad d, \quad a,$

1. La P 1 n'est pas vérifiée, parce que

a est un **ent**, mais **suc** a n'est pas un **ent**.

La constatation de la vérité des P 2, 3, 4, 5 est immédiate; la P 6 est vérifiée parce que son Hp est absurde; et la P 7 serait vérifiée même en conservant seulement la première condition énoncée dans l' Hp .

2. Voir la note 1 du § 55.

3. La P 2 n'est pas vérifiée, car, par exemple,

1 est un **ent**, mais **sym** 1 n'est pas un **ent**.

Les autres P non-démontrées sont toutes vérifiées [comparer cette interprétation à celle du § 56].

sym a, sym b, sym c, sym d

signifient respectivement

a, d, b, c,

vérifie les P 1, 2 et 4-7, mais non la P 3¹.

4°) Si *a, b, c, d, e* sont des symboles à significations arbitraires, mais toutes différentes,

ent signifie « égal à *a* ou égal à *b* ou égal à *c* ou égal à *d* ou égal à *e* »,

suc a, suc b, suc c, suc d, suc e

signifient respectivement

b, c, d, e, a,

sym a, sym b, sym c, sym d, sym e

signifient respectivement

a, d, e, b, c,

vérifie les P 1-3 et 5-7, mais non la P 4².

5°) Si *a, b* sont des symboles à significations arbitraires différentes,

1. La P 3 n'est pas vérifiée, car, par exemple,

$$\mathbf{sym}(\mathbf{sym} b) = \mathbf{sym} d = c.$$

La constatation de la vérité des P 1, 2 est immédiate; pour la P 4, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} \mathbf{sym} \{ \mathbf{suc} [\mathbf{sym} (\mathbf{suc} a)] \} &= \mathbf{sym} [\mathbf{suc} (\mathbf{sym} b)] = \mathbf{sym} (\mathbf{suc} d) = \mathbf{sym} a = a, \\ &\dots\dots\dots b \dots\dots\dots c \dots\dots\dots b \dots\dots\dots c \dots\dots b, \\ &\dots\dots\dots c \dots\dots\dots d \dots\dots\dots c \dots\dots\dots d \dots\dots c, \\ &\dots\dots\dots d \dots\dots\dots a \dots\dots\dots a \dots\dots\dots b \dots\dots d; \end{aligned}$$

et pour les P 5, 6, 7 voir la *note* du § 57.

2. La P 4 n'est pas vérifiée, car, par exemple.

$$\mathbf{sym} \{ \mathbf{suc} [\mathbf{sym} (\mathbf{suc} a)] \} = \mathbf{sym} [\mathbf{suc} (\mathbf{sym} b)] = \mathbf{sym} (\mathbf{suc} d) = \mathbf{sym} e = c$$

La constatation de la vérité des P 1, 2, 3 est immédiate; et, pour les P 5, 6, 7, voir la *note* du § 57.

ent signifie « égal à a ou égal à b »,

suc a et **suc** b signifient respectivement b et a ,

sym a et **sym** b $b \dots a$,

vérifie les P 1-4 et 6, 7, mais *non* la P 5¹.

6°) Identique à la précédente, sauf que

sym a et **sym** b signifient respectivement a et b ,

vérifie les P 1-5 et 7, mais *non* la P 6².

7°) Si a , b , c sont des symboles à significations arbitraires différentes,

ent signifie « égal à a ou égal à b ou égal à c »,

suc a , **suc** b , **suc** c signifient respectivement a , c , b ,

sym a , **sym** b , **sym** c a, c, b ,

vérifie les P 1-6, mais *non* la P 7³.

59. Nous n'affirmons pas que *nos P non-démontrées* [20] soient *suffisantes* pour en déduire une *quelconque* des P de l'Algèbre ordinaire; nous pouvons même affirmer *le contraire*.

En effet, par exemple, quelle que soit la signification de a , l'interprétation :

1. Évidemment, la P 5 n'est pas vérifiée.

La constatation de la vérité des P 1-4 est immédiate; la P 6 est *vérifiée*, parce que son H_p est *absurde*; et, pour la P 7, voir la *note* du § 57.

2. Évidemment, la P 6 n'est pas vérifiée.

La constatation de la vérité des P 1-5 est immédiate; et pour la P 7, voir la *note* du § 57.

3. La P 7 n'est pas vérifiée, car, par exemple, si

$$u = \text{égal à } a \text{ [3].}$$

u vérifie l' H_p , mais non la T_s de la P 7.

La constatation de la vérité des P 1-6 est immédiate.

ent signifie « égal à » [3]

suc a signifie a ,

sym a signifie a ,

*vérifie toutes nos P non-démontrées*¹.

Par conséquent, de ces P on ne pourrait déduire, par exemple, la P: « si a est un **ent**, alors il y a un **ent** x , au moins, tel que $x \neq a$ ».

Mais nos P non-démontrées sont suffisantes pour en déduire toutes les P de notre théorie (qui ne sont pas énoncées comme des Df).

60. Après avoir défini les chiffres 0 [§ 26, P 26] et 1 [§ 27, P 30], on pourrait définir les autres chiffres de la manière suivante :

$$2 = \text{suc } 1, 3 = \text{suc } 2, \text{ etc.}$$

Mais on ne rencontre pas ces chiffres dans nos P.

61. Dans le *Formulaire de Mathématiques* [t. II, n° 3] on considère d'abord les nombres entiers positifs (0 compris), représentés par **n**. On y trouve énoncée [§ 20, P 2.5, p. 29] la P

Si 0 est un u et si, toutes les fois qu'un **n** x est un u ,
suc x est aussi un u , alors chaque **n** est un u ,

qui est appelée, comme d'ordinaire, *loi d'induction*; tandis qu'il serait peut-être préférable de l'appeler *loi d'enchaînement arithmétique*.

1. La constatation de la vérité des P 1-5 est immédiate; la P 6 est vérifiée parce que son Hp est absurde; et, pour la P 7, il suffit d'observer qu'elle serait vérifiée même en conservant seulement la première condition énoncée dans l'Hp.

Nos P 34, 35, 36 [28] expriment trois formes de la *loi d'enchaînement algébrique*.

62. Dans le *Formulaire de Mathématiques* [t. II, n° 3] on trouve énoncées deux P [§ 20, P 4.1.2, page 31] qui ne diffèrent de nos P 37, 38 [29] que par l'échange des symboles **ent** et **n** [61]; ces deux P sont énoncées comme la *Df par induction* de la *somme* de deux **n**, que je préférerais appeler *Df par enchaînement arithmétique*.

Nos P 37, 38, 39 [29] forment la *Df par enchaînement algébrique* de la *somme* de deux **ent**.

En général, si une notation quelconque à définir, par exemple m , renferme une lettre, par exemple x , qui par *Hp* représente un **ent**, on *définit* la notation m par *enchaînement algébrique* lorsque :

1° On exprime en termes connus la signification de m lorsque $x=0$;

2° On exprime la signification de m lorsque $x=\text{succ } y$, au moyen de la signification de m lorsque $x=y$;

3° On exprime la signification de m lorsque $x=\text{prec } y$, au moyen de la signification de m lorsque $x=y$.

Il faut remarquer que l'une ou l'autre des conditions 2°, 3° pourrait être remplacée par :

4° On exprime la signification de m lorsque $x=\text{sym } y$, au moyen de la signification de m lorsque $x=y$.

63. On peut aussi [3] démontrer les P :

Si a est un **ent**, alors $a + 2 = \text{succ}(\text{succ } a)$ ¹,

1. En effet des §§ 7, 61 et des P 34, 38, 44 on déduit

$$a + 2 = a + (\text{succ } 1) = \text{succ}(a + 1) = \text{succ}(\text{succ } a).$$

On démontre les autres P d'une manière analogue.

Si a est un ent, $a + 3 = \text{suc} [\text{suc} (\text{suc } a)]$, etc. ;

et les P

Si a est un ent, $a + (\text{sym } 2) = \text{prec} (\text{prec } a)$, etc. ¹ ;

qui, avec les P 37, 41, 42, prouvent que, selon l'interprétation que nous avons proposée [56], notre Df [29] donne au symbole $+$ sa signification ordinaire.

64. Dans l'idéographie algébrique *ordinaire*, le symbole « — » a deux significations différentes, que nous avons représentées séparément par les symboles **sym** [19] et « — » [47].

Cette séparation des deux significations du signe ordinaire « — » est de la plus grande importance².

Les P 75 et 85 montrent que *nos* deux symboles **sym** et « — » ont vraiment des significations différentes : le premier peut être toujours remplacé par « 0 — » et le second par « + **sym** ». Il s'agit donc, d'abord, de *corriger* une *faute logique* (double signification d'un symbole) de l'idéographie algébrique *ordinaire*; faute qui donne aux élèves une *répugnance* instinctive à accepter ce qu'on appelle en Algèbre les *conventions de signes*³; car ils ne peuvent

1. En effet, des §§ 7, 61 et des P 31, 22 on déduit

$$\text{sym } 2 = \text{sym} (\text{suc } 1) = \text{prec} (\text{sym } 1)$$

$$\text{d'où [7]} \quad a + (\text{sym } 2) = a + [\text{prec} (\text{sym } 1)]; \quad (1)$$

$$\text{mais [Hp, P 33, 39]} \quad a + [\text{prec} (\text{sym } 1)] = \text{prec} [a + (\text{sym } 1)]; \quad (2)$$

$$\text{et [P 42 et § 7]} \quad \text{prec} [a + (\text{sym } 1)] = \text{prec} (\text{prec } a). \quad (3)$$

Des formules (1), (2), (3) on déduit la Ts.

On démontre les autres P d'une manière analogue.

2. Je l'ai adoptée en 1899 dans mes leçons à l'Université de Pavie sur l'*Algebra elementare logicamente esposta*, et en 1900 dans mes leçons à l'Université de Rome sur l'*Algebra e la Geometria, quali teorie deduttive*.

3. Voir, par exemple, les P 52, 66, 70, 71, 79, 85.

pas trouver raisonnable qu'on représente par le même symbole un *transformateur* [§ 7] des **ent** en **ent** [P 3] et une *opération* qui transforme un couple d'**ent** en un **ent** [P 48].

Mais encore, cette correction de l'idéographie algébrique ordinaire nous a procuré de très grands avantages dans le développement de notre théorie, en nous permettant d'énoncer des chapitres d'*Algèbre* sans présupposer aucune P d'*Arithmétique*, contrairement à ce qu'on fait d'ordinaire.

Rome, 1^{er} juillet 1900.



SUR LA GÉOMÉTRIE ENVISAGÉE COMME UN SYSTÈME PUREMENT LOGIQUE

Par MARIO PIERI,
Professeur à l'Université de Catane.

Le mouvement intellectuel touchant les principes directeurs de la Mathématique en général et spécialement de la Géométrie, quant à l'analyse logique des prémisses (définitions, axiomes, etc.) et quant à la critique des méthodes qui en forment les doctrines fondamentales, a atteint aujourd'hui un développement si remarquable, que l'étudiant, aussi bien que le savant, n'est pas toujours en état d'en suivre les phases principales, ni d'en recueillir et d'en coordonner les détails. Au contraire, ils sont en comparaison assez rares, les travaux de reconstruction où l'on fait usage de quelque idée nouvelle pour réformer ou modifier une partie de l'édifice de la science en conformité avec les exigences spéculatives croissantes.

Il ne paraîtra donc pas hors de propos que je me permette de soumettre au jugement des gens studieux, même non mathématiciens (à l'occasion de ce grand bilan intel-

lectuel du siècle qu'est notre *Congrès international de Philosophie*), les conclusions de quelques études que j'ai composées dans les dernières années¹ en vue d'asseoir la Géométrie de position et la Géométrie élémentaire sur des bases acceptées et je dirai presque exigées par l'évolution générale des sciences².

Le titre de la présente communication révèle assez clairement ma manière de voir touchant le terme où cette évolution se dirige et vers lequel paraît tendre la Géométrie dans son développement intensif. Je tiens pour assuré que cette science, dans ses parties les plus élevées comme dans les plus modestes, va en s'affirmant et en se consolidant de plus en plus *comme l'étude d'un certain ordre de relations logiques*; en s'affranchissant peu à peu des liens qui l'attachent encore (quoique assez faiblement) à l'intuition, et en revêtant par suite la forme et les qualités d'une *science idéale purement déductive et abstraite*, comme l'Arithmétique. Je ne me cache pas qu'un tel jugement est pour trouver un grand nombre d'opposants; mais, si je ne me trompe, il se rencontre tellement avec la vérité et trouve

1. Je fais allusion particulièrement aux monographies suivantes (peu accessibles en raison de la langue où elles sont écrites et de la nature des recueils où elles se trouvent) : 1° *I Principi della Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo*; 2° *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo*, publiées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, t. XLVIII₂ et XLIX₂ (1898-99); 3° *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la Geometria proiettiva*, dans les *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, t. XXXI₂ (1898).

2. Parmi les nombreux auteurs que l'on pourrait citer à l'appui de cette opinion, je signalerai particulièrement ici : E. GÖTLER dans l'Introduction de son *Essai sur la Classification des sciences* (Paris, Alcan, 1898) et Ed. LE ROY dans son article : *Science et Philosophie*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, sept. 1899 et dans son mémoire : *La science positive et les philosophies de la liberté*, ap. *Bibliothèque du Congrès international de Philosophie*, t. I.

de si nombreuses confirmations dans les conditions présentes et passées de notre pensée scientifique (comme je chercherai à le prouver), qu'il est permis de le soutenir ouvertement sans ombre de paradoxe.

Quoi qu'on pense à ce sujet, il est bon que la question soit posée et agitée, parce qu'elle est pour ainsi dire dans l'air qu'on respire : et les réflexions présentes pourront servir, à tout le moins, à mieux expliquer et caractériser la tendance dont je vais parler.

§ I

Le mouvement que j'ai en vue porte sur la coordination idéale des faits, et touche à peine indirectement à leur essence. Comme il arrive d'ordinaire pour tout progrès intensif, cette tendance est le fruit d'une révolution intérieure dans les faits déjà acquis, à la suite de laquelle ceux-ci apparaissent sous un aspect nouveau et imprévu, dans de nouvelles combinaisons et de nouvelles relations, d'où naissent des critères et des schèmes de classification, etc... : tandis qu'un progrès extensif, généralement parlant, ne fait qu'apporter de nouvelles vérités qui accroissent le domaine de telle ou telle science et ouvrent de nouvelles branches du savoir sans en altérer la structure et les caractères fondamentaux.

Observons par exemple l'Arithmétique. Elle s'accroît en extension, même dans les temps les plus proches de nous, et s'étend beaucoup dans cette partie qu'on appelle la Théorie

des nombres (LEGENDRE, GAUSS, DIRICHLET,...) : et en intensité, par le fait que, étant à l'origine avant tout un *art de compter* créé de préférence pour les besoins du commerce et des échanges (ce dont il reste encore trace dans quelques-uns de ses termes anciens), elle devient peu à peu la science idéale *de tout le nombrable*, et reçoit de nos jours une organisation déductive qu'on peut dire parfaite. Et le degré d'abstraction qu'elle a atteint est si remarquable, que beaucoup (DEDEKIND, PEANO,...) la considèrent désormais à bon droit comme une partie de la Logique, c'est-à-dire comme une branche de cette science universelle qui embrasse dans ses notions primordiales l'ensemble le plus étendu d'interprétations objectives.

Mais si l'idée générale du *nombre* subit une telle transformation (ainsi que celles d'*unité*, de *succession*, de *classe finie* ou *infinie*, etc..., qui lui font cortège et qui sont la matière première de l'Arithmétique), ce serait grande merveille qu'il n'arrivât rien de semblable à l'idée générale du *point*, qui, avec quelques autres qui lui sont subordonnées, est le substratum de tout concept géométrique. Déjà de beaucoup d'indices il est permis de conclure que cette notion de *point* subit en effet, elle aussi, une évolution toute semblable, *dans le sens d'une abstraction toujours plus grande*.

Il y a longtemps que la Géométrie cartésienne a introduit, avec l'artifice des coordonnées, l'emploi méthodique d'opérations et de transformations analytiques, au lieu des raisonnements et constructions géométriques, ce qui conduit la pensée, par des voies éloignées de l'intuition, à voir les

questions géométriques sous un aspect bien plus général et à un point de vue bien plus élevé que d'habitude; sans parler de tant d'autres effets qui amenèrent la science de l'étendue à recevoir dans son sein, par l'intermédiaire des coordonnées, quelques interprétations insolites, sinon étrangères, des concepts géométriques, et à étendre par suite ses conclusions en dehors du champ qui lui était réservé par la tradition.

Mais une influence peut-être encore plus efficace fut celle qu'exercèrent les multiples spéculations sur les Géométries dites *non-euclidiennes* : spéculations qui, bien qu'anciennes de plus d'un siècle (SACHERI, 1667-1733; LAMBERT, 1766), n'eurent d'action effective sur les esprits que dans les temps plus voisins de nous (GAUSS, LOBATCHEVSKII, BOLYAI, RIEMANN, CAYLEY, BELTRAMI). Elles confirmèrent et certifièrent la coexistence idéale de *plusieurs systèmes géométriques* dont chacun est, en soi, exempt de contradictions et d'absurdités, et par suite tous *vrais*, subjectivement parlant, et tous également *possibles*. Déjà en 1792, GAUSS concevait le principe d'une Géométrie dans laquelle le postulat d'Euclide n'est pas valable; et ce fut en essayant vainement de démontrer ce postulat que l'on franchit pour la première fois les limites de la Géométrie expérimentale. De ce moment on commença à parler d'êtres géométriques abstraits, sans s'inquiéter de leur accord plus ou moins grand avec la réalité de l'espace physique. Aussi, dorénavant, la Géométrie n'est plus seulement une science de *choses réelles* : elle commence à revêtir en outre la qualité d'une

doctrine *du possible*; et la notion kantienne de l'espace comme forme *a priori* de l'esprit humain est ruinée, pour faire place à la contingence des propriétés qu'on attribue à l'étendue des corps¹. Depuis, Julius PLÜCKER, se mettant à considérer un être géométrique variable, tout arbitraire qu'il soit, comme jouant le rôle d'*élément générateur* d'un espace (c'est-à-dire comme *point*), conféra *directement* à cette notion de point une valeur et une acception beaucoup plus générales que l'ordinaire, sans l'intermédiaire d'aucune représentation. De là vient qu'aujourd'hui, en traitant par exemple de *courbes* ou de *surfaces*, on fait allusion à certaines classes dont on ne spécifie pas les éléments, pourvu qu'on puisse les déterminer *d'une manière univoque* et par une loi *continue* au moyen des valeurs numériques attribuées à *un* ou *deux* paramètres variables. Et cette signification générale put se développer et s'étendre de plus en plus avec la notion des *espaces supérieurs* (d'autant de dimensions qu'on veut) : notions qui exigent absolument l'abandon partiel des concepts physiques ordinaires touchant la classe des points.

On ne pouvait attendre un autre effet des tendances et des méthodes qui distinguent le *Calcul Géométrique* de

1. La notion des *vérités géométriques* est singulièrement claire et distincte chez F. A. TAURINUS (1794-1874), comme il ressort par exemple du passage suivant cité par P. STÄCKEL, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Teubner, 1899 : «... Il y a en effet pour la Géométrie une vérité *interne* et une vérité *externe*. Celle-là consiste uniquement en ceci, que la Géométrie forme un système fermé en soi, complètement conséquent et sans contradiction logique, sans qu'on se demande si elle est applicable aux phénomènes du monde extérieur..... Mais si la Géométrie doit avoir en outre une portée pratique, alors se pose la question de savoir si elle possède aussi une vérité *externe*; question dont la solution n'est *plus purement mathématique*. »

H. GRASSMANN et la *Géométrie énumérative* de H. SCHUBERT : l'un et l'autre caractérisés par l'emploi de certains algorithmes qui jouent algébriquement le rôle du processus démonstratif classique, quoique opérant comme lui *directement* sur les êtres géométriques.

De cette manière, on est amené naturellement et comme par une nécessité logique à admettre, avec le professeur M. PASCH¹, que « si la Géométrie doit être vraiment une science déductive, il faut que ses procédés de raisonnement soient indépendants de la *signification des concepts géométriques*, comme ils sont indépendants des *figures* : seules les *relations* imposées à ces concepts par les postulats et les définitions doivent compter dans la déduction ». Cela revient à dire, en somme, que l'être *primitif* de n'importe quel système déductif (comme serait le *point* en Géométrie) doit être capable d'interprétations *arbitraires* dans certaines limites assignées par les propositions primitives; de telle sorte que le contenu des mots ou des signes qu'on emploie pour désigner un sujet primitif quelconque soit déterminé *uniquement* par les propositions primitives qui portent sur ce sujet, et que du reste chacun soit libre d'attacher à ces mots ou à ces signes un sens *ad libitum*, pourvu qu'il soit compatible avec les attributs généraux imposés à cet être par les propositions primitives.

Telle est la Géométrie comme doctrine *hypothétique* : on pourrait la qualifier, en somme, comme la *science de tout ce qui est figurable* (c'est-à-dire représentable par des

1. *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1882).

points et des figures), de la même manière que l'Arithmétique étudie tout ce qui peut s'interpréter comme *nombre*¹.

Mais, si je ne me trompe, une fois arrivés à cette hauteur de représentation idéale, rien ne nous empêche de concevoir la Géométrie tout entière comme un *système purement spéculatif et abstrait*, dont les objets sont de pures créations de notre esprit et les postulats de simples actes de notre volonté (choix de l'esprit, vérités subjectives *a priori*, vérités de définition), sans méconnaître qu'ils ont souvent leur première racine dans quelque fait extérieur; par suite, les uns et les autres seront *arbitraires*, du moins en tant que nous ne les ordonnons pas en vue d'une fin préétablie qui doive guider la pensée².

§ II

Certains trouvent qu'il suffit de se référer aux origines premières d'un fait pour le classer, et ils en concluent aussitôt le caractère essentiellement objectif de la Géométrie. Mais, le plus souvent, le commencement n'est rien qu'un

1. La nécessité de faire tenir l'immense variété des phénomènes dans le cadre étroit d'un petit nombre de schèmes intellectuels logiquement maniables se manifeste à un degré éminent dans les parties les plus avancées de la Physique, où l'on a grand intérêt à pouvoir parfois évoquer, par la seule magie du discours, toute une classe de lois naturelles, par exemple d'un certain système d'équations différentielles. Et cela est bien, surtout si l'on pense qu'un tel système pourra tôt ou tard jouer le rôle d'une véritable définition rationnelle des faits qu'il représente.

2. Ainsi, par exemple, on estimera convenable que la *Géométrie de position* soit entièrement régie par certaines lois fondamentales (comme les principes de *projection* et de *dualité*), lesquelles pour ainsi dire l'informent et lui impriment son caractère; et que, au moyen d'interprétations opportunes (c'est-à-dire de quelques définitions de nom) on puisse entrevoir facilement dans ses résultats l'ensemble des faits qui composent la *Géométrie élémentaire* ordinaire et les Géométries métriques jumelles.

point par rapport au devenir continu. Pour s'éclairer sur la nature présente et les fins les plus proches de quelque institution, il faut regarder plutôt l'histoire de son développement successif, de ses modifications et adaptations. Au début de toute élaboration intellectuelle des faits, l'office éminemment subjectif de la connaissance se trouve parfois obscurci et comme éclipsé dans la disproportion entre la multitude et la variété des objets avec l'impuissance de notre esprit à les dominer et à les discerner. Mais si la science, en dernière analyse, n'est qu'une représentation schématique du monde ayant pour but l'empire de la raison sur les faits, née et grandie pour les besoins rationnels de l'homme et créée en somme pour l'homme, il faudra que dans chaque branche de notre savoir se manifeste tôt ou tard ce caractère subjectif, à commencer par les parties les plus développées, et qu'il s'accroisse de plus en plus avec le progrès des études.

De même qu'il fut un temps où l'on ne concevait pas les nombres négatifs autrement que comme des *dettes*, de même, aujourd'hui encore, par un semblable défaut d'abstraction, beaucoup ont l'habitude de joindre à l'idée du *point* la *représentation spatiale* ordinaire. On ne nie pas l'importance heuristique, et encore moins la valeur didactique, d'une telle interprétation concrète des êtres géométriques : mais ce n'est là en somme que l'avantage de toutes les représentations intuitives et pleinement conformes à une abstraction quelconque. Soutenir que les postulats de la Géométrie, par exemple, ne sont que des formes rigoureuses

du concept intuitif de l'espace physique (lesquelles ne font qu'imprimer un certain caractère de stabilité, avec un cachet rationnel, aux faits de l'intuition spatiale), c'est à mon avis attribuer une portée excessive à une représentation objective, en en faisant une condition *sine qua non* de l'existence même de la Géométrie, tandis que celle-ci pourrait fort bien subsister encore sans celle-là. Aujourd'hui, la Géométrie peut exister indépendamment de n'importe quelle interprétation spéciale de ses concepts primitifs, de même que l'Arithmétique.

Qu'on observe comme la monnaie (le *numéraire*) fut longtemps et reste encore, parmi les interprétations concrètes de l'entité *nombre*, une des plus familières et des plus intuitives. Celui qui aujourd'hui mettrait à la base de la science des nombres cette représentation sensible ou une autre semblable imiterait, selon moi, ceux qui ne conçoivent la Géométrie que comme une science des faits inhérents à l'étendue des corps. Cette science de l'étendue sera assurément, parmi les divers aspects de l'être géométrique abstrait, celui qui conserve le plus grand intérêt pratique, mais elle ne sera pas plus la Géométrie, que la comptabilité n'est l'Arithmétique.

On en peut conclure que l'antique controverse entre *réalistes* et *nominalistes* devra se terminer théoriquement en faveur de ces derniers. Mais je trouverais plus convenable d'adopter un terme nouveau pour désigner la condition plus doctrinale et le nouveau point de vue, bien plus général et abstrait, où l'on se place, lorsqu'on regarde la

Géométrie comme une science exclusivement déductive et purement rationnelle. La Géométrie telle qu'elle s'enseigne aujourd'hui, bien qu'elle soit plus proche de ce degré d'élaboration intellectuelle qu'aucun autre corps de science (à part la Logique et l'Arithmétique), s'en distingue encore à plusieurs égards. Les conséquences n'y découlent pas toujours des prémisses par la Logique pure : les arguments d'*évidence* (ou, comme on dit à présent, d'*intuition*) se dissimulent derrière les syllogismes les mieux ajustés¹, ou même sont invoqués ouvertement. Les notions primitives y sont plus nombreuses qu'il n'est besoin; etc. Ces inconvénients pourront être écartés en partie : mais il est clair que, étant données les qualités de l'esprit des adolescents, les exigences de l'école et les bonnes règles didactiques, etc., il ne sera jamais permis dans ce domaine de faire un trop grand usage des abstractions, ni de détourner l'esprit des jeunes gens des phénomènes de l'étendue; de sorte que, *dans les écoles*, la Géométrie élémentaire ne pourra peut-être jamais quitter le caractère d'une *Physique de l'étendue* qu'elle possède depuis l'antiquité la plus reculée.

§ III

Un système hypothétique-déductif (tel que je l'entends) ne doit pas seulement distinguer organiquement les jugements *a priori* ou primitifs des jugements *dérivés* ou déduits (c'est-à-dire les définitions et les postulats des théo-

1. Comme on le voit, par exemple, dans les propositions I et XXII du livre I d'EUCLIDE.

mêmes), mais encore, et dans la même mesure, classer les notions sur lesquelles portent ces jugements, en discernant par là les *idées-mères*, primitives ou indécomposées, et en les maintenant bien distinctes de celles qui en sont des reproductions et des dérivations formelles (ou peuvent être obtenues comme telles), et qui sont en effet composées des premières combinées entre elles et avec les catégories de la Logique. Les deux distinctions sont à la vérité fort analogues; la seconde n'est pas moins ancienne que l'autre, et ne paraît pas avoir moins de valeur; mais cependant les mathématiciens ne lui ont pas reconnu pratiquement une égale importance avant notre époque¹. En fait, on

1. « Les premiers concepts par lesquels commence une science doivent être clairs et réduits au plus petit nombre. Ce n'est qu'alors qu'ils forment pour l'édifice de la science un fondement solide et suffisant » (N. I. LOBATCHEVSKI, *Ueber die Anfangsgründe der Geometrie*, trad. ENGEL).

Si par *définition* on entend une pure et simple imposition de nom à des choses déjà connues ou acquises à la science, les idées premières seront les concepts non définis. Mais on entend encore la « définition » en un sens plus large : c'est ainsi qu'on dira, par exemple, que les concepts primitifs ne sont pas définis autrement que par les postulats. En effet, ces derniers attribuent à ces concepts certaines propriétés qui suffisent à les caractériser en vue des fins déductives qu'on se propose. Pour éviter toute équivoque, on emploiera le terme « définition *nominale* » quand on voudra exclure la « définition *réelle* ou de chose ».

A propos de définitions : Un être qui est défini *en soi-même*, c'est-à-dire en tant qu'il participe, avec d'autres déjà connus ou non encore définis, à certaines relations données et qui les vérifie, se trouve déterminé à titre de *solution* ou *racine* de certaines *équations logiques*, de même que l'inconnue x d'un système de deux équations simultanées en x, y : $f(x, y) = 0, \varphi(x, y) = 0$. Or ici, comme en Algèbre, il sera quelquefois possible, par des moyens convenablement choisis, de résoudre ce système d'équations logiques par rapport aux êtres non encore définis qui y figurent. Elles fourniront alors une définition *nominale* au sens propre du mot. Si par exemple il s'agit d'un seul être donné en relation avec d'autres déjà tous connus, ou regardés comme tels, cette résolution peut s'effectuer en beaucoup de cas par les algorithmes logiques connus. Il paraît donc plus exact et plus convenable de distinguer entre les « définitions explicites » et les « définitions implicites » ; distinction qui embrasse toutes les sortes de définitions. Cf. les mémoires de MM. PEANO et BURALI-FORTI dans ce volume.

cherche le plus souvent à réduire au minimum les postulats et les axiomes, sans s'efforcer en général de définir par le minimum d'idées fondamentales tous les êtres qui se présentent dans la déduction; de cette manière, l'avantage gagné d'un côté peut bien souvent se perdre de l'autre, en raison du nombre et de la qualité des idées primitives sur lesquelles repose le système ¹.

Nous avons donc deux espèces de faits primitifs, qu'on doit regarder comme données *a priori*, pour rester dans le domaine des abstractions, mais qui doivent trouver une image plus ou moins exacte et conforme, sinon un contrôle parfait, dans tout ordre d'objets et de phénomènes auquel on veut appliquer le système en tout ou en partie : à savoir, les *sujets primitifs* ou catégories, d'une part, et les *propositions primitives* ou postulats, d'autre part. Elles correspondent en quelque manière aux idées indiquées d'habitude par les questions *quoi* et *comment*. Les idées *acquises* seront celles qui se définissent explicitement au moyen des idées primitives, ou qu'on accepte comme connues (semblables aux quantités que l'on *adjoint* à un *domaine de rationalité* donné, dans la théorie des équations) : et les propositions *dérivées* seront celles qui se démontrent déductivement au moyen des propositions primitives. D'ailleurs

1. Ainsi, bien que la possibilité de développer tout le système géométrique ordinaire en partant de *trois* idées primitives seulement (v. § IV) soit hors de doute (en vertu d'exemples antérieurs), on voit pourtant qu'elle n'empêche pas de proposer pour ce même office de « concepts fondamentaux de la Géométrie » des notions telles que celles de *Corps rigide*, *Partie d'un corps*, *Espace*, *Partie d'un espace*, *Occuper un espace*, *Temps*, *Repos*, *Mouvement* (W. KILLING, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Paderborn, 1898).

on n'exclut pas le concours de catégories et de postulats appartenant à d'autres systèmes déductifs qu'on adopte en guise de prémisses générales, comme seraient la Logique et l'Arithmétique, nécessaires à un système quelconque. Dans la mesure du possible, il conviendra que les idées primitives soient *irréductibles* entre elles, de manière qu'aucune d'elles ne puisse se définir explicitement au moyen des autres; et, de même, que les postulats soient *indépendants* les uns des autres, de sorte qu'aucun ne puisse se déduire des autres; mais on ne se dissimule pas que ce sont là des conditions qui touchent presque à la perfection idéale, et qui ne sont jamais remplies que dans des cas très rares ¹.

Une distinction précise entre les idées primitives ou *simples* et les idées dérivées ou *composées* offre entre autres cet avantage, de pouvoir le plus souvent décider de l'*équivalence logique* de deux systèmes par un petit nombre de comparaisons. Il suffit en effet (et il est nécessaire pour l'équivalence) que les concepts primitifs de chaque système

1. Étant données plusieurs propositions conditionnelles $P(x, y, z, \dots)$, $Q(x, y, z, \dots)$, $R(x, y, z, \dots)$, etc., * entre les êtres variables $x, y, z, \dots$, on ne peut avoir aucun doute sur la valeur des assertions : * de P et Q on ne peut déduire R *, * R n'est pas conséquence de P et Q *. Ces deux phrases n'expriment pas autre chose que cette proposition particulière : * il existe des $x, y, z, \dots$ pour lesquels P et Q sont vraies, mais R n'est pas vraie *. Donc P, Q, R..... seront *indépendantes* les unes des autres, si pour chacune on peut trouver des $x, y, z, \dots$ qui ne la vérifient pas, tandis qu'ils vérifient les autres. Par suite, pour établir l'indépendance mutuelle absolue d'un système donné de n postulats, il faudra produire n interprétations des concepts primitifs, dont chacune laisse non vérifié un seul de ces n principes. Au contraire, pour prouver que ces n propositions primitives sont toutes compatibles (c'est-à-dire non contradictoires), il suffit d'un *seul* exemple concret qui les vérifie toutes à la fois (par suite, un seul exemple suffit aussi pour conclure que la proposition contraire ou négation de chacune d'elles est indépendante des autres). Cf. le mémoire de M. ΠΑΡΟΛ dans ce volume.

puissent se définir explicitement par ceux de l'autre, et que de plus les propositions primitives de l'un soient des conséquences de celles de l'autre. Mais un avantage plus considérable est la possibilité de faire abstraction du sens des catégories, par où il est permis de leur prêter dans le discours n'importe quelle interprétation spéciale, en arguant et en opérant symboliquement sur des expressions de contenu variable, bien que liées entre elles par des relations connues, et d'embrasser par suite en une seule doctrine générale et abstraite plusieurs ordres de choses concrets et particuliers (de même que la résolution algébrique d'un problème quantitatif embrasse toujours plusieurs cas numériques divers, et de plus différents les uns des autres par la qualité des données).

Ici l'on devra reconnaître l'utilité d'un bon algorithme idéographique, comme instrument propre à guider et à discipliner la pensée, à exclure les ambiguïtés, les sous-entendus, les restrictions mentales, les insinuations et autres défauts presque inséparables du langage ordinaire, tant parlé qu'écrit, et si nuisibles aux recherches spéculatives. Ainsi il faut attacher un grand prix à l'emploi des procédés formels qui appartiennent à la Logique algébrique; et cela, non seulement pour l'efficacité des symboles en eux-mêmes, mais encore en raison des habitudes intellectuelles que les méthodes et les doctrines de cette science se montrent capables d'engendrer et de développer, et aussi pour leur vertu suggestive, qui conduit souvent à des observations et recherches où ne mènent pas d'autres voies.

La Logique mathématique ressemble à un microscope propre à observer les plus petites différences d'idées, différences que les défauts du langage ordinaire rendent le plus souvent imperceptibles, en l'absence de quelque instrument qui les agrandisse. Quiconque méprise les avantages d'un tel instrument, notamment dans cet ordre d'études (où souvent l'erreur résulte d'équivoques et de malentendus dans des détails en apparence insignifiants) se prive à mon avis, de propos délibéré, du plus puissant auxiliaire qu'on possède aujourd'hui pour soutenir et diriger notre esprit dans les opérations intellectuelles qui réclament une grande précision.

Les recherches citées au début de ce mémoire (je me propose de résumer plus loin celles qui portent sur la Géométrie élémentaire) ont été pensées et écrites d'abord dans la pasigraphie construite par le professeur G. PEANO¹.

§ IV

Parmi les études consacrées à constituer la science des figures en système hypothétique-déductif, l'ouvrage du professeur M. PASCH (v. § I), inspiré par le dessein d'établir la Géométrie sur des axiomes qui se rencontrent facilement et immédiatement avec la réalité, marque comme le début d'un nouvel ordre d'idées, touchant le fondement de cette science, visant à ce qu'elle participe à la clarté, à la perfec-

1. Voir spécialement le traité de *Logique mathématique*, par G. PEANO, dans le *Formulaire de Mathématiques* publié par la *Rivista di Matematica*, t. II.

tion déductive et à cette forme quasi cristalline que nous offre l'Arithmétique. Les concepts primitifs de PASCH sont au nombre de quatre : le *point*, le fait d'être *situé entre deux points* (c'est-à-dire le *segment* tel qu'il se présente dans la géométrie d'Euclide et de Lobatchevskij), la *surface plane* ou portion finie de plan, et la relation de *congruence* entre deux figures. Les principes de PASCH ont été depuis analysés avec l'instrument de la Logique algébrique et reproduits, avec de notables modifications dans le fond et dans la forme, par G. PEANO¹. Celui-ci a réduit les catégories à trois seulement, qui sont le *point*, le *segment* et le *mouvement* : le plan se trouve défini formellement au moyen du segment et du point, et l'auteur a préféré le concept de *mouvement*, comme transformation spéciale de points en points, à celui de *figures congruentes*, qui s'en distingue à peine logiquement, mais le premier est peut-être plus maniable dans les déductions.

A leur tour, ces idées primitives ont pu se réduire ultérieurement à deux seulement, en résumant dans les notions de *point* et de *mouvement* (celui-ci étant entendu comme représentation de points par points, et dépouillé de toute signification mécanique) les concepts qui se présentent dans la Géométrie élémentaire, y compris le *segment*. Au moyen de ces deux idées, à l'aide des catégories logiques plus générales d'*individu*, de *classe*, d', d'*inclusion*, de *représentation*, de *négation* et quelques autres

1. Dans ses mémoires : *Principii di Geometria logicamente esposti* (Torino, Bocca frères, 1889) et *Sui fondamenti della Geometria*, ap. *Rivista di Matematica*, t. IV, 1894.

(communes, et, peut-on dire, nécessaires à tout discours humain), on est en mesure de donner une définition nominale de tous les autres concepts; et l'on obtient un système géométrique où l'auteur se flatte d'obtenir une marche plus facile et une plus grande simplicité déductive, en comparaison des systèmes précédents. Le fait d'employer plus largement qu'à l'ordinaire dans les définitions et les raisonnements les mouvements les plus simples, comme translations, rotations, symétrie, etc., et leurs produits, confère à l'ensemble du système une certaine désinvolture qui n'est pas dépourvue de clarté et d'efficacité¹. D'autre part, on sait combien souvent Euclide et les auteurs de traités postérieurs recourent à des constructions de figures congruentes, et masquent ainsi l'emploi des mouvements, qu'ils ne réussissent pas à exclure; et comment l'adoption systématique sur une grande échelle des transformations spatiales et de leurs *groupes* distingue et régit, on peut le dire, toute la Géométrie moderne.

Un moyen convenable pour exclure des fondements de la Géométrie élémentaire le concept de *mouvement* (en en faisant en somme une idée dérivée, comme d'aucuns le veulent) serait de définir la congruence des figures au moyen de la notion plus générale d'*homographie*, qui pourrait servir elle-même d'idée primitive², ou qui pourrait être engendrée, selon la méthode de STAUDT par exemple, comme

1. Des traces remarquables d'une tentative en ce sens se trouvent déjà par exemple dans la *Characteristica geometrica* de LEIBNIZ. Cf. M. CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, t. III, p. 31-35, et L. COUTURAT, *La Logique de Leibniz*, ch. IX.

2. Par exemple de la manière indiquée dans le dernier des mémoires cités au début.

produit d'autres notions de Géométrie projective qui peuvent se réduire à *deux seulement*¹, et en suivant pour le reste les procédés analytiques de Cayley et de Klein qui, sous le nom de *déterminations métrico-projectives*, reproduisent en termes analytiques toutes les propriétés des mouvements, tant euclidiens que non-euclidiens, considérés comme représentations de points par points. Mais chacun voit combien peu se recommande une réforme de si grande conséquence, qui conduirait d'emblée à faire précéder l'enseignement de la Géométrie élémentaire ordinaire de celui de la pure Géométrie de position. D'autre part, je ne trouve aucune autre méthode qui, en satisfaisant les exigences d'une bonne déduction, réussisse à proscrire le mouvement des éléments de la Géométrie.

Si l'on ne veut pas effacer des principes de la Géométrie toute trace du mouvement, il reste à réduire son rôle à de moindres proportions. Restreindre la sphère primitive du mouvement est un travail faisable et assuré du succès : d'ailleurs il ne manque pas d'exemples de progrès déjà réalisés dans cette direction. Dans les *Éléments de Géométrie* du professeur G. VERONESE², la relation de *congruence*, en tant qu'elle joue le rôle d'idée primitive (c'est-à-dire définie exclusivement par des postulats), n'intervient pas comme transformation de l'espace en lui-même ni d'une figure donnée quelconque en une autre, mais uniquement à titre de relation entre deux segments, c'est-à-dire, en dernière

1. Comme dans le premier des travaux susdits.

2. Verona, Drucker frères, 1897.

analyse, comme une relation entre quatre points. Cela me persuada un jour d'essayer de restreindre encore plus la partie non explicitement définie du mouvement, en le réduisant à une relation entre trois points seulement. Et il ne me reste aucun doute sur la possibilité de composer toute la Géométrie élémentaire avec ces deux seuls éléments : 1° le point; 2° une certaine relation entre 3 points, a, b, c , qui peut se traduire par les phrases : « b et c sont également distants de a » ou bien : « le couple ac est congruent avec le couple ab », etc. En effet, sur le fondement de cette relation on peut définir explicitement le *mouvement le plus général* d'une figure donnée à volonté. Mais la complication excessive à laquelle aboutit finalement la plus grande partie d'un tel système (étant données les nombreuses exigences logiques auxquelles on veut satisfaire) fait toutefois désirer de nouvelles études en ce sens.

Nous ne pouvons cependant nous dissimuler que l'idée de *mouvement* est employée comme primitive plus qu'il n'est nécessaire, quand on l'introduit comme représentation de toute la classe des points sur elle-même.

§ V

L'inconvénient précité m'a suggéré quelques réflexions sur d'autres conditions que l'on exige d'habitude ou que l'on pourrait exiger des concepts fondamentaux et des postulats d'un système déductif.

J'estime qu'il serait déplacé de prétendre à une *évidence*

lumineuse dans les prémisses, d'autant que l'on n'attache pas aux idées primitives un sens concret et bien circonscrit dans le champ de la réalité. En effet, puisque de propos délibéré l'on ne cherche pas d'images sensibles pour les notions abstraites dont on parle, puisque l'on discute sur les symboles (du point par exemple, ou du mouvement) comme sur les nombres de l'Arithmétique ou sur les formules algébriques, parler d'évidence intuitive n'a pas de sens. (C'est pourquoi l'expression de *postulat* est préférable à celle d'*axiome*.) Il ne sera pas défendu pour cela, à celui qui traite par exemple de Géométrie élémentaire, d'avoir toujours devant les yeux une interprétation réelle des symboles, et d'adapter les prémisses aux images; pourvu qu'on ne prenne pas un motif de convenance, subordonné aux applications qu'on a en vue, pour une condition essentielle de la Géométrie. Comment pourra-t-on rendre compte de l'évidence intuitive des postulats qui distinguent les géométries dites non-euclidiennes, après avoir trouvé évident l'axiome XII sur les parallèles, ou *vice versa*?

Du reste, cette exigence d'une clarté intuitive ne viendrait à l'esprit de personne, si l'on réfléchissait que les concepts primitifs (exception faite pour les catégories de la Logique, nécessaires à tout discours et par suite impossibles à décrire par des mots) peuvent être donnés, si l'on veut, par voie de définitions implicites ou de *descriptions logiques* qui jouent en quelque sorte le rôle de postulats, ou bien comme *racines* d'un certain système d'*équations logiques* simultanées (§ III, note). Par exemple : on donne le nom de *point*

ou de *mouvement* respectivement à toute détermination des classes Π et M qui possèdent les propriétés suivantes... (ici la série des prémisses touchant le point ou le mouvement, désignés respectivement par Π et M).

Cet artifice logique, qui n'est certes pas recommandable quand il s'agit d'exposer à la fois plusieurs concepts primitifs, est employé communément, et alors avec avantage, dans les cas où il est possible de qualifier à part un concept primitif, indépendamment des autres, au moyen de jugements condensés dans un petit nombre de propositions. Par exemple, pour les besoins de l'*Analysis situs*, le concept de *ligne* (ouverte, sans nœuds, continue...) peut s'introduire sans effort, et sans sortir du domaine de la plus grande abstraction, sous la forme de « classe d'éléments, qui possède deux ordres continus, l'un inverse de l'autre, sans éléments extrêmes », où les notions d'*ordre*, de *continuité*, etc., se comprennent au moyen des idées acquises auparavant, et peuvent se déterminer à leur tour d'une manière semblable¹. Une telle description recèle effectivement un système de postulats : mais comme ceux-ci, sous forme de définitions, manifestent assez leur qualité de propositions conditionnelles touchant les idées primitives (à savoir leur caractère naturellement arbitraire, etc.), il arrive que personne ne demande s'ils sont évidents par eux-mêmes ou non. Les postulats, comme toutes les propositions conditionnelles, *ne sont ni vrais ni faux* : ils expriment seulement des conditions qui peuvent tantôt être vérifiées, et

1. F. ENRIQUES, ap. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XII (1898).

tantôt ne pas l'être. Ainsi l'égalité :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

est *vraie*, si x, y , sont des nombres réels, et *fausse*, s'il s'agit de quaternions (en joignant à chaque hypothèse le sens connu des signes $+, \times$, etc.).

Quoi qu'il en soit, pourvu qu'on raisonne sur des choses *logiquement déterminées* (peu importe de quelle manière), on ne court guère le risque d'échouer par trop d'abstraction ou de généralité des concepts. Toute crainte à cet égard est par bonheur sans fondement, comme trop d'exemples le montrent.

Pour choisir certaines notions qu'on doit prendre comme primitives de préférence à d'autres, on pourrait employer le criterium suivant : tout corps de science est ordinairement caractérisé par un *groupe maximum de transformations* qui n'ont pas le pouvoir d'altérer les propriétés qu'étudie cette science. On s'arrange autant que possible de manière que *les concepts primitifs* aussi soient *invariants par rapport à ce groupe fondamental, sans l'être pour un groupe plus étendu*. Un défaut de l'*Analysis situs*, telle qu'elle est constituée aujourd'hui, est de présupposer la notion euclidienne de *longueur*, qui n'est nullement invariante par rapport au groupe des *continuités*. Il en est de même dans la Géométrie de position de STAUDT, pour les notions de *demi-droite*, de *demi-cône*, etc., qui ne sont pas invariantes pour les transformations *homographiques*. Mais en même temps j'estime encore préférable d'exclure

des idées primitives des Éléments de Géométrie au moins celles de *ligne* en général, de *surface* et de *solide*, qui sont invariables pour les transformations d'un groupe beaucoup plus grand que celui de la Géométrie élémentaire (et qui appartiennent plutôt à l'*Analysis situs*); et aussi, pour le même motif, les notions de *segment* et de *droite*, qui sont invariantes pour le groupe des *affinités*, qui embrasse le groupe *principal*, ou des *similitudes*.

D'autres encore, et pour diverses raisons¹, proposent d'éviter autant que possible en Géométrie élémentaire les notions génériques d'*espace*, de *ligne*, de *surface*, etc., qui ne sont nullement nécessaires à son développement. De même qu'en Géométrie projective on définit successivement les *lignes* et *surfaces du second ordre*, du *troisième*, etc. (et souvent même le plan) sans recourir aux notions plus élevées et plus complexes de *lignes* et *surfaces algébriques* (d'ordre n), et bien moins encore aux concepts de *ligne* et de *surface* en général, de même on peut introduire peu à peu en Géométrie élémentaire la *droite*, le *plan*, la *sphère*, le *cercle*, le *segment*, et ainsi de suite, à mesure des besoins, au moyen de générations convenables fondées sur des concepts mieux appropriés à cette science.

Ce sont là sans aucun doute des critères incomplets et non absolus, mais cependant un peu moins vagues et indéterminés que les habituelles raisons de simplicité si souvent invoquées pour justifier tout ce que l'on veut.

1. V. G. PEANO, ap. *Rivista di Matematica*, t. IV, p. 53 (*loc. cit.*).

§ VI

Exposons sommairement de quelle manière on pourrait composer un système de Géométrie élémentaire à partir des notions de *point* et de *mouvement*.

On postulera : 1° que le « point » et le « mouvement » sont des classes ou des idées générales; 2° qu'il existe au moins un point; 3° que si p est un point, il existe toujours quelque point différent de p . L'emploi déductif de ces trois principes est assez rare. Beaucoup estiment que le 1^{er} et le 2^e sont des prémisses logiques plus que géométriques, et quant au 3^e, au lieu de l'énoncer parmi les postulats, ils préfèrent l'introduire chaque fois sous forme conditionnelle dans les hypothèses des théorèmes peu nombreux qui en dépendent. Il est très important de s'entendre sur le sens des mots « points égaux ou différents ». Si p est un point, nous appellerons « égal à p » ou « coïncidant avec p » tout point qui appartient à chaque figure qui contient p . Et par « figure » nous entendrons n'importe quelle classe ou multiplicité de points. L'égalité des points ainsi définie est une égalité *relative*, qui d'ailleurs enveloppe l'égalité *absolue* ou l'*identité* des concepts; de sorte que deux points égaux d'après la définition susdite, c'est-à-dire par rapport à la « classe des points », seront encore égaux par rapport à n'importe quel attribut ou caractère logique (attendu que toute qualité qui appartient à l'un des deux points sera toujours répandue dans une classe de points qui tous l'ont en commun).

On observe que le terme « figure » n'est pas même

entendu par tous dans le sens défini plus haut. Si nous avons ensuite à considérer des systèmes de droites, de plans, de sphères, etc., non comme classes *de classes de points*, mais comme classes *simples*, il faudra les distinguer par un autre nom, au lieu de pouvoir les appeler tout simplement des *figures*. Dire qu'une figure φ « est *contenue* ou *située* » dans une autre ψ équivaut à affirmer que tout point de φ appartient aussi à ψ . Si de plus tout point de ψ est un point de φ , alors seulement les deux figures seront dites *égales* entre elles ou *coïncidentes* (l'habitude de qualifier d'« égales », sans autre indication, deux figures *congruentes* entre elles ou *superposables* doit être proscrite, à mon avis, et il ne manque pas d'exemples d'équivoques nées pour ainsi dire de suggestions de ce terme).

Par la première de ces prémisses déductives, le nom de *point* possède aussi le sens de « classe des points » ou d'« espace ». Ce dernier terme peut donc facilement s'éviter; et l'on ne s'en étonnera pas, si l'on pense qu'il manque à la langue d'un APOLLONIUS et d'un ARCHIMÈDE ¹.

On peut énoncer ensuite que :

4° *Tout mouvement est une transformation isomorphe de points en points*; c'est-à-dire fait correspondre à chaque point un point, et à chaque couple de points distincts un couple de points également distincts. La classe « mouvement » rentre par suite dans la catégorie générale qui porte les noms de *fonction*, *représentation*, *transformation*, etc.

5° *Quel que soit le mouvement μ , il existe toujours un*

1. PEANO, *loc. cit.*, p. 52.

autre mouvement (qu'on appellera l' « inverse de μ », ou « μ^{-1} ») qui fait correspondre à chaque point x un point que le mouvement μ transforme en x . Le principe 4° implique qu'il ne peut exister deux mouvements non égaux entre eux, et néanmoins capables l'un et l'autre de transformer chaque point x en un point que μ transforme en x . Ainsi, étant données les prémisses 4° et 5°, chaque mouvement sera une transformation *réversible* ou *reciproque* de points en points (une correspondance *biunivoque* de l'espace avec lui-même), expression qui comprend les deux prémisses, et peut aussi en tenir lieu. On remarquera à ce propos que, suivant les règles de la méthode déductive, il paraît opportun d'éviter autant que possible qu'un postulat puisse facilement se décomposer en plusieurs affirmations distinctes et de poids moindre, et qu'il ait une efficacité plus grande que celle qui est requise par son office déductif; de sorte que le nombre des postulats peut croître notablement, encore que la somme des conditions arbitraires qu'ils imposent aux idées primitives reste constante (si même elle ne diminue pas). Et ce nombre peut aussi diminuer par le seul fait qu'on substitue à certaines prémisses un jugement équivalant à leur produit logique. Mais si l'augmentation vient de la tendance à résoudre les jugements en parties élémentaires ou distinctes, on ne pourra pas la regretter; surtout si l'on pense qu'elle est le moyen le plus propre à rejeter graduellement les affirmations superflues¹.

1. On sait déjà que l'on ne doit pas même tenir pour impossible une Géométrie sans aucun postulat apparent.

Deux mouvements μ et ν exécutés successivement, le second sur le résultat du premier, produisent le même effet qu'un seul mouvement, appelé leur résultant ou leur produit. On ne dit pas qu'un tel produit soit commutatif; mais des principes 4° et 6° il résulte que la succession de trois ou plusieurs mouvements équivaut encore à un mouvement, et que cette opération composée sera *associative*, comme la multiplication ordinaire.

Les principes 4°, 5°, 6° et 12° établissent que les mouvements constituent ce qu'on appelle en style moderne « un groupe transitif de transformations » dans l'acception la plus générale. Mais les caractères particuliers à ce groupe, et qui suffisent à le distinguer de toute autre classe analogue de transformations des points en points, ne seront complètement déterminés que par l'ensemble de tous les postulats. Des principes 5° et 6° on déduit d'ailleurs que, si μ et ν sont des mouvements, les opérations $\mu^{-1}\mu$, $\nu^{-1}\nu$ sont des mouvements dont chacun laisse fixes tous les points. Une représentation qui fait correspondre chaque individu d'une classe à lui-même s'appelle d'ordinaire une « transformation *identique* »; et il est clair que deux telles représentations appliquées à la même classe sont équivalentes. D'où ce théorème que, « s'il existe un mouvement, toute transformation identique de la classe *point* est également un mouvement ». Il paraît convenable de qualifier d'*impropre* un tel mouvement (que l'usage ne reconnaît pas d'ailleurs), et d'*effectifs* ou *propres* ceux des mouvements pour lesquels on peut trouver toujours au

moins un point qui soit transformé en un autre différent.

7° *Pour tout couple de points distincts, il existe au moins un mouvement propre qui les laisse fixes tous les deux.* On peut apercevoir cette proposition dans le fait sensible qu'un corps est toujours capable de *se mouvoir* quand on fixe deux quelconques de ses points. Et le *mouvement des corps rigides* servira d'image concrète, intuitive et pleinement conforme à l'idée abstraite de mouvement, pourvu qu'on fasse abstraction du *temps*, et qu'on porte l'attention exclusivement sur *deux* états du mobile (*positions initiale et finale*) en observant la distinction entre les mouvements propre et impropre. Du principe 7° on peut conclure tout de suite l'existence d'un mouvement effectif, vu les précédents 2° et 3°.

8° *Étant donné que a, b, c sont des points distincts, s'il existe un mouvement propre qui les représente chacun par lui-même, tout mouvement qui laisse fixes individuellement a et b laissera fixe aussi c .* C'est là un principe d'une grande capacité déductive, et qui par suite énonce une condition assez restrictive pour les classes « point » et « mouvement ». Il nous permet de produire la notion de « droite » et de reconnaître quelques-unes de ses propriétés les plus remarquables. En effet, nous pourrions appeler *collinéaires* trois points a, b, c , s'il existe un mouvement effectif qui les représente chacun par lui-même; et « joignant a avec b » ou bien « ab » la classe de tous les points x tels que les trois points a, b, x soient collinéaires. Alors, des prémisses déjà établies il suit que, « si a et b sont des

points non coïncidants, la joignante a avec b ne se distingue pas du lieu de tous les points qui restent en repos pour n'importe quel mouvement qui représente a par a et b par b ; qu'il existe au moins un point hors de la droite ab ; que par a et b il ne passe qu'une droite; etc... »

La définition susdite des points collinéaires ou de la *droite* (qui remonte en substance à LEIBNITZ¹) ne convient pas à la Géométrie de l'hyperespace, et le principe 8° non plus. Pour obtenir les espaces supérieurs, il faudra donc renoncer à ce postulat et à cette définition; exactement comme on renonce au postulat des parallèles et à leur définition ordinaire (ou encore on omet l'axiome que « deux droites ne peuvent enfermer un espace ») pour passer à la Géométrie de Lobatchevskij ou de Riemann².

Par « *plan* de trois points non collinéaires a, b, c » on peut entendre la figure occupée indistinctement par toutes les droites qui joignent le point a aux divers points de bc , ou le point b aux points de ca , ou le point c aux points de ab . Cette définition (qui ne diffère guère de celle du plan projectif, attribué à RIEMANN) se trouve énoncée comme théorème chez M. PASCH³; elle convient également à chacune des Géométries dites *hyperbolique*, *parabolique* et *elliptique*

1. *Characteristica geometrica*, § 14 (10 août 1679), ap. *Mathematische Schriften*, éd. Gerhardt, t. V, p. 145.

2. Celui qui voudrait par exemple une Géométrie à quatre dimensions sans trop s'écarter de celle-ci pourrait commencer par substituer aux définitions des points *collinéaires* et de la *droite* des définitions analogues des points *complanaires* et du *plan*, et aux principes 7° et 8° deux propositions analogues pour *trois* ou *quatre* points respectivement; mais ce n'est pas ici le lieu de plus amples explications.

3. *Loc. cit.*, p. 25-26.

(de seconde espèce); mais celle-ci se trouve exclue par le principe 8°. De cette définition, jointe aux autres prémisses (y compris le principe 9°), il résulte immédiatement que « deux plans qui ont en commun trois points non collinéaires coïncident; qu'une droite qui a deux points dans un plan est tout entière située en lui; etc. »

9° Si a, b, c sont des points non collinéaires, et d un point de la droite bc autre que b , le plan abd sera contenu tout entier dans le plan abc .

Etant donnés deux points a et b , le terme de « sphère de b , autour de a », ou « sphère de b , de centre a », résumé dans la notation b_a (par exemple) désigne la « classe des points pour chacun desquels il existe un mouvement qui l'amène en b en laissant a en repos ». De chacune des idées générales qui s'introduisent peu à peu, on prouve qu'elle est un *invariant* par rapport au mouvement : par exemple, que tout mouvement qui transporte a en a' , b en b' , transforme la sphère b_a , dans la sphère b'_a , etc., et touchant les sphères on pourra déjà démontrer par exemple la propriété énoncée dans les propositions 11 et 12 du livre III d'EUCLIDE. Inutile de dire comment on pourra introduire le *cercle* au moyen d'une sphère et d'un plan qui en contient le centre.

§ VII

On va voir ci-après l'énoncé des autres propositions primitives, avec quelques-unes des définitions principales qui s'y rattachent, et qui sont nécessaires à leur intelligence.

Mais, malgré la présence de quelques termes abrégatifs (comme *droite*, *plan*, *sphère*, *segment*, etc.) qui ont pour but de condenser plusieurs idées en quelques signes occupant peu d'espace, les propositions primitives ne cessent pas de porter *uniquement* sur les catégories de point et de mouvement. Il n'y a pas besoin d'autre chose pour développer déductivement la Géométrie élémentaire dans cette partie qui ne dépend pas de l'axiome XII du I^{er} livre d'EUCLIDE¹.

10° Si a et b sont des points non coïncidants, il existe un mouvement qui représente a par lui-même, et qui donne pour image à b un certain point différent de b mais appartenant à ab . Un tel mouvement est certainement *propre*, et représente la droite ab par elle-même de telle sorte que, sauf a , aucun point de ab ne correspond à lui-même.

Ce même principe est reproduit sous une autre forme dans la proposition : « si a et b sont des points distincts l'un de l'autre, la sphère de b autour de a et la droite joignant a avec b se rencontrent encore en un point différent de b ».

11° Si l'on suppose que a , b sont des points non coïnci-

1. Le troisième des mémoires cités au § I étudie la plupart des faits géométriques élémentaires qui n'instituent pas de comparaison entre des *grandeurs* superficielles ou solides (sans exclure d'ailleurs l'*angle plan convexe*, le *triangle*, la relation de plus grand à plus petit entre les segments ou les angles plans, etc.) et qui sont de plus indépendants du susdit axiome des parallèles. Par suite, ces propriétés n'appartiennent pas moins à la Géométrie de Lobatchevskij qu'à celle d'Euclide, puisqu'elles reposent pour ainsi dire sur le terrain commun à ces deux Géométries (*Pangéométrie*). On y retrouvera néanmoins la plus grande partie des livres I et III d'Euclide et quelque chose du XI^e, ce qui, je pense, est en somme suffisant pour assurer que la Géométrie élémentaire ordinaire peut s'établir commodément sur les *vingt* postulats que je propose et sur l'axiome des parallèles.

dants, et que μ et ν sont des mouvements dont chacun laisse a en repos et transforme b en un point différent de b mais appartenant à ab , il en résulte que les images du point b fournies par μ et ν coïncident. Cela revient à dire que la droite ab et la sphère b_a ne peuvent se rencontrer en plus de deux points distincts.

12° Si a et b sont des points distincts, il existe un mouvement qui transporte a en b en transformant en lui-même un certain point de ab . Cela équivaut à affirmer l'existence d'une sphère qui passe par a et par b , et qui a son centre en un point de ab . Deux telles sphères ne peuvent coexister si elles n'ont pas le même centre, ce qui conduit à la notion de *point milieu* ou *centre* d'un couple de points; tandis que les deux principes précédents fournissent ceux de points *symétriques* par rapport à un point donné, etc. Les mêmes faits permettent ensuite de spécifier certains mouvements, comme par exemple les glissements et les rabattements d'une droite sur elle-même, etc.

13° Étant donnés trois points non collinéaires a, b, c , il doit exister un mouvement qui transforme à la fois a et b en eux-mêmes, et qui amène c en un point différent de c mais appartenant au plan abc (Cf. 10°). Un tel mouvement transforme nécessairement tout le plan abc en lui-même, et peut s'appeler un rabattement du plan sur lui-même *autour des points a et b comme pivots*. On en déduit l'existence de quelque autre point commun aux sphères c_a et c_b en dehors de c , et toute indétermination se trouve levée en vertu du principe suivant.

14° Si a, b, c sont des points non collinéaires, il ne peut exister sur le plan abc deux points, distincts l'un de l'autre et de c , qui soient communs aux deux sphères c_a et c_b . De là résultent par exemple les propositions 9 et 10 du livre III, et aussi ces théorèmes : qu'une droite ne peut rencontrer une sphère en plus de deux points distincts ; que deux rabattements du plan abc sur lui-même autour des mêmes points a et b comme pivots sont des représentations *égales* du plan abc par lui-même ; qu'un tel mouvement transforme le plan abc en lui-même d'une manière *symétrique* ou *involutive* ; etc.

La perpendicularité s'introduit sous la forme d'une relation entre trois points seulement (en la réduisant à ses termes les plus simples et la dépouillant de tout superflu) par la définition suivante : En supposant que a, b, c soient des points, a différent de b et de c , quand on dit « le couple (a, c) est *perpendiculaire* au couple (a, b) », ou qu'on écrit : « $(a, c) \perp (a, b)$ », on veut seulement affirmer l'existence d'un mouvement qui transforme a et b en eux-mêmes, et c en un point différent de c , mais appartenant à la droite ca . En somme, la proposition « $(a, c) \perp (a, b)$ » exprime ce jugement : « les points a, b, c ne sont pas collinéaires, et quand on rabat le plan abc sur lui-même autour des points a et b comme pivots, c retombe sur la droite ca ». On démontre alors les propositions 3, 16 et 18 du livre III ; la permutabilité des couples (a, c) et (a, b) par rapport au signe $\perp$; et encore, que la relation $(a, c) \perp (a, b)$ est une conséquence du fait que la sphère de c autour de b contient le

point symétrique de c par rapport à a . La perpendicularité des droites ac et ab dépend de celle des deux couples de points (a, c) et (a, b) ; on établit ensuite l'existence d'une seule droite perpendiculaire à une autre et passant par un point extérieur à celle-ci; la non-existence de plus d'une droite normale à une autre en un point de celle-ci et dans un plan passant par celle-ci; etc.

En postulant encore les principes suivants :

15° Si a, b, c , sont des points non collinéaires, il existe un point hors du plan abc ;

16° Si a, b, c, d sont des points non complanaires, il existe un mouvement qui, transformant a et b en eux-mêmes, représente d par un point du plan abc ¹;

on peut en déduire immédiatement toutes les propositions élémentaires (des traités ordinaires) où ne figure pas la notion de *droite terminée* ou de *segment*, ni celle de *droites parallèles*. On démontre par exemple qu'il existe une infinité de droites perpendiculaires à une même droite en un point donné de celle-ci, et qu'elles sont toutes situées dans un plan qu'on peut dire *perpendiculaire* à la droite en ce point; et encore les autres théorèmes habituels sur les droites et plans perpendiculaires entre eux; d'où ressort la proposition que deux plans ayant un point commun se rencontrent suivant une droite.

1. Comme on voit, les postulats 13 et 16 pourraient à volonté se fondre en un seul. En faisant apparaître ainsi (par une très légère modification de forme) que le mouvement dont il est question dans ce principe 13 transforme tout le plan abc en lui-même, on pourrait faire aussi l'économie du postulat 9, en le dissimulant sous un principe qui affirme la possibilité de retourner un plan sur lui-même.

Dans la plupart des traités modernes, ce dernier fait se prouve (ainsi que d'autres non moins fondamentaux) au moyen de prémisses concernant les *parties*, où l'on conçoit la droite comme partagée par l'un quelconque de ses points, ou le plan par une de ses droites, ou l'espace par un plan; tandis qu'ici nous n'avons nullement fait appel à ces notions qui sont, dans le travail cité, définies plus tard avec soin en s'appuyant sur les dernières prémisses 17°-20°.

Pour introduire le *segment*, nous dirons que « un point x de la droite ab est situé entre a et b , quand il est intérieur à la sphère dont ces points sont des pôles ». Cela équivaut à exiger (en vertu d'une autre définition) que « le plan perpendiculaire en x à la droite rencontre la sphère en des points différents de a et de b » (les points *intérieurs* à la sphère étant les centres de ses *cordes*). Ainsi cette notion de *droite terminée* ou de *segment*, que l'on pose le plus souvent comme primitive, se trouve décomposée dans les concepts élémentaires de *point* et de *mouvement*, et reconstruite au moyen d'eux seuls par une suite de définitions purement nominales.

C'est enfin le lieu d'énoncer les quatre postulats suivants :

17° Soient a, b, c des points collinéaires et distincts; si un plan perpendiculaire à leur droite en un point différent de a, b, c rencontre une des trois sphères construites sur les couples de points (a, b) (a, c) (b, c) comme pôles, il devra en rencontrer aussi une autre.

18° Si a, b, c sont des points, et si c est situé entre a et b ,

aucun point ne peut être situé en même temps entre a et c et entre b et c .

19° Étant donnés les points non collinéaires a, b, c , toutes les fois qu'une droite située dans le plan abc passe entre a et b (c'est-à-dire rencontre la droite ab entre ces deux points), elle devra aussi passer entre les points a et c , ou entre les points b et c , à moins qu'elle ne contienne l'un des points a, b, c . Ce postulat correspond au principe IV de PASCH touchant la surface plane ¹. Sous une forme plus restreinte et plus nette : « dans le plan des points a, b, c , il n'existe pas de droite qui ne rencontre qu'un seul des trois segments ab, ac, bc » ².

20° Si a et b sont des points distincts, et k une figure non illusoire située tout entière dans le segment ab , il devra y avoir une *limite supérieure* (ou *inférieure*) des k , c'est-à-dire un point x intérieur au segment ab , sinon coïncidant avec b , tel que : 1° aucun point de k ne soit situé entre x et b ; 2° quel que soit le point y pris entre a et x , il existe toujours des points de k situés entre y et x , ou bien coïncidant avec x .

Esquisser, si sommairement que ce soit, la manière de construire les autres parties plus élevées des Éléments dépasserait les bornes de ce mémoire. En revanche, qu'il

1. *Op. cit.*, p. 21.

2. Si nous supposons a, b, c seulement *distincts* au lieu de *non collinéaires*, le principe 17 resterait établi par là; mais certains faits notables qui dérivent des seules prémisses 17 et 18 apparaîtraient liés à la prémisse 19. Il est très facile de réduire les prémisses précédentes à un moindre nombre au moyen de *combinaisons* logiques convenables ou de *synthèses*; tandis que l'opération contraire (que nous nous efforçons ici d'effectuer autant que possible) n'est pas aussi aisée.

nous soit permis de signaler qu'une reconstruction tout à fait analogue à celle dont nous nous sommes occupé ici peut aussi s'effectuer pour la Géométrie de position, entendue (à la manière de STAUDT) comme une science déductivement isolée, et affranchie de tout lien avec les données de la Géométrie élémentaire. Une étude attentive amène, là encore, à distinguer, parmi tous les matériaux conceptuels, *deux* notions primitives *seulement* : l'une (dont il ne paraît pas possible de se passer) est celle de *point projectif*; l'autre peut être au choix l'une des notions : la *joignante de deux points projectifs* (ou la *droite projective*), et l'*homographie*, qui joue dans la Géométrie projective le même rôle que la *congruence* dans la Géométrie élémentaire. Avec ces quelques éléments on reconstruit n'importe quelle idée *projective*, si complexe qu'elle soit : par exemple, le *segment* et le *triangle projectif*, les *sens* d'une droite projective, l'*hyperespace projectif*, le *milieu projectif absolu* (à un nombre infini de dimensions), etc., sans s'écarter de la plus stricte observance des règles de la pure méthode déductive, renouvelée et renforcée de nos jours par la Logique algébrique.

LES IDÉES ET PRINCIPES DU CALCUL GÉOMÉTRIQUE

Par ALEXANDER MACFARLANE,

Lehigh University, South Bethlehem, Pennsylvania, U. S. A.

Par Calcul géométrique, j'entends cette branche de l'Algèbre qui est fondée sur les propriétés de l'espace à trois dimensions. Aucune autre branche de la science ne présente sans doute autant d'intérêt pour le philosophe. Ses idées fondamentales, ses principaux théorèmes, ses relations logiques avec les autres branches de l'Algèbre, tout cela est important pour qui veut comprendre la marche progressive de l'esprit humain. Ses trois principaux fondateurs furent des philosophes autant que des mathématiciens : DESCARTES, HAMILTON, GRASSMANN. On dit communément que le premier a relié l'Algèbre à la Géométrie; on peut dire que le second a identifié une branche de l'Algèbre à la Géométrie; et le troisième s'est servi de l'espace ordinaire pour fonder une Algèbre applicable à l'espace à n dimensions. D'après la définition du Calcul géométrique donnée

plus haut, nous aurons surtout affaire dans ce rapport aux idées de HAMILTON.

Il est intéressant pour les philosophes de savoir que la première impulsion d'où sortit le développement du Calcul géométrique est due précisément à un philosophe, à KANT. HAMILTON a raconté comment il fut frappé d'un passage de la *Critique de la Raison pure* qui semblait faire prévoir la possibilité de construire *a priori* une science du temps aussi bien qu'une science de l'espace. Voici ce passage : « Le temps et l'espace sont deux sources de connaissance d'où peuvent dériver divers jugements synthétiques *a priori*. De cela, la Mathématique pure donne un splendide exemple : notre connaissance de l'espace et de ses diverses propriétés. Comme l'espace et le temps sont tous deux de pures formes de l'intuition sensible, ils rendent possibles des propositions synthétiques *a priori*¹. » Ainsi, selon KANT, l'espace et le temps sont des formes de la sensibilité ; et Hamilton conclut que, comme la Géométrie est la science de la première, l'Algèbre doit être la science de la seconde. Voici ses propres paroles sur cette matière :

« Il m'apparut de bonne heure que ces fins seraient atteintes si l'on consentait à regarder l'Algèbre, non pas simplement comme un art ou un langage, ni même comme étant avant tout une science de la quantité, mais plutôt comme une science de l'ordre dans la succession. Il entraînait cependant dans cette conception que la succession dont il s'agit était entendue comme continue et linéaire,

1. *Kritik der reinen Vernunft*, § 7 (p. 55 de la 2^e éd., 1787).

indéfiniment étendue en avant et en arrière, mais non dans aucune direction latérale. Et, bien que les éléments successifs d'une telle suite puissent évidemment être représentés par des points sur une droite, je pensai cependant que leur simple succession serait mieux figurée par comparaison avec les moments du temps, abstraction faite toutefois de tout rapport de cause à effet; de sorte que le « temps » ici considéré devait être dit abstrait, idéal ou pur, comme l'espace qui est l'objet de la Géométrie. De cette façon, je fus conduit à regarder l'Algèbre comme la science du temps pur, et un essai contenant mes vues sur ce point fut publié en 1835. ¹ »

Lorsque l'Algèbre est fondée sur la considération du temps ou d'une ligne droite, on rencontre une difficulté à expliquer les racines imaginaires d'une équation du second degré, c'est-à-dire à donner une interprétation concrète des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Pour lever la difficulté, HAMILTON inventa une théorie des couples algébriques, et à partir de là il fut conduit à une théorie des « triplets » algébriques. Déjà ARGAND², WARREN et d'autres avaient interprété l'expression $a + b\sqrt{-1}$ en donnant à l'explication une base géométrique; ils représentaient assez heureusement cette expression par un segment de droite dans un plan donné, mais ils avaient été impuissants à généraliser les quantités complexes jusqu'à leur faire représenter un seg-

1. Préface des *Lectures on Quaternions*, p. 2 (Dublin, 1853).

2. Son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806) a été réédité par HOÜEL (Paris, Gauthier-Villars, 1874).

ment de droite dans l'espace. HAMILTON fut naturellement conduit au problème consistant à adapter ses triplets à une telle représentation, et c'est à ce moment qu'il fut obligé de passer de la base temporelle à la base spatiale. Le problème qu'il se posait consistait à étendre à l'espace l'Algèbre qui avait été déjà découverte pour le plan, et qu'il avait étudiée dans le *Traité de la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives*, de WARREN¹. A sa grande surprise, il trouva que la multiplication de deux segments dans l'espace, chacun des deux segments étant mis sous la forme d'un triplet $x + iy + jz$, conduit à un produit composé, non de trois, mais de quatre éléments ; et ce résultat lui sembla si nouveau et si caractéristique qu'il le choisit pour nommer le nouveau calcul : « Quaternions ».

Dans son développement final, le Calcul des Quaternions repose sur une base géométrique ; néanmoins, il constitue une généralisation logique de l'Algèbre ordinaire, car ses principaux théorèmes sont les homologues généralisés des théorèmes distinctifs de l'Algèbre, tels que la formule exponentielle, la formule du binôme, la formule de la puissance n^{e} d'un polynôme et la formule de Taylor. Depuis le temps de GAUSS, les mathématiciens considéraient l'Algèbre plane ou Algèbre des quantités complexes à deux termes comme une généralisation logique de l'Algèbre ordinaire ; à leur tour, les Quaternions soutiennent avec l'Al-

1. *Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities.* (Cambridge, 1828.)

gèbre plane le même rapport logique que celle-ci avec l'Algèbre ordinaire. Soit t la quantité fondamentale considérée en Algèbre; alors la quantité fondamentale considérée en Algèbre plane sera $t + kz$, où k désigne le segment-unité de l'axe perpendiculaire au plan donné, qui implique $\sqrt{-1}$ comme préfixe scalaire. Cela posé, la quantité fondamentale considérée dans le Calcul des Quaternions est désignée par $t + ix + jy + kz$, où i et j désignent deux axes perpendiculaires entre eux dans le plan donné, et impliquant encore $\sqrt{-1}$ comme préfixe scalaire. Il règne encore une opinion erronée, à savoir que $t + kz$ désigne un vecteur. Lorsque ce symbole est appliqué à un vecteur dans un plan donné, le résultat désigne un vecteur; mais en soi $t + kz$ est un opérateur qui a un axe constant, à savoir l'axe du plan. Les deux termes $ix + jy$ introduits par HAMILTON rendent l'axe complètement variable. L'erreur en question prend corps dans l'expression $x + iy$, où x est supposé se rapporter à l'axe des x pris comme axe réel, et où i désigne l'axe des y ; tandis que la vraie expression est $t + kz$, où le premier terme représente t fois un vecteur quelconque du plan, et le second z fois le même vecteur, mais porté dans la direction perpendiculaire à la fois à k et au premier vecteur. Le procédé même de multiplication montre que telle est bien la vraie interprétation de la quantité fondamentale. L'erreur en question trompa presque HAMILTON dans ses essais de généralisation, comme on peut le voir par le récit qu'il fait de sa découverte dans le *Philosophical Magazine* de 1844. Cependant il réussit à sortir du

domaine du plan, et par là il devint le principal fondateur du vrai Calcul géométrique, l'Algèbre de l'espace à trois dimensions.

La découverte de Hamilton est contenue dans les célèbres règles fondamentales que voici :

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & j^2 = -1 & k^2 = -1 \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Il trouva le symbole i employé par les mathématiciens allemands pour désigner $\sqrt{-1}$, et il en introduisit deux autres j et k , leur faisant signifier les segments-unités de trois axes rectangulaires deux à deux, et tels que le carré de chacun soit égal à -1 . D'après ces règles, le carré d'un vecteur $ix + jy + kz$ est $-(x^2 + y^2 + z^2)$. « Chaque segment dans l'espace à trois dimensions a son carré égal à un nombre négatif, ce qui est l'un des éléments les plus nouveaux et les plus essentiels de toute la théorie des Quaternions¹. » L'expression $ix + jy + kz$ ne désigne pas seulement un vecteur, mais aussi une biradiale rectangle², et l'identification des vecteurs aux biradiales rectangles est un principe important du calcul.

L'école des mathématiciens qui cultivent l'*Analyse des Vecteurs*, représentée par HEAVISIDE et GIBBS, n'accepte pas cette identification des vecteurs aux biradiales rectangles. Selon eux, le vecteur est l'élément fondamental du Calcul géométrique, et le quaternion n'apparaît nulle part. Ils

1. *Lectures on Quaternions*, p. 53.

2. « *Quadrantal quaternion*. »

préfèrent modifier ainsi qu'il suit le système des règles :

$$\begin{array}{lll} i^2 = +1 & j^2 = +1 & k^2 = +1 \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Leur idée est que les symboles i, j, k désignent purement et simplement des segments-unités portés par des axes orthogonaux; le carré du vecteur $ix + jy + kz$ est alors $(x^2 + y^2 + z^2)$; et une de leurs principales maximes est que les vecteurs doivent être traités *vectoriellement*.

Or un fait remarquable est que les règles de Hamilton conduisent à des produits dans lesquels le mode d'association des facteurs est indifférent, c'est-à-dire où :

$$(AB)C = A(BC);$$

tandis que les règles de l'Analyse des vecteurs conduisent à des produits dans lesquels la manière d'associer les facteurs joue un rôle essentiel¹.

Comment peut-on concilier ces systèmes rivaux? En premier lieu, on remarque que les règles de l'Analyse des vecteurs acquièrent la propriété associative par l'introduction de $\sqrt{-1}$ dans les six dernières. Cette modification change lesdites règles en les suivantes :

$$\begin{array}{lll} i^2 = +1 & j^2 = +1 & k^2 = +1 \\ ij = \sqrt{-1} k & jk = \sqrt{-1} i & ki = \sqrt{-1} j \\ ji = -\sqrt{-1} k & kj = -\sqrt{-1} i & ik = -\sqrt{-1} j \end{array}$$

1. Par exemple, avec ces règles on a, d'une part :
(ji) $i = -ki = -j$

et d'autre part :

$$j(i i) = j i^2 = j$$

On ne peut donc pas poser :

$$(ji) i = j(i i).$$

En second lieu, on observe que les règles de Hamilton supposent que l'on suit un ordre de droite à gauche, inverse de l'ordre naturel de l'écriture; et que, si l'on change cet ordre en celui de gauche à droite, les dites règles deviennent :

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & j^2 = -1 & k^2 = -1 \\ ij = -k & jk = -i & ki = -j \\ ji = k & kj = i & ik = j \end{array}$$

Mais les symboles i, j, k de Hamilton sont des unités imaginaires, équivalentes respectivement à $\sqrt{-1} i, \sqrt{-1} j, \sqrt{-1} k$, si i, j, k désignent maintenant des vecteurs-unités purs et simples. En conséquence, les règles de Hamilton, ramenées à l'ordre naturel, deviennent :

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} i \sqrt{-1} i &= -1, \\ \sqrt{-1} j \sqrt{-1} j &= -1, \\ \sqrt{-1} k \sqrt{-1} k &= -1, \\ (\sqrt{-1} i) (\sqrt{-1} j) &= -\sqrt{-1} k, \\ (\sqrt{-1} j) (\sqrt{-1} k) &= -\sqrt{-1} i, \\ (\sqrt{-1} k) (\sqrt{-1} i) &= -\sqrt{-1} j, \\ (\sqrt{-1} j) (\sqrt{-1} i) &= \sqrt{-1} k, \\ (\sqrt{-1} k) (\sqrt{-1} j) &= \sqrt{-1} i, \\ (\sqrt{-1} i) (\sqrt{-1} k) &= \sqrt{-1} j. \end{aligned}$$

Ces règles sont en parfaite harmonie avec les règles corrigées de l'Analyse des vecteurs, car elles deviennent identiques à celles-ci, quand on supprime $\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$ d'un côté, et le signe — équivalent de l'autre côté. Les premières concernent des vecteurs réels et sont de nature hyperbo-

lique; les dernières concernent des vecteurs imaginaires et sont de nature circulaire.

La signification des règles de calcul des Quaternions a été discutée, mais pas aussi complètement que le réclame leur importance philosophique et scientifique. De leur nature, ce sont évidemment des règles de réduction. Dans l'Algèbre ordinaire, il y a deux principales règles de réduction, à savoir :

$$x - x = 0, x : x = 1$$

Dans l'Algèbre de l'espace, la quantité fondamentale est un vecteur; désignons-le par X ; les précédentes règles de réduction :

$$X - X = 0, X : X = 1$$

subsistent, à condition toutefois que les deux X ne soient séparés par aucun autre symbole de vecteur. Par suite, dans l'Algèbre de l'espace, nous n'avons pas seulement $i : i = 1$, mais $i^2 = 1$. Ces deux principes sont évidemment d'espèce très différente; le premier concorde avec nos idées sur les dimensions, tandis que le second ne concorde pas. La première réduction est de sa nature plus absolue et apparaît légitime à tout moment du calcul, tandis que la seconde n'est légitime qu'à la fin. Si l'axe i est variable, la réduction $i^2 = 1$ ne peut être introduite avant l'achèvement des différentiations.

Les règles de la forme $ij = k$ sont aussi de la nature des réductions. Dans quel sens le produit de deux axes rectangulaires i et j est-il égal au troisième axe perpendiculaire aux deux premiers? Hamilton chercha à justifier

cela par une sorte d'argument métaphysique. L'explication ne réside pas à la surface des choses, mais requiert une étude approfondie de l'Analyse. Au lieu d'étudier le phénomène en coordonnées rectangulaires, voyons comment il se présente en coordonnées polaires. Alors $e^{b\sqrt{-1}}$ est l'expression algébrique bien connue pour un angle circulaire d'amplitude b . Introduisons la lettre β pour spécifier le plan; alors $e^{b\sqrt{-1}\beta}$ est l'expression d'un angle sphérique d'amplitude b dans le plan qui a β pour axe. Le logarithme de cet angle est $b\sqrt{-1}\beta$, c'est-à-dire un vecteur imaginaire ou sphérique. Soit b_0 un multiplicateur; alors $b_0 e^{b\sqrt{-1}\beta}$ est l'expression polaire d'un quaternion: car b_0 désigne le tenseur et $e^{b\sqrt{-1}\beta}$ le verseur.

Cette expression d'un quaternion montre très clairement le rapport de la méthode des quaternions à l'Algèbre des quantités complexes, et elle indique aussi la voie dans laquelle un calcul géométrique plus général pourrait être développé. D'un côté, négligeons β ou supposons-le constant, nous avons alors $b_0 e^{b\sqrt{-1}}$, qui est l'expression polaire d'une quantité complexe de l'Algèbre ordinaire. D'autre part, si nous modifions l'axe $\sqrt{-1}\beta$ et le module b_0 , nous allons trouver les expressions des quaternions ellipsoïdaux et hyperboloïdaux. Dans le cas de la sphère, l'axe est :

$$\sqrt{-1} (\cos \theta . i + \sin \theta \cos \varphi . j + \sin \theta \sin \varphi . k)$$

et le module a la forme $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dans le cas de l'ellipsoïde, l'axe est :

$$\sqrt{-1} (\cos \theta . i + \lambda \sin \theta \cos \varphi . j + \lambda' \sin \theta \sin \varphi . k)$$

et le module est de la forme $\sqrt{x^2 + \left(\frac{y}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda'}\right)^2}$. Ici on emploie λ et λ' pour désigner les rapports des axes y et z de l'ellipsoïde aux axes correspondants de la sphère. Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, l'axe est :

$$\cosh \theta. i + \sqrt{-1} \sinh \theta (\cos \varphi. j + \sin \varphi. k)$$

et le module est de la forme $\sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$. Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, l'axe est :

$$\sqrt{-1} \sinh \theta. i + \cosh \theta (\cos \varphi. j + \sin \varphi. k)$$

et le module est de la forme $\sqrt{-x^2 + y^2 + z^2}$.

Ces expressions montrent en même temps le rapport du Calcul géométrique à la Géométrie cartésienne à trois dimensions. Le Calcul géométrique, étant une méthode générale, embrasse ou absorbe la Géométrie cartésienne; et une de ses supériorités évidentes consiste en ce qu'il fournit une expression pour le vecteur lui-même.

Soit ψ un axe de l'une des espèces énumérées plus haut. Si $\sqrt{-1}$ est en facteur commun, alors $\psi^2 = -1$; sinon, $\psi^2 = +1$. Cette règle de réduction est vraie, même si la longueur de ψ n'est pas l'unité, pourvu seulement que ψ soit un axe, c'est-à-dire un rayon vecteur de la courbe-unité. Les rayons du cercle-unité sont tous égaux, mais non les rayons d'une ellipse-unité de forme donnée, ou ceux de l'hyperbole-équilatère-unité.

Le calcul généralisé jette aussi une vive lumière sur les autres principes de réduction, en particulier sur celui qui a la forme $ij = k$. Il montre que le sens de cette égalité est

que le produit de deux axes conjugués quelconques se réduit à l'axe conjugué de leur plan. Dans le cas de la sphère, chaque ensemble d'axes conjugués forme un système orthogonal: c'est parce qu'ils sont conjugués, non parce qu'ils sont orthogonaux, que $ij=k$.

Le Calcul géométrique éclaire ce qu'on appelle les lois fondamentales de l'Algèbre. Plus d'un mathématicien a essayé de fonder la science de l'Algèbre sur les trois lois commutative, associative et distributive. Soient a, b, c, d , etc., des nombres entiers; alors

$$a + b = b + a \quad \text{et} \quad ab = ba$$

expriment cette propriété des nombres d'après laquelle l'ordre des termes d'une somme ou des facteurs d'un produit est indifférent: c'est ce qu'on appelle la loi commutative. De même,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{et} \quad (ab)c = a(bc)$$

expriment cette propriété des nombres d'après laquelle le résultat est indépendant de l'ordre des opérations; c'est ce qu'on appelle la loi associative. Enfin,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

exprime cette propriété des nombres d'après laquelle le produit de plusieurs sommes est égal à la somme des produits partiels: c'est ce qu'on appelle la loi distributive. Ce sont des propriétés générales des nombres entiers, mais les symboles fondamentaux de l'Algèbre ne peuvent pas être restreints à cette signification. Le procédé ordinaire

rement suivi consiste à dire : Supposons l'Algèbre confinée dans l'étude de ce qui possède propriétés, et prenons ces propriétés comme règles fondamentales de la science. Les symboles de l'Algèbre plane présentent aussi ces propriétés, parce que les angles considérés ont tous le même axe. Mais, en sortant du plan et en traitant des angles dans l'espace, on a trouvé qu'il s'introduit un ordre réel dans les facteurs d'un produit, de sorte que, A et B désignant des vecteurs, AB n'est pas en général équivalent à BA. En conséquence, comme Hamilton et Grassmann l'ont tous deux trouvé, l'Algèbre de l'espace exige que l'on rejette la loi commutative, en tant que l'on considère un produit de vecteurs. On suppose généralement que là est la seule différence entre les principes fondamentaux de l'Algèbre et du Calcul géométrique; mais tel n'est pas le cas. Un poète a dit : « L'ordre est la première loi du ciel'. » C'est en tout cas la première loi du calcul géométrique.

Puisque l'ordre des facteurs d'un produit de vecteurs doit en général être respecté, il est extrêmement improbable que l'ordre des termes d'une somme de vecteurs puisse toujours être changé sans que cela change le sens de l'expression. Quand nous écrivons

$$R = ix + jy + kz,$$

il est vrai que les composants ix , jy , kz sont indépendants de l'ordre, et que, en général, les composants arbitraires d'un vecteur sont indépendants de l'ordre. Mais considé-

1. « Order is Heaven's first law. » (POPE, *Épître IV*, v, 49.)

rons une expression telle que e^{B+C} , où l'on a écrit B pour $b\sqrt{-1}\beta$ et C pour $c\sqrt{-1}\gamma$. Ici nous avons une somme de vecteurs, et l'ordre de $B+C$ ne doit pas être troublé, car $e^{B+C} = e^B e^C$, et, en vertu du principe de non-commutativité du produit, $e^B e^C$ n'est pas égal à $e^C e^B$, de sorte que e^{B+C} n'est pas égal à e^{C+B} .

Le principe dont il est ici question n'est pas autre chose que la vraie généralisation pour l'espace du théorème relatif à l'exponentielle. Dans l'Algèbre ordinaire, on a :

$$e^b \times e^c = e^{b+c},$$

et dans l'Algèbre des quantités complexes :

$$e^{b\sqrt{-1}} \times e^{c\sqrt{-1}} = e^{(b+c)\sqrt{-1}};$$

la question est de savoir si, dans l'Algèbre de l'espace, on a :

$$e^{b\sqrt{-1}\beta} \times e^{c\sqrt{-1}\gamma} = e^{b\sqrt{-1}\beta + c\sqrt{-1}\gamma},$$

c'est-à-dire si l'on a :

$$e^B \times e^C = e^{B+C},$$

en posant

$$B = b\sqrt{-1}\beta,$$

$$C = c\sqrt{-1}\gamma.$$

Selon Hamilton, la réponse est : non. Mais il aboutit à cette conclusion en admettant que :

$$(B+C)^2 = B^2 + BC + CB + C^2$$

où il faut observer que l'ordre naturel qui place B avant C est interverti dans l'un des produits partiels. Quand l'ordre naturel est respecté, le carré est

$$B^2 + 2BC + C^2,$$

et en conséquence :

$$e^{B+C} = e^B e^C.$$

De ces considérations il découle avec évidence que la troisième loi fondamentale de l'Algèbre (la loi distributive) doit être modifiée dans l'Algèbre de l'espace ; car nous avons vu que le carré de la somme de deux logarithmes, $B + C$, n'est pas formé par simple application de la loi distributive au produit de $B + C$ par $B + C$: il faut prendre soin que l'ordre naturel des vecteurs soit respecté¹.

Il paraît que la seconde loi fondamentale de l'Algèbre (la loi associative) vaut universellement dans l'Algèbre de l'espace. Hamilton eut beaucoup de peine à l'établir pour les quaternions sphériques ; elle subsiste aussi pour les quaternions ellipsoïdaux et hyperboloïdaux. Comme conséquence de la nécessité de conserver l'ordre relatif des facteurs d'un produit ou des termes d'une somme d'indices, il faut modifier les règles de réduction. Ainsi :

$$A + B - B = A$$

1. Par l'ordre naturel des vecteurs, j'entends l'ordre naturel des angles sphériques dont les vecteurs sont les logarithmes. B est le logarithme du premier angle, C le logarithme du second angle, et cet ordre se représente en écrivant C à la droite de B . Ce que je soutiens, c'est que cet ordre de C à la droite de B doit être encore conservé dans les deux termes moyens du développement de $(B+C)^2$. Si l'on essaie de développer $(B+C)^2$ en supposant qu'il y a un facteur $(B+C)$ qui est antérieur à l'autre facteur $(B+C)$, et qu'on représente cela en écrivant le premier à la gauche du second, on introduit un ordre artificiel des facteurs. Cet ordre artificiel ne peut être observé dans le développement qu'en sacrifiant l'ordre naturel des angles. Je soutiens que l'ordre naturel des angles doit être conservé, et que $(B+C)^2$ ne signifie pas $(B+C)(B+C)$, mais au contraire $B^2 + 2BC + C^2$.

J'ai discuté ce principe tout au long dans mon article sur *The fundamental theorems of analysis generalized for space* (1892), et je l'ai appliqué dans cet article et dans les suivants : *Papers on space-analysis* (New-York, Lemcke et Buchner, 1894).

mais :

$$B + A - B \neq A;$$

De même :

$$AB \frac{1}{B} = A,$$

mais :

$$\frac{1}{B}AB \neq A.$$

Dans la théorie de la connaissance, la grande question philosophique n'est pas : « Comment passe-t-on du général au particulier? » mais « Comment passe-t-on du particulier au général? » L'application des principes généraux est assez claire; la difficulté consiste à expliquer comment nous arrivons à la vérité des principes généraux. Le philosophe qui cherche à élucider cette question est porté à se tourner vers les sciences exactes, et spécialement vers l'Algèbre, qui est la branche la plus parfaite des sciences exactes. Il trouvera que plus d'un algébriste lui offre ce qu'on appelle « le principe de la permanence des formes opératoires ». Ce principe consiste en ceci : Nous trouvons que certains théorèmes sont vrais quand les symboles représentent des nombres entiers; posons ces théorèmes comme vrais sans restriction, et cherchons les différentes interprétations que nous pouvons alors donner des symboles. En conséquence, tout l'édifice de l'Algèbre repose sur une obscure base symbolique. Voici maintenant ce que je conçois comme la véritable attitude philosophique : Nous trouvons que certains théorèmes sont vrais quand les symboles désignent des nombres; comment et jusqu'où le concept de nombre peut-il être généralisé, pour que ces théorèmes

restent vrais sans aucune altération de forme? et si l'on veut généraliser encore plus le concept de nombre, quelle est la forme modifiée que les théorèmes prennent alors? Tel est le procédé logique de généralisation.

Les deux méthodes peuvent être illustrées par leur application à la formule du binome, antérieurement établie dans le cas d'un exposant entier et positif. Selon le procédé d'extension conventionnelle, on pose :

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \dots$$

comme un théorème d'Algèbre symbolique, que la série soit finie ou infinie; et il ne reste plus qu'à trouver les différentes manières de l'interpréter. C'est une convention plutôt qu'un théorème, et elle a une base plutôt verbale que réelle. Le vrai procédé de généralisation est tout différent : il avance par degrés, et les démarches en sont semblables à celles d'un pionnier cherchant une route nouvelle. Par exemple, on se demande : « La série du binome conservera-t-elle la même forme quand n est généralisé de manière à comprendre une fraction rationnelle quelconque? » Voilà une des questions que NEWTON se proposa, et qu'il résolut par l'affirmative; on sait qu'il vérifia la justesse de sa conclusion en effectuant le carré du développement en série de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Le procédé de généralisation consiste essentiellement à former des hypothèses, à trouver des critères qui permettent de découvrir l'hypothèse vraie, et à vérifier par des applications l'hypothèse admise. C'est dans le dévelop-

pement de l'Algèbre que le philosophe peut voir le mieux à l'œuvre ce procédé de généralisation.

Quand on généralise les symboles de l'Algèbre par l'introduction d'un axe constant, on obtient l'extension de l'Algèbre au plan, ou l'Algèbre des quantités complexes; les règles et théorèmes fondamentaux demeurent alors inaltérés. Quand on généralise davantage encore les symboles de l'Algèbre par l'introduction d'un axe variable, on obtient l'extension de l'Algèbre à l'espace; les règles et théorèmes fondamentaux demeurent inaltérés dans leur forme, mais à condition d'introduire cette clause que l'ordre relatif des symboles doit être respecté. Par exemple, dans l'Algèbre ordinaire, il y a deux manières-types d'écrire la seconde puissance de $(a + b + c)$ à savoir :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$

et :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Dans la première de ces formules on a suivi l'ordre circulaire; dans la seconde, l'ordre des termes de la somme. Or, dans l'Algèbre de l'espace, c'est la dernière formule seule qui est correcte. Prenons par exemple la formule du binôme. Soient A et B deux vecteurs. On a :

$$(A + B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}B^2 + \dots$$

Dans chaque terme de ce développement la puissance de A doit toujours être écrite avant la puissance de B, parce que A est le logarithme du premier angle et B le logarithme

du second, et que l'ordre des angles doit être conservé partout. Prenons encore le théorème fondamental du Calcul différentiel : le théorème de Taylor. Dans le Calcul géométrique, c'est :

$$f(A + B) = f(A) + f'(A) B + f''(A) \cdot \frac{B^2}{2!} + \dots$$

développement de même forme qu'en Algèbre simple ; seulement l'ordre d'après lequel A précède B doit être respecté. En ce qui regarde le théorème relatif à l'exponentielle, nous avons vu que $e^A e^B = e^{A+B}$, pourvu que l'ordre d'après lequel A précède B soit respecté. Concluons que le vrai Calcul géométrique dérive de l'Algèbre ordinaire par un procédé de généralisation logique, et que ses théorèmes sont de même forme, sauf seulement qu'il faut faire attention à l'ordre relatif des symboles vectoriels.



DE LA COMPARABILITÉ DES DIVERS ESPACES

Par GEORGES LECHALAS,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées à Rouen.

Les formules de la Métagéométrie, ou de la Géométrie générale, selon une expression que nous préférons, contiennent un paramètre caractéristique de chaque espace particulier : aux valeurs positives de ce paramètre correspond la Géométrie de Riemann, aux valeurs négatives celle de Lobatchevsky. Quant à la Géométrie euclidienne, on l'obtient en prenant un paramètre infini. Il résulte de là que, tandis qu'il n'y a essentiellement qu'un espace euclidien, comme il n'y a qu'un plan euclidien, on est naturellement amené à parler d'espaces différents de Riemann et de Lobatchevsky, de même que, dans la Géométrie euclidienne, on distingue des sphères différentes, dont les géométries sont en soi identiques, mais qui se distinguent par un paramètre figurant dans leurs formules, si l'on suppose toutes les grandeurs rapportées à une même unité. Aussi les ouvrages traitant des Géométries non-euclidiennes parlent-ils très fréquemment au pluriel des espaces et des plans

de Riemann, comme de ceux de Lobatchevsky, tandis que espace et plan d'Euclide ne figurent qu'au singulier.

Nous avons fait remarquer, dans notre *Étude sur l'espace et le temps*¹, que cette distinction de plusieurs espaces de même espèce suppose qu'on les envisage comme inclus dans un même espace d'ordre supérieur, c'est-à-dire dans un espace à quatre dimensions, absolument comme des sphères ne sont discernables que si on les considère dans un même espace à trois dimensions. Deux sphères ne diffèrent en effet que par l'inégalité de deux lignes homologues, deux arcs d'un degré par exemple, et la comparaison de ces deux arcs ne peut se faire si les deux sphères restent isolées, sans relation l'une avec l'autre. Ainsi en est-il des espaces de Riemann et de Lobatchevsky, qui, au lieu de former deux classes d'espaces, doivent être considérés comme deux espaces uniques, si l'on ne peut inclure divers espaces de même nature dans un espace à quatre dimensions. Il conviendrait alors de s'en tenir aux notations de Lobatchevsky, qui prenait le paramètre pour unité, tandis que Bolyaï, en mettant ce paramètre en évidence, affirmait la possibilité de distinguer les espaces correspondant à ses diverses valeurs.

Avant d'aborder la discussion au fond des difficultés qui ont été soulevées à ce sujet, nous voudrions écarter une question de terminologie. On a dit qu'un *espace* ne peut pas être contenu dans un autre espace, car il est nécessaire-

1. Un vol. in-12, Paris, Alcan, 1896.

2. Nous verrons plus loin que M. MANSION a cherché à réfuter ces assertions.

ment complet en soi et doit, par essence, tout embrasser; dès lors, deux espaces ne sauraient coexister, et, dans un espace, aucune figure ne devrait être appelée elle-même un espace. Assurément, les définitions de mots sont libres; mais il faut bien se garder de prétendre exclure de la science ce qui ne rentre pas dans les définitions qu'on a posées. En l'espèce, nous voyons bien comment on a été amené à cette notion restrictive du mot « espace » : elle est dérivée de l'expérience, qui nous montre toutes les figures enfermées dans un espace à trois dimensions, en dehors duquel il n'y a rien; la Métagéométrie a ensuite appris à concevoir la possibilité d'autres espaces à trois dimensions ou à un plus grand nombre de dimensions, mais nos contradicteurs limitent l'application de ce terme, dans chaque cas, à la *variété* ou *diversité* (*manifold*) qui enveloppe toutes les autres variétés considérées. Rien de plus légitime qu'une telle convention; mais cette signification du mot « espace » n'a qu'une valeur toute relative, car alors une variété spatiale donnée est ou n'est pas un espace, selon qu'on la considère comme n'étant pas ou comme étant au contraire incluse dans une variété d'ordre supérieur. Or cette alternative ne repose sur aucun caractère intrinsèque de la variété considérée, et qualifier d'*espace* une certaine variété équivaut simplement à l'engagement de ne pas l'envisager dans une variété d'ordre supérieur qui l'envelopperait. Dans une étude déterminée, on peut ainsi limiter le champ à parcourir; mais cette limitation est purement arbitraire, et l'on ne saurait l'imposer à qui ne l'accepte

pas, car toujours on a le droit d'inclure une variété donnée dans une variété d'ordre supérieur, où elle devient, si l'on veut, une simple figure. Il suffirait donc de n'employer jamais le mot « espace » pour échapper aux critiques verbales dont nous parlons.

Appliquons cette discussion à un exemple. Un cercle est une variété à une dimension, qui sera un espace à une dimension si je ne le considère qu'en lui-même; mais il n'est plus qu'une figure si je le considère comme compris dans une variété à deux dimensions, telle qu'un plan ou une sphère. De même, si je m'arrête là, le plan ou la sphère sera un espace, mais retombera au rang de simple figure si je l'inclus dans une variété à trois dimensions, et l'on pourrait poursuivre ainsi indéfiniment.

Cela étant, on voit combien le sens limitatif du terme « espace », si légitime qu'il soit, est dénué de valeur scientifique ou philosophique : il ne sert qu'à marquer un point d'arrêt purement arbitraire; aussi demanderons-nous la permission de conférer à ce terme, d'un usage si commode, une généralité plus grande et de le considérer comme synonyme de l'expression complexe « variété spatiale », qu'il suffira de lui substituer mentalement pour faire évanouir les critiques d'ordre purement verbal auxquelles notre discussion sera exposée.

Ceci bien entendu, considérons un cercle, espace à une dimension. Envisagé ainsi en lui-même, il peut donner naissance à une géométrie assez rudimentaire, mais qui serait loin d'être nulle, car on peut y considérer des systèmes

d'arcs et de points infiniment variés; le champ de notre étude s'élargit singulièrement si nous le plaçons sur une surface, espace à deux dimensions. Cette surface étant supposée un plan euclidien, nous pouvons établir toute la géométrie du IV^e livre; mais, si cette surface est une sphère, nous voyons apparaître des propriétés toutes nouvelles : c'est ainsi que le cercle y a deux centres, au lieu d'un, les distances étant naturellement mesurées suivant les géodésiques de la sphère. Si d'ailleurs il est grand cercle sur celle-ci, ses deux rayons deviennent égaux, et en même temps apparaissent deux faits de grande importance : d'une part, il est géodésique de la sphère, c'est-à-dire que deux de ses points suffisent à l'y déterminer, et qu'il est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points; d'autre part, il est retournable, c'est-à-dire que, étant donné l'un quelconque de ses arcs, on peut amener l'une des moitiés de celui-ci en coïncidence avec l'autre, *par un mouvement ne la faisant pas sortir de la sphère*. Le cercle ne jouit d'aucune de ces propriétés sur le plan : notamment, pour obtenir le retournement, il faudrait retourner le plan lui-même par un mouvement dans un espace à trois dimensions, ou faire sortir le cercle du plan pour le retourner dans ce même espace.

Si maintenant nous envisageons une sphère, il y a lieu de l'étudier d'abord en elle-même, abstraction faite de tout espace à trois dimensions dans lequel elle serait située, et nous établirons ainsi la géométrie propre de la sphère, surface finie et *isogène*, selon l'expression de Delbœuf, ou identique à elle-même, selon celle de Calinon. Considérée

comme placée dans un espace à trois dimensions satisfaisant au postulatum d'Euclide, cette sphère aura tous ses points à la même distance d'un centre unique, les distances étant mesurées suivant les géodésiques de l'espace en question, c'est-à-dire suivant les lignes droites euclidiennes. Pas n'est besoin d'ajouter que la sphère n'est aucunement retournable dans cet espace.

Mais nous pouvons concevoir des espaces à trois dimensions ne satisfaisant pas au postulatum d'Euclide et ayant des cercles pour géodésiques; il suffit, pour obtenir de tels espaces, de se placer dans un espace euclidien à quatre dimensions et d'y poser une équation identique à celle de la sphère, mais avec une variable en plus. Cet espace à trois dimensions comprendra des sphères de tout rayon inférieur ou égal à celui de la sphère obtenue en coupant ledit espace par un espace euclidien à trois dimensions passant par son centre¹. Cette sphère est une *grande sphère* pour cet espace *sphérique*, et, comme un grand cercle sur une sphère, elle y est retournable, tandis que les petites sphères ne jouissent pas de cette propriété. Toutes ces sphères d'ailleurs, en même temps qu'elles ont un centre unique si on envisage chacune d'elles dans l'espace euclidien à trois dimensions dont elle est l'intersection avec l'espace sphérique considéré, en ont deux dans ledit espace sphérique, et les deux rayons correspondants sont égaux quand il s'agit d'une grande sphère. Dans tous les cas, les

1. L'équation de l'espace en question étant $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = R^2$, un tel espace euclidien est donné, par exemple, par l'équation $x = 0$.

rayons sont naturellement des géodésiques de l'espace dans lequel on considère la sphère, lignes droites euclidiennes ou cercles selon le cas.

Ces propriétés dans l'espace sphérique, que nous avons établies analytiquement dans un article publié par les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*¹, sont identiques à celles des plans de Riemann, du moins quand on considère une grande sphère, les petites sphères ayant les propriétés des sphères de Riemann. Ainsi donc, non seulement, comme nul ne l'ignore, les plans de Riemann ont la trigonométrie des sphères d'Euclide, c'est-à-dire qu'ils ont même géométrie propre, mais de plus ces sphères, quand on les envisage dans un espace sphérique à trois dimensions ayant mêmes géodésiques, y jouissent de toutes les propriétés que présentent les plans de Riemann dans l'espace à trois dimensions de ce géomètre.

Dès lors, nous demandons quelle raison on peut avoir pour refuser l'identification de deux systèmes géométriques qui apparaissent comme si absolument indiscernables. M. MANSION, l'éminent professeur de l'Université de Gand, qui a bien voulu répondre à notre étude précitée², s'exprime à ce sujet dans les termes suivants³, après avoir déclaré nos calculs irréprochables :

« Nous ne pouvons, dit-il, admettre cette proposition de

1. Année 1896, t. XX, 2^e partie, p. 167.

2. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1896, t. XX, 2^e partie, p. 178.

3. Nous supprimons, dans cette citation, ce qui concerne la Géométrie de Lobatchevsky, dont nous n'avons pas encore parlé et qui donne lieu à un peu plus de difficultés.

M. Lechallas (que le plan riemannien est identique à une sphère d'Euclide), à moins qu'elle ne se réduise à une tautologie. — En effet, la définition d'une circonférence, d'une sphère, d'un espace sphérique d'Euclide *implique* la considération du centre de cette circonférence, de cette sphère ou de cet espace sphérique, la distance de ce centre aux points de ces diverses figures étant comptée suivant des circonférences. Or la droite riemannienne, le plan riemannien, l'espace riemannien ont deux centres, symétriques par rapport à ces figures : les distances de ces centres aux points de ces figures sont comptées sur des droites riemanniennes, comme les distances considérées dans la géométrie propre de ces figures. Ces propriétés sont différentes de celles des figures correspondantes d'Euclide, si on les considère avec leur centre, et alors la proposition de M. Lechallas nous semble inexacte. »

Arrêtons-nous un peu ici. Si nous voulons bien saisir l'objection de M. MANSION et nous convaincre de son inefficacité, il nous suffira de remarquer qu'elle permettrait aussi bien de nier l'identité d'une circonférence *plane* et d'une circonférence *sphérique*; nous pouvons en effet reproduire exactement son argumentation : « La définition d'une circonférence plane, dirons-nous, implique la considération du centre de cette circonférence, la distance de ce centre aux points de la circonférence étant comptée suivant des lignes droites. Or la circonférence sphérique a deux centres (symétriques s'il s'agit d'un grand cercle), et les distances de ces centres aux points de la circonférence sont comptées

sur des grands cercles. Les propriétés sont différentes de celles de la circonférence plane, et par suite il est faux que ces deux figures soient identiques. »

Les deux argumentations ont exactement la même valeur ; or, sans entrer dans la discussion de leur vice logique, qui ne voit, pour la seconde, qu'elle ne peut rien prouver, puisque ces deux figures, dont on nie l'identité, n'en font qu'une, au sens le plus absolu du mot : elles sont, ou plutôt elle est l'intersection d'une sphère et d'un plan. Or il en est précisément de même de notre sphère euclidienne et de ce que nous disons être un plan riemannien : ces deux figures n'en font qu'une, étant l'intersection d'un espace à trois dimensions euclidien et d'un espace à trois dimensions sphérique.

M. MANSION poursuit ainsi : « Si, au contraire, on considère ces figures sans leur centre, elle » (notre proposition) « revient à cette identité : La géométrie du plan et de l'espace de Riemann est la même que celle de la sphère et de l'espace sphérique d'Euclide, pourvu que, dans cette dernière géométrie, on mesure les distances sur certaines lignes tracées sur la sphère ou dans l'espace sphérique, ces lignes ayant dans cet espace les mêmes propriétés que les droites de Riemann. En réalité dans ce cas aucune propriété justifiant l'emploi des mots *d'Euclide* n'intervient dans la définition de la sphère ou de l'espace sphérique considéré ; au contraire, par définition, cette sphère et cet espace sphérique sont le plan et l'espace de Riemann. — En résumé, conclut M. MANSION, le plan riemannien peut être considéré

comme identique à la sphère euclidienne, si l'on n'étudie que les propriétés intrinsèques de ces surfaces; mais par le fait qu'on les qualifie d'euclidienne et de riemannienne, on leur attribue des propriétés extrinsèques qui les différencient. »

Dire qu'aucune propriété ne justifie l'emploi des mots d'*Euclide*, c'est oublier que nous nous sommes placé dès l'abord dans un espace à quatre dimensions euclidien, jouissant de toutes les propriétés caractérisant le système du géomètre grec, et que c'est dans cet espace que nous avons pris nos sphères et nos espaces sphériques. A lire, d'autre part, la phrase finale de notre contradicteur, on se demande si, au fond, l'accord n'est pas complet entre nous : qu'est-ce qu'une propriété extrinsèque, sinon une propriété par rapport à un objet extérieur? Or nous avons précisément dit : une même sphère, envisagée dans ses relations avec deux espaces différents dont elle est l'intersection, jouit, d'une part, des propriétés des sphères d'Euclide et, d'autre part, de celles des plans de Riemann. Il est bien clair d'ailleurs que le centre ou les centres font partie de ces propriétés extrinsèques, puisqu'ils ne sont point sur la sphère, et que même le centre euclidien est en dehors de l'espace sphérique ou riemannien et les centres riemanniens en dehors de l'espace euclidien à trois dimensions.

Nous nous sommes abstenu jusqu'ici de parler des espaces de Lobatchevsky, parce qu'ils donnent lieu à une difficulté nouvelle : ils ne peuvent être introduits dans un espace euclidien d'ordre supérieur, et par suite on ne peut

les obtenir, comme les espaces de Riemann, en partant d'un espace d'Euclide. Pour bien faire comprendre ce qui va suivre, nous allons préciser sommairement la notion de *courbure* des surfaces, telle qu'elle apparaît en Géométrie générale.

Sans entrer ici dans les détails que nous avons rappelés dans un article de la *Revue de Métaphysique et de Morale*¹, nous ferons remarquer que la définition de la courbure par le produit des rayons de courbure principaux s'appuie sur une propriété extrinsèque, ces rayons étant construits dans un espace spécial à trois dimensions, tandis qu'il nous faut avoir une propriété intrinsèque de la surface, c'est-à-dire indépendante de tout espace dans lequel on l'envisagerait. Il faut donc généraliser la notion de courbure, et c'est ce que permet de faire un théorème dû à Gauss : « La courbure intégrale d'un triangle formé sur une surface continue quelconque par trois lignes géodésiques est égale à la somme des angles de ce triangle diminuée de deux droits ». D'où il résulte que la courbure en un point quelconque est égale au quotient de l'excès angulaire d'un triangle infinitésimal par la surface de ce triangle; si la surface est à courbure constante, on pourra prendre un triangle fini quelconque pour le calcul de cette courbure. Il est loisible d'ailleurs de substituer à celui-ci un polygone ou une courbe convexe fermée quelconque, à la condition de prendre l'excès, changé de signe, sur quatre droits de la somme des

1. *La courbure et la distance en Géométrie générale*, ap. *Revue*..., t. III, p. 194 (mars 1896).

angles extérieurs du polygone ou de l'intégrale des angles extérieurs des tangentes géodésiques.

Tandis que la définition ordinaire ne comporte de courbures négatives que pour des surfaces dont les rayons principaux sont dirigés en sens contraires, on conçoit ici que la notion de courbure négative est en soi indépendante de cet ordre de considérations. Il est bien vrai que toutes les surfaces de la Géométrie euclidienne ont des rayons de courbure, et que la concordance entre les deux définitions entraîne que l'excès angulaire n'y est négatif que lorsque les rayons principaux sont de sens opposés; mais on peut concevoir *a priori* que certaines surfaces incapables d'entrer dans un espace euclidien aient une courbure négative sans avoir de rayons de courbure euclidiens. Or c'est précisément le cas des plans de Lobatchevsky.

On sait en effet que, sur ces plans, la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, et d'autre part il est impossible d'identifier à ces plans les pseudo-sphères euclidiennes comme nous avons identifié les plans de Riemann aux sphères d'Euclide, car les géométries propres de ces deux surfaces sont loin d'être identiques : les géodésiques des pseudo-sphères se coupent deux à deux un nombre infini de fois, et celles des plans de Lobatchevsky une seule fois; par deux points d'une pseudo-sphère, il passe une infinité de géodésiques, au lieu d'une géodésique unique, et enfin, si le déplacement d'une figure s'opère, en un sens, sans déformation sur une pseudo-sphère, cette propriété n'est pas absolue, car le déplacement peut faire naître

ou évanouir certaines intersections, ou seulement changer les points où elles se produisent et les angles qu'elles engendrent. Il est vrai qu'on fait disparaître ces différences en considérant une pseudo-sphère sur laquelle une infinité de feuilletts seraient enroulés, et en faisant abstraction des intersections résultant de la superposition des divers feuilletts : c'est ainsi qu'on peut considérer un cylindre de révolution comme ayant identiquement la géométrie du plan ; mais cet artifice ne saurait permettre de poser l'identité des surfaces.

Ceci bien compris, si nous considérons un espace à trois dimensions contenant un tel plan, c'est-à-dire une surface à courbure constante négative et retournable dans cet espace, nous trouvons que celui-ci contient toutes les surfaces à courbure constante algébriquement supérieure à celle de son plan, notamment la surface à courbure nulle et toutes celles qui ont une courbure positive. La première, ou *horisphère*, jouit de toutes les propriétés intrinsèques du plan euclidien, et les autres jouissent de celles des sphères euclidiennes ou riemanniennes ; mais toutes y sont dépourvues de retournabilité, et leurs géodésiques ne sont pas celles de l'espace où elles se trouvent. Tout change si nous considérons un espace lobatchevskien à quatre dimensions, dans lequel peuvent entrer des espaces à trois dimensions de courbure nulle ou positive, car, dans chacun de ces espaces, la surface ayant mêmes géodésiques y est retournable et jouit exactement de toutes les propriétés du plan d'Euclide ou des plans de Riemann, en sorte que l'horis-

sphère, par exemple, doit être reconnue comme identique au plan d'Euclide, absolument comme nous avons reconnu l'identité des sphères d'Euclide et des plans de Riemann. On peut d'ailleurs l'envisager comme étant l'intersection d'un espace lobatchevskien et d'un espace euclidien.

On remarquera que, si l'on part ainsi d'un espace à quatre dimensions de courbure négative, on obtient directement les trois géométries, qui apparaissent dans une unité dont le caractère philosophique nous paraît s'imposer; en face de cette unité, qui enferme en son sein l'infinie variété de tous les espaces à trois dimensions, la conception de trois espaces absolument étrangers l'un à l'autre semble étroite et artificielle. A défaut d'une comparaison entre les espaces d'espèces différentes, on s'était habitué à admettre du moins les deux séries des espaces à courbure positive et à courbure négative, et notre remarque, qu'il fallait renoncer à distinguer des espaces multiples de courbures de même signe, a paru émouvoir M. MANSION, qui a cherché à maintenir la notion d'espaces distingués par la valeur de leurs paramètres et a proposé dans ce but l'artifice suivant :

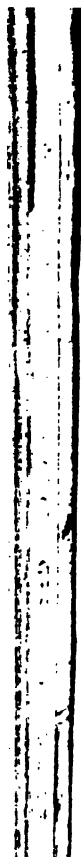
« Si l'on connaît b , longueur rapportée à une certaine unité, du côté d'un triangle rectangle isoscèle déterminé, dont on ignore s'il est euclidien, riemannien, ou lobatchevskien, on pourra supposer, avant toute mesure, que la longueur a de l'hypoténuse a n'importe quelle valeur égale, inférieure ou supérieure à $b\sqrt{2}$. Cela implique la possibilité de valeurs en nombre infini pour r et l^1 , mais non la pos-

1. Paramètres employés dans les formules riemanniennes et lobatchevskiennes.

sibilité de comparer des longueurs dans deux espaces différents. »

La réfutation nous paraît tenir dans cette simple question : Par rapport à quelle unité est mesuré le côté b ? Évidemment par rapport à une longueur prise dans l'espace considéré, et ce qui variera, ce sera la valeur du paramètre de ce même espace en fonction de l'unité choisie dans cet espace. En vain direz-vous : Mais je puis concevoir que, l'unité restant la même, le paramètre aurait eu une autre valeur. Qu'est-ce à dire : l'unité restant la même ? Cela signifie que vous supposez la possibilité de prendre deux unités égales dans deux espaces différents, ce qui est précisément contradictoire à votre thèse, car ce serait comparer deux longueurs dans des espaces différents. Sans cette faculté de comparaison que vous niez précisément, on ne peut faire que la distinction spécifique résultant de ce que a est égal, inférieur ou supérieur à $b\sqrt{2}$, c'est-à-dire poser la distinction de l'espace euclidien, de l'espace riemannien et de l'espace lobatchefskien.

Nous revenons ainsi à notre proposition primitive, et l'opposition des deux thèses apparaît entière : chacun peut apprécier, en l'absence de toute contestation sur l'exactitude des calculs, laquelle est la plus favorable à une conception philosophique de la Géométrie générale.



NOTE SUR L'INDUCTION ET LA GÉNÉRALISATION EN MATHÉMATIQUES

Par JACQUES HADAMARD,

Professeur suppléant au Collège de France.

On a depuis longtemps fait ressortir les ressemblances qui existent entre la marche suivie par l'esprit humain, dans la recherche des vérités scientifiques, qu'il s'agisse de questions mathématiques ou de questions expérimentales. Si, en effet, la démonstration des lois mathématiques procède par déduction, on sait qu'il en est très souvent autrement en ce qui regarde la recherche de ces mêmes lois. Dans une foule de circonstances, c'est bien par l'induction, par une généralisation hypothétique de résultats obtenus dans des cas déterminés, que l'on découvre la voie à suivre et les résultats qu'on devra s'efforcer de démontrer.

Que de telles généralisations puissent *a priori* être trompeuses, c'est ce qu'il est à peine utile de dire. Mais (et c'est le fait logique sur lequel je voudrais appeler l'attention) la remarque ainsi énoncée est incomplète. Non

seulement ces généralisations peuvent être trompeuses, c'est-à-dire qu'on ne voit pas de raisons pour qu'elles ne le soient pas; mais *il y a souvent des raisons pour qu'elles le soient*. C'est ce qui s'est manifesté à plusieurs reprises, au cours des recherches entreprises dans ces dernières années.

Les généralisations dont nous parlons ont, en effet, pour but de passer de l'étude de problèmes déjà résolus à celle de problèmes qui n'ont pas encore pu l'être. Or, dans la marche suivie par la science (du moins par la science mathématique), dans la plus ou moins grande rapidité avec laquelle les questions qu'elle se pose sont élucidées, on peut dire que le hasard n'a aucune part. Si telle question a pu être traitée et non telle autre, ou si, traitée dans un cas particulier, une question n'a pu l'être en général, c'est que le cas particulier diffère du cas général par des caractères essentiels, par des caractères affectant, pour le simplifier, le fond même des choses. Il y a, dès lors, de grandes chances pour qu'une circonstance déterminée, rencontrée dans l'étude du cas résolu, ne s'y soit présentée qu'en raison de ces caractères spéciaux.

Un exemple très net à cet égard est celui des équations différentielles réelles. M. POINCARÉ a étudié la disposition des trajectoires pour les équations du premier ordre et du premier degré : cette disposition est totalement différente de celle qui se présentait dans les cas que l'on avait su traiter jusqu'alors. En général, chaque trajectoire s'enroule une infinité de fois autour d'une certaine ligne fermée (dite *cycle limite*) : c'est ce qui n'arrivait nullement pour les

équations différentielles du premier ordre que l'on avait intégrées.

Une telle différence n'étonnera pas si l'on remarque que les équations que l'on peut intégrer doivent cette propriété à l'existence d'une intégrale connue, laquelle est nécessairement, soit une fonction uniforme, soit une fonction dont les valeurs se permutent suivant des lois relativement simples. C'est à cette circonstance toute particulière qu'est due la disposition exceptionnelle présentée alors par les trajectoires. Grâce à elle, l'étude des cas particuliers donne du cas général une idée aussi fausse que le serait celle qu'on aurait de l'ellipse par l'étude d'une ellipse indéfiniment aplatie suivant un segment de droite.

Dans d'autres recherches, relatives aux équations différentielles du second ordre, les choses se passent d'une manière toute semblable. Il en est encore ainsi dans certaines questions de la théorie des fonctions, telles que l'étude d'une fonction représentée par une série de Maclaurin, sur le cercle de convergence de cette série.

En un mot, au principe d'après lequel les questions analogues doivent admettre des réponses analogues, les exemples auxquels nous venons de faire allusion conduisent à opposer le suivant : *Étant donnés deux problèmes analogues, mais dont l'un a pu être traité et non l'autre, il y a lieu de penser que les résultats trouvés dans la solution du premier sont très différents de ceux que l'on doit obtenir dans la solution du second.*

Ce principe ne doit pas, évidemment, nous obliger à

renoncer aux services que peut rendre encore l'induction mathématique : elle limite seulement la portée de celle-ci.

Je n'ai pas à rechercher si le même principe intervient dans l'application de l'induction aux sciences expérimentales. Il est évident que là, les choses ne se passent plus entièrement de même, car le hasard est un bien plus grand maître pour l'expérimentateur que pour le mathématicien, et la possibilité ou l'impossibilité de résoudre une question déterminée dépend, dans un très grand nombre de cas, de circonstances accessoires. Il convient, toutefois, d'observer que les choses peuvent changer à cet égard à mesure que la science avance. C'est ce que montrent les exemples dont nous avons parlé, et dont le nombre et l'importance ont assurément augmenté dans ces dernières années.

EXPOSÉ DES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

Par R. BLONDLOT,

Correspondant de l'Institut, professeur à l'Université de Nancy.

Avant-propos.

Voici comment j'ai été conduit à écrire les pages qui suivent. Peu satisfait, comme tant d'autres, de la manière dont les principes de la Mécanique sont habituellement présentés, je me mis à lire, il y a une vingtaine d'années, un certain nombre d'ouvrages critiques sur cette matière, et en particulier le livre capital de M. MACH intitulé : « La Mécanique dans son développement, exposé historique et critique ¹. » Dans cet ouvrage, la critique du sujet est exposée de main de maître, avec une indépendance complète, même vis-à-vis des plus hautes autorités ; l'auteur insiste tout particulièrement sur la relativité des notions d'espace et de temps, regardées presque partout, plus ou moins implicitement, comme absolues.

Profitant de ces critiques de M. MACH et de celles de

1. *Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt* (Leipzig, Brockhaus, 1883).

quelques autres auteurs, ainsi que d'indications puisées dans leurs ouvrages, j'entrepris de construire une théorie de la Mécanique qui fût exempte des défauts que l'on reprochait aux anciennes. Après avoir soumis mon essai à plusieurs collègues d'une haute compétence, après l'avoir mis moi-même à l'épreuve dans mon enseignement, je me décidai, en 1895, à le faire autographier pour l'usage des étudiants en Physique.

C'est après cette longue élaboration que je me permets de le présenter au *Congrès international de Philosophie*, comme le développement de l'une des questions posées dans le programme de ce Congrès, sous la rubrique : Principes de la Mécanique, leur nature et leur valeur.

Que le lecteur ne s'attende pas à trouver dans le présent écrit une manière de voir opposée au fond à celle qui a cours, ou même totalement neuve ; loin de là, j'ai pris mon bien où je le trouvais (sans même indiquer les sources), et j'ai plutôt précisé qu'innové. J'espère toutefois que l'on ne jugera pas inutile d'avoir montré clairement, comme je crois l'avoir fait, quelle doit être la relation de la Mécanique théorique à la description des phénomènes naturels et à la science expérimentale.

Qu'il soit bien entendu que le système de Mécanique théorique que je propose dans ce mémoire ne s'impose aucunement. Par exemple, au lieu de faire dériver la notion de force de celle de masse, comme je l'ai fait à l'exemple de KIRCHHOFF, on pourrait faire l'inverse, selon l'usage régnant : cela aurait toutefois un inconvénient

grave, car, le système C. G. S. étant maintenant universellement en vigueur, c'est faire une sorte de cercle vicieux que de définir dans la théorie la masse à l'aide de la force, puis, dans l'application, l'unité de force à l'aide de l'unité de masse.

Principes de la Mécanique.

Le moyen d'obtenir une clarté complète est, suivant moi, de *séparer complètement* la Mécanique en *Mécanique théorique, conventionnelle et fictive*, et *Mécanique réelle ou positive*. A la Mécanique théorique, on ne demandera que d'être logique et cohérente; on la développera à l'aide de la déduction, en restant complètement dans la convention, et c'est seulement après coup que l'on s'occupera d'examiner comment et jusqu'à quel point la théorie ainsi construite pourra être utilisée dans la science de la nature ou dans les arts mécaniques.

Les fondements de la Mécanique théorique telle que je la conçois sont les suivants :

Les positions de tous les corps seront rapportées à un système *idéal* de repères :

Admettant la notion qualitative de temps, on imaginera un mobile se mouvant par rapport aux repères, sans s'arrêter; par définition, on appellera durée écoulée entre deux instants la longueur de trajectoire parcourue par le mobile pendant l'intervalle de ces deux instants. On a ainsi une horloge *conventionnelle*.

Un corps (fictif) infiniment petit, ou une portion infini-

ment petite d'un corps (fictif), porte le nom de point matériel. En même temps qu'il change de position, un point matériel peut tourner et se déformer, mais, par cela même qu'il est infiniment petit, sa position à chaque instant peut être donnée par un point géométrique; nous ne nous occuperons que de sa position, et non de la manière dont il peut tourner et se déformer.

Ceci posé, voici les principes proprement dits de la Mécanique (sous une forme analogue à celle que M. MACH a proposée) :

PREMIER PRINCIPE. — *Tout point matériel supposé seul ne prendrait aucune accélération.*

DEUXIÈME PRINCIPE. — *Deux points matériels déterminent l'un sur l'autre des accélérations dirigées suivant la droite qui les joint, et en sens opposés.*

TROISIÈME PRINCIPE. — *Le rapport des valeurs numériques des accélérations que deux points matériels A et B exercent l'un sur l'autre est constant, c'est-à-dire qu'il est déterminé pour ces points, indépendamment de toute autre condition.*

Il résulte de là que l'on peut exprimer le rapport de l'accélération prise par B à l'accélération prise par A par une fraction dont le numérateur est un nombre arbitrairement choisi, que nous désignerons par le symbole m_A , et le dénominateur un autre nombre m_B ne dépendant que des points donnés A et B; on a ainsi :

$$\frac{\text{accélération de B}}{\text{accélération de A}} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Si maintenant on met en présence de A, non plus le point B, mais un autre point matériel C, on pourra de même exprimer le rapport des accélérations prises par C et A par une fraction dont le numérateur est encore m_A , et dont le dénominateur est un autre nombre m_C , caractéristique du point C; nous aurons encore :

$$\frac{\text{accélération de C}}{\text{accélération de A}} = \frac{m_A}{m_C}.$$

De même pour tous les points D, E, F, ... que l'on mettrait en présence de A : pour chacun de ces points on a un dénominateur particulier : $m_D, m_E, m_F, \dots$. Le tableau des nombres $m_A, m_B, m_C, \dots$ définis comme il vient d'être dit, permet de répondre à la question suivante : le point A et un autre point quelconque étant donnés, trouver le rapport des accélérations qu'ils déterminent l'un sur l'autre.

Mais il y a plus, ce tableau peut servir à résoudre une question beaucoup plus générale, grâce à l'adjonction suivante au troisième principe : *le rapport des accélérations que deux points quelconques P et Q déterminent l'un sur l'autre est égal au rapport d'accélération de P et d'un autre point quelconque tel que A, divisé par le rapport d'accélération de Q et de A*; ce qui s'écrit :

$$\text{Rapport d'accélération de P et Q} = \frac{\text{Rapp. d'accél. de P et A}}{\text{Rapp. d'accél. de Q et A}}.$$

Le tableau ci-dessus nous met maintenant en état de répondre à la question suivante : trouver le rapport d'accélération de deux points matériels quelconques : ce rapport

est égal à l'inverse de celui des nombres correspondants du tableau.

Définition. — Les nombres $m_A, m_B, m_C, \dots$ s'appellent les masses des points A, B, C, ...

Ainsi le rapport des masses de deux points est, par définition, l'inverse du rapport des accélérations que chacun d'eux détermine sur l'autre; la valeur numérique de l'une des masses ayant été choisie arbitrairement, les valeurs numériques de toutes les autres sont déterminées.

QUATRIÈME PRINCIPE. — *L'accélération que détermine sur un point matériel quelconque K l'ensemble de plusieurs points matériels A, B, C, ... s'obtient en composant d'après la règle de la composition des vecteurs les accélérations que déterminent isolément les points A, B, C, ... agissant successivement sur le point K.*

DES FORCES. — Jusqu'ici nous n'avons pas parlé de forces. On peut en effet s'en passer : l'objet de la Mécanique est le suivant : « sachant quels sont les mouvements qui se produisent dans certaines conditions, prévoir quels sont les mouvements qui se produiraient dans d'autres conditions données » (H. HERTZ); or il n'est question dans ce problème que de corps et de mouvements, et l'intervention d'un autre élément n'est pas nécessaire.

Il y a toutefois avantage, afin d'abrégé, à faire la convention suivante :

Lorsqu'un point A, de masse m , éprouve une certaine accélération j , déterminée par la présence de un ou plusieurs autres points matériels, nous dirons conventionnellement

que A est soumis, de la part de ce ou de ces points, à une force égale à $\vec{mj}$ en grandeur, en direction et en sens. C'est ce vecteur $\vec{mj}$ qui est, *par définition*, la force agissant sur A. Si on le désigne par F, on a identiquement $F = \vec{mj}$; la notion de force est ainsi une notion *dérivée*, c'est-à-dire formée à l'aide d'autres quantités.

Ces prémisses posées, leur développement ne différera en rien de la Mécanique rationnelle classique, puisque le point de départ formel est le même dans les deux cas, à savoir l'égalité $F = \vec{mj}$.

Il reste à expliquer comment la Mécanique théorique peut être appliquée à la description de la réalité.

L'observation et l'expérience ont montré que si l'on prend pour système de repères le centre de masse du système solaire et les étoiles, et pour temps le temps moyen défini en Cosmographie, la Mécanique théorique donne la description des mouvements qui ont lieu dans la nature avec une exactitude qui n'a jamais été trouvée en défaut; la détermination des masses des corps, et celle de leurs accélérations, autrement dit des forces qu'ils exercent les uns sur les autres, est du ressort des sciences expérimentales.

Maintenant, à moins que l'on n'ait affaire à des phénomènes astronomiques, ou à quelques phénomènes terrestres exceptionnels, tels que le mouvement du pendule de Foucault, on peut, sans erreur appréciable, prendre pour sys-

tème de repères la terre. Plus encore, sur un bateau, on pourra prendre, faute de mieux, le bateau lui-même, à condition qu'il ne soit pas trop agité et qu'une grande exactitude ne soit pas nécessaire...

La Mécanique théorique est ainsi à la Mécanique positive ce qu'un *modèle* est à une *construction réelle*.

Lorsqu'on veut appliquer la première à la seconde, il faut faire choix d'un système de repères et d'une horloge; selon le choix qu'on aura fait, on obtiendra une description plus ou moins exacte de la réalité : plus exacte avec les repères astronomiques qu'avec la terre, plus exacte, peut-être, avec certaines étoiles qu'avec d'autres...

Maintenant, il est *infiniment invraisemblable* que ce choix puisse être fait de telle façon que la description soit *absolument* exacte. Il faut conclure de là que notre Mécanique réelle ne peut avoir un caractère d'exactitude absolue, bien que celle qu'elle possède dépasse de beaucoup les besoins actuels des sciences positives. Les principes de la Mécanique n'ont ainsi qu'un caractère provisoire : comme le dit M. MACH, « les propositions de la Mécanique qui paraissent précisément les plus simples, sont de nature très compliquée; elles reposent sur des expériences non achevées et qui ne pourront jamais être achevées; pratiquement, elles sont suffisamment assurées pour servir de fondement à la déduction, étant donnée la stabilité suffisante de notre entourage, mais elles doivent être considérées, non comme des vérités mathématiquement définitives, mais, au contraire, comme des propositions qui, non seulement sont suscep-

tibles, mais encore ont besoin d'une vérification continue ».

Il ne faudrait pas s'étonner de voir la Mécanique théorique, toute fictive et conventionnelle qu'elle est, s'appliquer si bien à la description de la réalité, car la bonne foi oblige à déclarer qu'elle a été faite pour cet objet. Suivant l'expression de M. H. POINCARÉ, « notre choix parmi toutes les conventions possibles a été guidé par les faits expérimentaux ».

COMPLÉMENTS.

1. — *Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.*

L'énoncé de cette proposition capitale, due à NEWTON, est le suivant :

Si un point M est sollicité par une force F due à la présence d'un autre point M', le point M' éprouve de la part de M une force égale et opposée à F. Newton exprime ce fait en disant que la réaction est égale et opposée à l'action. Ce principe est implicitement contenu dans ceux que nous avons énoncés : en effet, si le point M, de masse m , est soumis à une force F, cela veut dire qu'il a une accélération égale à $\left(\frac{\vec{F}}{m}\right)$; d'après le second et le troisième principe, le point M' éprouve une accélération de même direction et de sens contraire, dont la valeur numérique est $\frac{F}{m} \times \frac{m}{m'} = \frac{F}{m'}$, ce qui signifie qu'il est soumis à une force F de sens contraire et égale à celle qu'il exerce sur F. C'est le principe même de Newton.

II. — *Explications sur quelques points.*

1. Ce que l'on doit entendre quand on dit qu'une force F est appliquée en un point d'un système continu, par exemple d'un corps solide. — On considère dans le corps, autour de ce point, un élément de volume de masse arbitraire dm , et l'on entend qu'il existe un état de choses en vertu duquel dm éprouve une accélération $\left(\frac{\vec{F}}{dm}\right)$. Cette accélération se composera du reste, avec d'autres, d'origines différentes, s'il en existe; elle pourra être annulée par celles-ci, etc. Remarquons que, dans la nature, F est nécessairement de l'ordre de grandeur de dm , ou infiniment petit par rapport à lui.

2. Qu'il n'y a qu'une chose appelée *force*, mais que la manière de la déterminer varie d'après les conditions physiques qui la produisent. — Qui dit *force* entend toujours qu'un certain élément matériel a une certaine accélération, mais la détermination du vecteur qui représente ce fait se ramène à celles d'éléments géométriques et physiques, qui varient suivant la nature des phénomènes étudiés; par exemple :

1° Si la force qui agit sur un élément d'un corps est son propre poids, cette force est connue en direction par le fil à plomb, et sa valeur numérique se détermine par un facteur g commun à tous les corps au même lieu, par le volume de l'élément et par sa densité.

2° Si la force qui s'exerce entre deux éléments matériels

est due à l'attraction newtonienne, elle est connue si l'on donne leur distance, leurs volumes et leurs densités.

3° Si la force qui s'exerce entre deux éléments de matière est due à leur électrisation, elle sera connue si l'on connaît leur distance et ce qui est défini en Physique comme leurs charges électriques. Et ainsi de suite.

Dans le sein d'un fluide, un polyèdre infiniment petit est soumis à des forces que l'on nomme pressantes, qui sont déterminées à l'aide des faces du polyèdre. Ces forces sont normales aux faces de l'élément, et chacune d'elles a pour valeur numérique le produit de l'aire de la face correspondante par un coefficient ayant une valeur déterminée en chaque point de l'espace, et que l'on appelle pression en ce point. Les forces pressantes sont de même nature que toutes les forces, et c'est improprement que l'on dit quelquefois qu'elles sont appliquées aux surfaces : elles sont seulement déterminées par elles.



SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

Par HENRI POINCARÉ,

Membre de l'Institut de France,
Professeur à l'Université de Paris.

Les Anglais enseignent la Mécanique comme une science expérimentale; sur le continent, on l'expose toujours plus ou moins comme une science déductive et *a priori*. Ce sont les Anglais qui ont raison, cela va sans dire; mais comment a-t-on pu persévérer si longtemps dans d'autres errements? pourquoi les savants continentaux qui ont cherché à échapper aux habitudes de leurs devanciers, n'ont-ils pas pu le plus souvent s'en affranchir complètement?

D'autre part, si les principes de la Mécanique n'ont d'autre source que l'expérience, ne sont-ils donc qu'approchés et provisoires? Des expériences nouvelles ne pourront-elles un jour nous conduire à les modifier ou même à les abandonner?

Telles sont les questions qui se posent naturellement, et la difficulté de la solution provient principalement de ce que les traités de Mécanique ne distinguent pas bien nettement

ce qui est expérience, ce qui est raisonnement mathématique, ce qui est convention, ce qui est hypothèse.

Ce n'est pas tout :

1° Il n'y a pas d'espace absolu et nous ne concevons que des mouvements relatifs; cependant on énonce le plus souvent les faits mécaniques comme s'il y avait un espace absolu auquel on pourrait les rapporter.

2° Il n'y a pas de temps absolu; dire que deux durées sont égales, c'est une assertion qui n'a par elle-même aucun sens et qui n'en peut acquérir un que par convention.

3° Non seulement nous n'avons pas l'intuition directe de l'égalité de deux durées; mais nous n'avons même pas celle de la simultanéité de deux événements qui se produisent sur des théâtres différents; c'est ce que j'ai expliqué dans un article intitulé la *Mesure du Temps*¹.

4° Enfin notre Géométrie euclidienne n'est elle-même qu'une sorte de convention de langage; nous pourrions énoncer les faits mécaniques en les rapportant à un espace non euclidien qui serait un repère moins commode, mais tout aussi légitime que notre espace ordinaire; l'énoncé deviendrait ainsi beaucoup plus compliqué; mais il resterait possible.

Ainsi l'espace absolu, le temps absolu, la Géométrie même ne sont pas des conditions qui s'imposent à la Mécanique; toutes ces choses ne préexistent pas plus à la Mécanique que la langue française ne préexiste logiquement aux vérités que l'on exprime en français.

1. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VI, p. 1-13 (janvier 1898).

On pourrait chercher à énoncer les lois fondamentales de la Mécanique dans un langage qui serait indépendant de toutes ces conventions; on se rendrait mieux compte ainsi sans doute de ce que ces lois sont en soi; c'est ce que M. ANDRADE a tenté de faire, au moins en partie, dans ses *Leçons de Mécanique physique*.

L'énoncé de ces lois deviendrait bien entendu beaucoup plus compliqué, puisque toutes ces conventions ont été précisément imaginées pour abréger et simplifier cet énoncé.

Quant à moi, sauf en ce qui concerne l'espace absolu, je laisserai de côté toutes ces difficultés; non que je les méconnaisse, loin de là; mais je les réserve parce que je dois me borner.

J'admettrai donc *provisoirement* le temps absolu et la Géométrie euclidienne.

Le Principe d'Inertie.

Un corps qui n'est soumis à aucune force ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme.

Est-ce là une vérité qui s'impose *a priori* à l'esprit? S'il en était ainsi, comment les Grecs l'auraient-ils méconnue? Comment auraient-ils pu croire que le mouvement s'arrête dès que cesse la cause qui lui avait donné naissance? ou bien encore que tout corps, si rien ne vient le contrarier, prendra un mouvement circulaire, le plus noble de tous les mouvements?

Si l'on dit que la vitesse d'un corps ne peut changer, s'il

n'y a pas de raison pour qu'elle change, ne pourrait-on soutenir tout aussi bien que la position de ce corps ne peut changer, ou que la courbure de sa trajectoire ne peut changer, si une cause extérieure ne vient les modifier?

Le principe d'inertie, qui n'est pas une vérité *a priori*, est-il donc un fait expérimental? Mais a-t-on jamais expérimenté sur des corps soustraits à l'action de toute force, et si on l'a fait, comment a-t-on su que ces corps n'étaient soumis à aucune force? On cite ordinairement l'exemple d'une bille roulant un temps très long sur une table de marbre; mais pourquoi disons-nous qu'elle n'est soumise à aucune force? est-ce parce qu'elle est trop éloignée de tous les autres corps pour pouvoir en éprouver aucune action sensible? Elle n'est pas cependant plus loin de la Terre que si on la lançait librement dans l'air; et chacun sait que dans ce cas elle subirait l'influence de la pesanteur due à l'attraction de la Terre.

Les professeurs de Mécanique ont l'usage de passer rapidement sur l'exemple de la bille; mais ils ajoutent que le principe d'inertie est vérifié indirectement par ses conséquences. Ils s'expriment mal; ils veulent dire évidemment que l'on peut vérifier diverses conséquences d'un principe plus général, dont celui de l'inertie n'est qu'un cas particulier.

Je proposerai pour ce principe général l'énoncé suivant :

L'accélération d'un corps ne dépend que de la position de ce corps et des corps voisins et de leurs vitesses.

Les mathématiciens diraient que les mouvements de

toutes les molécules matérielles de l'univers dépendent d'équations différentielles du second ordre.

Pour faire comprendre que c'est bien là la généralisation naturelle de la loi d'inertie, je demanderai qu'on me permette une fiction. La loi d'inertie, je l'ai dit plus haut, ne s'impose pas à nous *a priori*; d'autres lois seraient, tout aussi bien qu'elle, compatibles avec le principe de raison suffisante. Si un corps n'est soumis à aucune force, au lieu de supposer que sa vitesse ne change pas, on pourrait supposer que c'est sa position, ou encore son accélération qui ne doit pas changer.

Eh bien, imaginons pour un instant que l'une de ces deux lois hypothétiques soit celle de la nature et remplace notre loi d'inertie. Quelle en serait la généralisation naturelle? Une minute de réflexion nous le fera voir.

Dans le premier cas, on devrait supposer que la vitesse d'un corps ne dépend que de sa position et de celle des corps voisins; dans le second cas, que la variation de l'accélération d'un corps ne dépend que de la position de ce corps et des corps voisins, de leurs vitesses et de leurs accélérations.

Ou bien, pour parler le langage mathématique, les équations différentielles du mouvement seraient du premier ordre dans le premier cas, et du troisième ordre dans le deuxième cas.

Modifions un peu notre fiction. Je suppose un monde analogue à notre système solaire, mais où, par un singulier hasard, les orbites de toutes les planètes soient sans excen-

tricité et sans inclinaison. Je suppose de plus que les masses de ces planètes soient trop faibles pour que leurs perturbations mutuelles soient sensibles. Les astronomes qui habiteraient l'une de ces planètes ne manqueraient pas de conclure que l'orbite d'un astre ne peut être que circulaire et parallèle à un certain plan; la position d'un astre à un instant donné suffirait alors pour déterminer sa vitesse et toute sa trajectoire. La loi d'inertie qu'ils adopteraient serait la première des deux lois hypothétiques dont je viens de parler.

Imaginons maintenant que ce système vienne un jour à être traversé avec une grande vitesse par un corps de grande masse, venu de constellations lointaines. Toutes les orbites seront profondément troublées. Nos astronomes ne seraient pas encore trop étonnés; ils devineraient bien que cet astre nouveau est seul coupable de tout le mal. Mais, diraient-ils, quand il se sera éloigné, l'ordre se rétablira de lui-même; sans aucun doute les distances des planètes au soleil ne redeviendront pas ce qu'elles étaient avant le cataclysme, mais quand l'astre perturbateur ne sera plus là, les orbites redeviendront circulaires.

Ce serait seulement quand le corps troublant serait loin et quand cependant les orbites, au lieu de redevenir circulaires, deviendraient elliptiques, ce serait alors seulement que ces astronomes s'apercevraient de leur erreur et de la nécessité de refaire toute leur Mécanique.

J'ai un peu insisté sur ces hypothèses; car il me semble qu'on ne peut bien comprendre ce que c'est que notre loi

d'inertie généralisée, qu'en l'opposant à une hypothèse contraire.

Eh bien maintenant, cette loi d'inertie généralisée, a-t-elle été vérifiée par l'expérience et peut-elle l'être ? Quand NEWTON a écrit les *Principes*, il regardait bien cette vérité comme acquise et démontrée expérimentalement. Elle l'était à ses yeux, non seulement par l'idole anthropomorphique dont nous reparlerons, mais par les travaux de Galilée. Elle l'était aussi par les lois de Kepler elles-mêmes; d'après ces lois, en effet, la trajectoire d'une planète est entièrement déterminée par sa position et par sa vitesse initiales; c'est bien là ce qu'exige notre principe d'inertie généralisé.

Pour que ce principe ne fût vrai qu'en apparence, pour qu'on pût craindre d'avoir un jour à le remplacer par un des principes analogues que je lui opposais tout à l'heure, il faudrait que nous eussions été trompés par quelque surprenant hasard, comme celui qui, dans la fiction que je développais plus haut, avait induit en erreur nos astronomes imaginaires.

Une pareille hypothèse est trop invraisemblable pour que l'on s'y arrête. Personne ne croira qu'il puisse y avoir de tels hasards; sans doute la probabilité pour que deux excentricités soient précisément toutes deux nulles, aux erreurs près d'observation, n'est pas plus petite que la probabilité pour que l'une soit précisément égale à 0,1 par exemple et l'autre à 0,2 aux erreurs près d'observation. La probabilité d'un événement simple n'est pas plus petite que celle d'un

événement compliqué; et pourtant si le premier se produit, nous ne consentirons pas à l'attribuer au hasard; nous ne voudrions pas croire que la nature ait fait exprès de nous tromper. L'hypothèse d'une erreur de ce genre étant écartée, on peut donc admettre qu'en ce qui concerne l'Astronomie, notre loi a été vérifiée par l'expérience.

Mais l'Astronomie n'est pas la Physique tout entière.

Ne pourrait-on craindre que quelque expérience nouvelle ne vint un jour mettre la loi en défaut dans quelque canton de la Physique? Une loi expérimentale est toujours soumise à la revision; on doit toujours s'attendre à la voir remplacée par une autre loi plus précise.

Personne cependant ne redoute sérieusement que celle dont nous parlons doive être jamais abandonnée ou amendée. Pourquoi? Précisément parce qu'on ne pourra jamais la soumettre à une épreuve décisive.

Tout d'abord, pour que cette épreuve fût complète, il faudrait qu'après un certain temps tous les corps de l'univers reviennent à leurs positions initiales avec leurs vitesses initiales. On verrait alors si, à partir de ce moment, ils reprennent les trajectoires qu'ils ont déjà suivies une fois.

Mais cette épreuve est impossible, on ne peut la faire que partiellement, et, si bien qu'on la fasse, il y aura toujours quelques corps qui ne reviendront pas à leur position initiale; ainsi toute dérogation à la loi trouvera facilement son explication.

Ce n'est pas tout : en Astronomie, nous *voyons* les corps dont nous étudions les mouvements, et nous admettons le

plus souvent qu'ils ne subissent pas l'action d'autres corps invisibles. Dans ces conditions, il faut bien que notre loi se vérifie ou ne se vérifie pas.

Mais en Physique, il n'en est pas de même : si les phénomènes physiques sont dus à des mouvements, c'est aux mouvements de molécules que nous ne voyons pas. Si alors l'accélération d'un des corps que nous voyons nous paraît dépendre d'*autre chose* que des positions ou des vitesses des autres corps visibles ou des molécules invisibles dont nous avons été amenés antérieurement à admettre l'existence, rien ne nous empêchera de supposer que cette *autre chose* est la position ou la vitesse d'autres molécules dont nous n'avions pas jusque-là soupçonné la présence. La loi se trouvera sauvegardée.

Qu'on me permette d'employer un instant le langage mathématique pour exprimer la même pensée sous une autre forme. Je suppose que nous observions n molécules et que nous constations que leurs $3n$ coordonnées satisfont à un système de $3n$ équations différentielles du quatrième ordre (et non du deuxième ordre, comme l'exigerait la loi d'inertie). Nous savons qu'en introduisant $3n$ variables auxiliaires, un système de $3n$ équations du quatrième ordre peut être ramené à un système de $6n$ équations de deuxième ordre. Si alors nous supposons que ces $3n$ variables auxiliaires représentent les coordonnées de n molécules invisibles, le résultat est de nouveau conforme à la loi d'inertie.

En résumé, cette loi, vérifiée expérimentalement dans quelques cas particuliers, peut être étendue sans crainte aux

cas les plus généraux, parce que nous savons que dans ces cas généraux l'expérience ne peut plus ni la confirmer, ni la contredire.

La Loi de l'Accélération.

L'accélération d'un corps est égale à la force qui agit sur lui divisée par sa masse.

Cette loi peut-elle être vérifiée par l'expérience? Pour cela, il faudrait mesurer les trois grandeurs qui figurent dans l'énoncé : accélération, force et masse.

J'admets qu'on puisse mesurer l'accélération, parce que je passe sur la difficulté provenant de la mesure du temps. Mais comment mesurer la force, ou la masse? nous ne savons même pas ce que c'est.

Pour faire la vérification, il faudrait appliquer successivement une *même* force à deux corps différents, puis une autre force à ces deux mêmes corps; les quatre accélérations observées devraient être proportionnelles.

Mais on ne peut pas détacher une force d'un corps pour l'appliquer à un autre corps; les forces ne sont pas des chevaux que l'on peut détacher d'une voiture pour les atteler à une autre. Comment alors saurons-nous si deux corps sont soumis ou non à la même force?

C'est pour cela que Kirchhoff et les mécaniciens de son école regardent la loi en question, non comme un principe *a priori*, ou comme un fait d'expérience, mais tout simplement comme la définition de la force.

Dans un article que j'ai publié sous le titre *Les idées de*

*Hertz sur la Mécanique*¹, j'ai discuté cette manière de voir; j'ai cherché par tous les moyens à échapper à cette conséquence et je n'ai pu y parvenir. Je ne peux pas revenir ici sur ce que j'ai dit dans cet article, et je me borne à y renvoyer. Je n'ai à insister que sur quelques points.

La Mécanique Anthropomorphique.

Kirchhoff, dira-t-on, n'a fait qu'obéir à la tendance générale des mathématiciens au nominalisme; son habileté de physicien ne l'en a pas préservé. Il a tenu à avoir une définition de la force, et il a pris pour cela la première proposition venue; mais une définition de la force, nous n'en avons pas besoin: l'idée de force est une notion primitive, irréductible, indéfinissable; nous savons tous ce que c'est, nous en avons l'intuition directe. Cette intuition directe provient de la notion d'effort, qui nous est familière depuis l'enfance.

Mais d'abord, quand même cette intuition directe nous ferait connaître la véritable nature de la force en soi, elle serait insuffisante pour fonder la Mécanique; elle serait d'ailleurs tout à fait inutile. Ce qui importe, ce n'est pas de savoir ce que c'est que la force, c'est de savoir la mesurer.

Tout ce qui ne nous apprend pas à la mesurer est aussi inutile au mécanicien, que l'est, par exemple, la notion subjective de chaud et de froid au physicien qui étudie la

1. *Revue générale des Sciences*, 30 septembre 1897.

chaleur. Cette notion subjective ne peut se traduire en nombres, donc elle ne sert à rien; un savant dont la peau serait absolument mauvaise conductrice de la chaleur et qui, par conséquent, n'aurait jamais éprouvé ni sensations de froid, ni sensations de chaud, pourrait regarder un thermomètre tout aussi bien qu'un autre, et cela lui suffirait pour construire toute la théorie de la chaleur.

Or cette notion immédiate d'effort ne peut nous servir à mesurer la force; il est clair, par exemple, que j'éprouverai plus de fatigue en soulevant un poids de cinquante kilos qu'un homme habitué à porter des fardeaux.

Mais il y a plus : cette notion d'effort ne nous fait pas connaître la véritable nature de la force; elle se réduit en définitive à un souvenir de sensations musculaires, et on ne soutiendra pas que le Soleil éprouve une sensation musculaire quand il attire la Terre.

Tout ce qu'on peut y chercher, c'est un symbole, moins précis et moins commode que les flèches dont se servent les géomètres, mais tout aussi éloigné de la réalité.

L'Anthropomorphisme a joué un rôle historique considérable dans la genèse de la Mécanique; peut-être fournira-t-il encore quelquefois un symbole qui paraîtra commode à quelques esprits; mais il ne peut rien fonder qui ait un caractère vraiment scientifique, ou un caractère vraiment philosophique.

« *L'École du Fil.* »

M. ANDRADE, dans ses *Leçons de Mécanique Physique*, a rajeuni la Mécanique Anthropomorphique. A l'école de mécaniciens dont fait partie Kirchhoff, il oppose ce qu'il appelle assez bizarrement l'école du fil.

Cette école cherche à tout ramener à « la considération de certains systèmes matériels de masse négligeable, envisagés à l'état de tension et capables de transmettre des efforts considérables à des corps éloignés, systèmes dont le type idéal est le *fil*. »

Un fil qui transmet une force quelconque, s'allonge légèrement sous l'action de cette force; la direction du fil nous fait connaître la direction de la force, dont la grandeur est mesurée par l'allongement du fil.

On peut alors concevoir une expérience telle que celle-ci. Un corps A est attaché à un fil; à l'autre extrémité du fil on fait agir une force quelconque que l'on fait varier jusqu'à ce que le fil prenne un allongement α , on note l'accélération du corps A; on détache A et on attache le corps B au même fil, on fait agir de nouveau la force, ou une autre force, et on la fait varier jusqu'à ce que le fil reprenne l'allongement α ; on note l'accélération du corps B. On recommence l'expérience tant avec le corps A qu'avec le corps B, mais de façon que le fil prenne l'allongement β . Les quatre accélérations observées doivent être proportionnelles. On a ainsi une vérification expérimentale de la loi d'accélération énoncée plus haut.

Ou bien encore on soumet un corps à l'action simultanée de plusieurs fils identiques également tendus, et on cherche par l'expérience quelles doivent être les orientations de tous ces fils pour que le corps demeure en équilibre. On a alors une vérification expérimentale de la règle de la composition des forces.

Mais, en somme, qu'avons-nous fait? Nous avons défini la force à laquelle le fil est soumis par la déformation subie par ce fil, ce qui est assez raisonnable; nous avons admis ensuite que si un corps est attaché à ce fil, l'effort qui lui est transmis par le fil est égal à l'action que ce corps exerce sur ce fil; en définitive, nous nous sommes servis du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, en le considérant, non comme une vérité d'expérience, mais comme la définition même de la force.

Cette définition est tout aussi conventionnelle que celle de Kirchhoff, mais elle est beaucoup moins générale.

Toutes les forces ne sont pas transmises par des fils (encore faudrait-il pour qu'on pût les comparer qu'elles le fussent toutes par des fils identiques). Si l'on admettait même que la Terre est attachée au Soleil par quelque fil invisible, du moins conviendrait-on que nous n'avons aucun moyen d'en mesurer l'allongement.

Neuf fois sur dix, par conséquent, notre définition serait en défaut; on ne pourrait lui attribuer aucune espèce de sens, et il faudrait en revenir à celle de Kirchhoff.

Pourquoi alors prendre ce détour? Vous admettez une certaine définition de la force qui n'a de sens que dans

certains cas particuliers. Dans ces cas vous vérifiez par l'expérience qu'elle conduit à la loi de l'accélération. Autorisés par cette expérience, vous prenez ensuite la loi de l'accélération comme définition de la force dans tous les autres cas.

Ne serait-il pas plus simple de considérer la loi de l'accélération comme une définition dans tous les cas, et de regarder les expériences en question, non comme des vérifications de cette loi, mais comme des vérifications du principe de réaction, ou comme démontrant que les déformations d'un corps élastique ne dépendent que des forces auxquelles ce corps est soumis?

Sans compter que les conditions dans lesquelles votre définition pourrait être acceptée ne sont jamais remplies qu'imparfaitement, qu'un fil n'est jamais sans masse, qu'il n'est jamais soustrait à toute autre force que la réaction des corps attachés à ses extrémités.

Les idées de M. ANDRADE n'en sont pas moins très intéressantes; si elles ne satisfont pas notre besoin de logique, elles nous font mieux comprendre la genèse historique des notions mécaniques fondamentales. Les réflexions qu'elles nous suggèrent nous montrent comment l'esprit humain s'est élevé d'un anthropomorphisme naïf aux conceptions actuelles de la science.

Nous voyons au point de départ une expérience très particulière et en somme assez grossière; au point d'arrivée une loi tout à fait générale, tout à fait précise et dont nous regardons la certitude comme absolue. Cette certitude, c'est

nous qui la lui avons conférée pour ainsi dire librement, en la regardant comme une convention.

La loi de l'accélération, la règle de la composition des forces ne sont-elles donc que des conventions arbitraires? Conventions, oui; arbitraires, non; elles le seraient si on perdait de vue les expériences qui ont conduit les fondateurs de la science à les adopter, et qui, si imparfaites qu'elles soient, suffisent pour les justifier. Il est bon que, de temps en temps, on ramène notre attention sur l'origine expérimentale de ces conventions.

Le Principe de Réaction.

On énonce ordinairement ce principe en disant que l'action est égale à la réaction. Mais il est préférable de modifier et d'élargir cet énoncé. S'il n'y avait que des forces centrales, si, en d'autres termes, l'action d'un corps sur un corps voisin n'était jamais modifiée par la présence d'un troisième corps, nous pourrions nous y tenir sans inconvénient. Mais nous ne sommes nullement sûrs qu'il en soit ainsi dans la nature, et il vaut mieux dire :

Le centre de gravité d'un système isolé ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme.

J'ai montré plus haut que « l'école du fil » était amenée à faire implicitement de ce principe la définition de la force, ou une partie de cette définition.

attaché
✓ Il est préférable, ainsi que je viens de le dire, de regarder, à l'exemple de Kirchhoff, la loi de l'accélération comme la définition de la force. Mais il reste encore à définir la masse. ✓

C'est là sans doute une idée qu'on voudra aussi regarder comme immédiate et primitive. Tout le monde, dira-t-on, sait ce que c'est qu'une quantité de matière. Certainement non : je vois bien que dans deux grammes de plomb il y a deux fois plus de matière que dans un gramme de plomb, parce qu'on compare des matières identiques ; mais comment saurai-je que dans deux grammes d'argent il y a deux fois plus de matière que dans un gramme de plomb ?

La notion vague de quantité de matière ne suffit donc pas pour définir la masse ; il faut la remplacer par une définition plus précise ; mais cette définition devra satisfaire à une condition pour ne pas répugner à cette notion primitive et aux habitudes d'esprit qui en sont sorties. La quantité à laquelle nous donnerons le nom de masse devra être une constante.

La définition de la masse nous sera fournie précisément par le principe de réaction. Les masses devront être des coefficients choisis de telle sorte que le mouvement du centre de gravité d'un système isolé soit rectiligne et uniforme.

Cela ne veut pas dire que le principe de réaction soit purement conventionnel ; nous n'avons pas réduit ce principe à n'être qu'une simple définition, mais nous l'avons pour ainsi dire décomposé en deux parties : d'abord une proposition (axiome, postulat, ou fait d'expérience) : « Il existe des coefficients *constants* tels que le mouvement du centre de gravité (c'est-à-dire du centre des moyennes distances calculé en attribuant à chaque molécule du système

le coefficient en question) soit rectiligne et uniforme. » Et ensuite une définition de mots : « Et ces coefficients, je les appelle masses. »

Si je n'avais pas ajouté que ces coefficients doivent être *constants*, la première proposition ne serait qu'une tautologie; mais si je veux remplir cette condition, la proposition n'est plus évidente, et il faut demander à l'expérience de la vérifier.

Mais pouvons-nous faire cette vérification? Pour cela, il faudrait qu'il existât des systèmes isolés; or ces systèmes n'existent pas; le seul système isolé, c'est l'univers entier.

Mais nous ne pouvons observer que des mouvements relatifs; le mouvement absolu du centre de gravité de l'univers nous sera donc à tout jamais inconnu; nous ne pourrons jamais savoir s'il est rectiligne et uniforme, ou pour mieux dire la question n'a aucun sens.

Quels que soient les faits que nous observions, nous resterons donc toujours libres de supposer que notre principe est vrai.

A ce compte, ce principe ne serait qu'une simple convention. Mais ce n'est là qu'un des côtés de la question. Il n'y a pas de systèmes isolés, c'est vrai, mais il y a des systèmes *à peu près* isolés; on peut constater que le mouvement de leur centre de gravité est *à peu près* rectiligne et uniforme.

Prenons par exemple le système solaire; nos moyens d'observation deviendront peut-être un jour assez précis pour que l'on puisse étudier le mouvement de son centre de

gravité par rapport à celui de la Voie lactée par exemple; on constaterait alors que ce mouvement est à peu près rectiligne et uniforme. Il le serait à peu près, parce que les étoiles les plus voisines sont très éloignées, mais il ne peut pas l'être tout à fait. Si ces étoiles n'existaient pas, le principe serait invérifiable, puisque l'on ne pourrait rapporter le mouvement à aucun repère; mais si elles existent, elles doivent agir, si peu que ce soit, et le mouvement ne peut être qu'à peu près uniforme.

Notre principe n'est donc pas purement conventionnel: il repose au contraire sur des expériences nombreuses; mais c'est uniquement par convention que nous lui donnons une valeur absolue.

Mais, dira-t-on, c'est ce qui arrive pour toute loi expérimentale : la vérification n'en est jamais qu'imparfaite; seulement quand on voit qu'elle devient de plus en plus précise à mesure que les procédés d'observation se perfectionnent, on est conduit à attribuer à la loi un haut degré de probabilité.

Non, ce n'est pas la même chose. Quand il s'agit d'une loi physique ordinaire, voici ce qui arrive. Des expériences imparfaites l'ont vérifiée aussi complètement que le permettent les erreurs d'observations; des expériences plus soignées la vérifient mieux encore. Nos ancêtres auraient conclu qu'elle est très probablement vraie en toute rigueur. Nous, qui avons moins de confiance dans la simplicité de la nature, nous concluons plutôt qu'elle est probablement vraie à *très peu près*, et que probablement aussi elle ne

l'est pas tout à fait. Dans tous les cas nous concluons que nous pouvons agir comme si elle l'était.

Quoi qu'il en soit, une chose dont nous ne doutons pas, c'est que la loi est tout à fait vraie, ou bien qu'elle ne l'est pas. Résolue ou non, la question a un sens. Mais en ce qui concerne notre principe, il en va tout autrement. Est-il à peu près vrai pour des systèmes à peu près isolés? Cette question a un sens et l'expérience l'a résolue affirmativement. Est-il rigoureusement vrai? Cette question *n'a aucun sens*, et nous pouvons lui donner telle solution que nous voulons.

Ce principe de la réaction jouit donc d'un singulier privilège. Il est fondé sur l'expérience, et pourtant il ne pourra être renversé par l'expérience. Nous sommes certains que jamais nous ne serons conduits à l'abandonner par une expérience nouvelle, quelque précise qu'elle soit. Que nous apprendrait-elle en effet? Que pour les systèmes sur lesquels nous pouvons opérer, le principe n'est qu'à peu près vrai. Mais cela, nous le savons déjà, puisque ces systèmes ne sont qu'à peu près isolés.

Si l'on pouvait démontrer que pour ces systèmes à peu près isolés, la loi n'est même pas à peu près vraie, la convention sur laquelle repose le principe de réaction cesserait d'être commode et devrait être abandonnée. Mais contre une pareille éventualité, les expériences déjà acquises nous sont une garantie suffisante, elles sont assez précises pour cela.

Le Principe du Mouvement Relatif.

On a quelquefois cherché à rattacher la loi de l'accélération à un principe plus général. Le mouvement d'un système quelconque doit obéir aux mêmes lois, qu'on le rapporte à des axes fixes, ou à des axes mobiles entraînés dans un mouvement rectiligne et uniforme. C'est là le principe du mouvement relatif, qui s'impose à nous pour deux raisons : d'abord l'expérience la plus vulgaire le confirme, et ensuite l'hypothèse contraire répugnerait singulièrement à l'esprit.

Admettons-le donc, et considérons un corps soumis à une force; le mouvement relatif de ce corps, par rapport à un observateur animé d'une vitesse uniforme égale à la vitesse initiale du corps, devra être identique à ce que serait son mouvement absolu s'il partait du repos. On en conclut que son accélération ne doit pas dépendre de sa vitesse absolue, et on cherche à tirer de là la loi d'accélération tout entière.

Il y a eu longtemps des traces de cette démonstration dans les programmes du baccalauréat ès sciences. Il est évident que cette tentative est vaine. L'obstacle qui nous empêchait de démontrer la loi d'accélération, c'est que nous n'avions pas de définition de la force; cet obstacle subsiste tout entier, puisque le principe invoqué ne nous a pas fourni la définition qui nous manquait.

Le principe du mouvement relatif n'en est pas moins

fort intéressant et mérite d'être étudié pour lui-même. Cherchons d'abord à l'énoncer d'une façon précise.

Nous avons dit plus haut que les accélérations des différents corps qui font partie d'un système isolé ne dépendent que de leurs vitesses et de leurs positions relatives, et non de leurs vitesses et de leurs positions absolues, pourvu que les axes mobiles auxquels le mouvement relatif est rapporté soient entraînés dans un mouvement rectiligne et uniforme. Ou, si l'on aime mieux, leurs accélérations ne dépendent que des différences de leurs vitesses et des différences de leurs coordonnées, et non des valeurs absolues de ces vitesses et de ces coordonnées.

Si ce principe est vrai pour les accélérations relatives, ou mieux pour les différences d'accélération, en le combinant avec la loi de la réaction, on en déduira qu'il est vrai encore pour les accélérations absolues.

Il reste donc à voir comment on peut démontrer que les différences des accélérations ne dépendent que des différences des vitesses et des coordonnées, ou, pour parler le langage mathématique, que ces différences de coordonnées satisfont à des équations différentielles du second ordre.

Cette démonstration peut-elle être déduite d'expériences ou de considérations *a priori*?

En se rappelant ce que nous avons dit plus haut, le lecteur fera de lui-même la réponse.

Ainsi énoncé, en effet, le principe du mouvement relatif ressemble singulièrement à ce que j'appelais tout à l'heure le principe de l'inertie généralisé; ce n'est pas tout à fait la

même chose, puisqu'il s'agit des différences de coordonnées et non des coordonnées elles-mêmes. Le nouveau principe nous apprend donc quelque chose de plus que l'ancien, mais la même discussion s'y applique et conduirait aux mêmes conclusions; il est inutile d'y revenir.

L'Argument de Newton.

Ici nous rencontrons une question fort importante et même un peu troublante. J'ai dit que le principe du mouvement relatif n'était pas seulement pour nous un résultat d'expérience, et qu'*a priori* toute hypothèse contraire répugnerait à l'esprit.

Mais alors pourquoi le principe n'est-il vrai que si le mouvement des axes mobiles est rectiligne et uniforme? Il semble qu'il devrait s'imposer à nous avec la même force, si ce mouvement est varié, ou tout au moins s'il se réduit à une rotation uniforme. Or dans ces deux cas le principe n'est pas vrai.

Je n'insisterai pas longtemps sur le cas où le mouvement des axes est rectiligne sans être uniforme; le paradoxe ne résiste pas à un instant d'examen. Si je suis en wagon, et si le train, heurtant un obstacle quelconque, s'arrête brusquement, je serai projeté sur la banquette opposée, bien que je n'aie été soumis directement à aucune force. Il n'y a rien là de mystérieux; si je n'ai subi l'action d'aucune force extérieure, le train, lui, a éprouvé un choc extérieur. Que le mouvement relatif de deux corps se trouve troublé, dès que le mouvement de l'un ou de l'autre est modifié par une

cause extérieure, il ne peut rien y avoir là de paradoxal.

Je m'arrêterai plus longtemps sur le cas des mouvements relatifs rapportés à des axes qui tournent d'une rotation uniforme. Si le ciel était sans cesse couvert de nuages, si nous n'avions aucun moyen d'observer les astres, nous pourrions néanmoins conclure que la terre tourne; nous en serions avertis par son aplatissement, ou bien encore par l'expérience du pendule de Foucault.

Et pourtant, dans ce cas, dire que la Terre tourne, cela aurait-il un sens? S'il n'y a pas d'espace absolu, peut-on tourner sans tourner par rapport à quelque chose, et d'autre part comment pourrions-nous admettre la conclusion de Newton et croire à l'espace absolu?

Mais il ne suffit pas de constater que toutes les solutions possibles nous choquent également; il faut analyser, pour chacune d'elles, les raisons de notre répugnance, afin de faire notre choix en connaissance de cause. On excusera donc la longue discussion qui va suivre.

Reprenons notre fiction : d'épais nuages cachent les astres aux hommes, qui ne peuvent les observer et en ignorent même l'existence; comment ces hommes sauront-ils que la terre tourne? Plus encore que nos ancêtres sans doute, ils regarderont le sol qui les porte comme fixe et inébranlable; ils attendront bien plus longtemps l'avènement d'un Copernic. Mais enfin ce Copernic finirait par venir; comment viendrait-il?

Les Mécaniciens de ce monde ne se heurteraient pas d'abord à une contradiction absolue. Dans la théorie du

mouvement relatif, on envisage, en dehors des forces réelles, deux forces fictives que l'on appelle la force centrifuge ordinaire et la force centrifuge composée. Nos savants imaginaires pourraient donc tout expliquer en regardant ces deux forces comme réelles, et ils ne verraient pas là de contradiction avec le principe de l'inertie généralisé, car ces forces dépendraient, l'une des positions relatives des diverses parties du système, comme les attractions réelles, l'autre de leurs vitesses relatives, comme les frottements réels.

Bien des difficultés cependant ne tarderaient pas à éveiller leur attention; s'ils réussissaient à réaliser un système isolé, le centre de gravité de ce système n'aurait pas une trajectoire à peu près rectiligne. Ils pourraient invoquer, pour expliquer ce fait, les forces centrifuges qu'ils regarderaient comme réelles et qu'ils attribueraient sans doute aux actions mutuelles des corps. Seulement ils ne verraient pas ces forces s'annuler aux grandes distances, c'est-à-dire à mesure que l'isolement serait mieux réalisé; loin de là : la force centrifuge croît indéfiniment avec la distance.

Cette difficulté leur semblerait déjà assez grande; et pourtant elle ne les arrêterait pas longtemps : ils imagineraient bientôt quelque milieu très subtil, analogue à notre éther, où tous les corps baigneraient et qui exercerait sur eux une action répulsive.

Mais ce n'est pas tout. L'espace est symétrique, et pourtant les lois du mouvement ne présenteraient pas de symétrie;

elles devraient distinguer entre la droite et la gauche. On verrait par exemple que les cyclones tournent toujours dans le même sens, tandis que par raison de symétrie ces météores devraient tourner indifféremment dans un sens et dans l'autre. Si nos savants étaient parvenus à force de travail à rendre leur univers parfaitement symétrique, cette symétrie ne subsisterait pas, bien qu'il n'y ait aucune raison apparente pour qu'elle soit encore troublée dans un sens plutôt que dans l'autre.

Ils s'en tireraient sans aucun doute, ils inventeraient quelque chose qui ne serait pas plus extraordinaire que les sphères de verre de Ptolémée, et on irait ainsi, accumulant les complications, jusqu'à ce que le Copernic attendu les balaye toutes d'un seul coup, en disant : Il est bien plus simple d'admettre que la Terre tourne.

Et de même que notre Copernic à nous nous a dit : Il est plus commode de supposer que la Terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de l'Astronomie dans un langage bien plus simple; celui-là dirait : Il est plus commode de supposer que la Terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de la Mécanique dans un langage bien plus simple.

Cela n'empêche pas que l'espace absolu, c'est-à-dire le repère auquel il faudrait rapporter la Terre pour savoir si réellement elle tourne, n'a aucune existence objective. Dès lors cette affirmation : « la Terre tourne » n'a aucun sens, puisqu'aucune expérience ne permettra de la vérifier; puisqu'une telle expérience, non seulement ne pourrait être ni réalisée, ni rêvée par le Jules Verne le plus hardi, mais

ne peut être conçue sans contradiction; ou plutôt ces deux propositions : « la Terre tourne », et : « il est plus commode de supposer que la Terre tourne », ont un seul et même sens; il n'y a rien de plus dans l'une que dans l'autre.

Peut-être ne se contentera-t-on pas encore de cela, et trouvera-t-on déjà choquant que, parmi toutes les hypothèses ou plutôt toutes les conventions que nous pouvons faire à ce sujet, il y en ait une qui soit plus commode que les autres.

Mais si on l'a admis sans peine quand il s'agissait des lois de l'Astronomie, pourquoi s'en choquerait-on en ce qui concerne la Mécanique?

Nous avons vu que les coordonnées des corps sont déterminées par des équations différentielles du second ordre, et qu'il en est de même des différences de ces coordonnées. C'est ce que nous avons appelé le principe d'inertie généralisé et le principe du mouvement relatif. Si les distances de ces corps étaient déterminées de même par des équations du second ordre, il semble que l'esprit devrait être entièrement satisfait. Dans quelle mesure l'esprit reçoit-il cette satisfaction, et pourquoi ne s'en contente-t-il pas?

Pour nous en rendre compte, il vaut mieux prendre un exemple simple. Je suppose un système analogue à notre système solaire, mais d'où l'on ne puisse apercevoir des étoiles fixes étrangères à ce système, de telle façon que les astronomes ne puissent observer que les distances mutuelles des Planètes et du Soleil, et non les longitudes absolues des Planètes. Si nous déduisons directement de la loi de Newton

les équations différentielles qui définissent la variation de ces distances, ces équations ne seront pas du second ordre. Je veux dire que si, outre la loi de Newton, on connaissait les valeurs initiales de ces distances et de leurs dérivées par rapport au temps, cela ne suffirait pas pour déterminer les valeurs de ces mêmes distances à un instant ultérieur. Il manquerait encore une donnée, et cette donnée, ce pourrait être par exemple ce que les astronomes appellent la constante des aires.

Mais ici, on peut se placer à deux points de vue différents; nous pouvons distinguer deux sortes de constantes. Aux yeux du physicien, le monde se réduit à une série de phénomènes, dépendant uniquement, d'une part, des phénomènes initiaux, d'autre part, des lois qui lient les conséquents aux antécédents. Si alors l'observation nous apprend qu'une certaine quantité est une constante, nous aurons le choix entre deux manières de voir.

Ou bien nous admettrons qu'il y a une loi qui veut que cette quantité ne puisse varier, mais que c'est par hasard qu'elle s'est trouvée avoir, à l'origine des siècles, telle valeur plutôt que telle autre, valeur qu'elle a dû conserver depuis. Cette quantité pourrait alors s'appeler une constante *accidentelle*.

Ou bien nous admettrons au contraire qu'il y a une loi de la nature qui impose à cette quantité telle valeur et non pas telle autre. Nous aurons alors ce qu'on peut appeler une constante *essentielle*.

Par exemple, en vertu des lois de Newton, la durée de la

révolution de la Terre doit être constante. Mais si elle est égale à 366 jours sidéraux et quelque chose et non à 300 ou à 400, c'est par suite de je ne sais quel hasard initial. C'est une constante accidentelle. Si au contraire l'exposant de la distance qui figure dans l'expression de la force attractive, est égal à -2 et non pas à -3 , ce n'est pas par hasard, c'est parce que la loi de Newton l'exige. C'est une constante essentielle.

Je ne sais si cette manière de faire au hasard sa part est légitime en soi, et si cette distinction n'a pas quelque chose d'artificiel; il est certain du moins que, tant que la nature aura des secrets, elle sera dans l'application fortement arbitraire et toujours précaire.

En ce qui concerne la constante des aires, nous avons coutume de la regarder comme accidentelle. Est-il certain que nos astronomes imaginaires en feraient autant? S'ils avaient pu comparer deux systèmes solaires différents, ils auraient l'idée que cette constante peut avoir plusieurs valeurs différentes; mais j'ai justement supposé au début que leur système apparaissait comme isolé, et qu'ils n'observaient aucun astre qui y fût étranger. Dans ces conditions, ils ne pourraient voir qu'une constante unique qui aurait une valeur unique absolument invariable; ils seraient portés sans aucun doute à la regarder comme une constante essentielle.

Un mot en passant pour prévenir une objection : les habitants de ce monde fictif ne pourraient ni observer ni définir la constante des aires comme nous le faisons, puisque les

longitudes absolues leur échappent ; cela n'empêcherait pas qu'ils seraient rapidement amenés à remarquer une certaine constante qui s'introduirait naturellement dans leurs équations et qui ne serait autre chose que ce que nous appelons la constante des aires.

Mais alors voici ce qui va se passer. Si la constante des aires est regardée comme essentielle, comme dépendant d'une loi de la nature, il suffira, pour calculer les distances des planètes à un instant quelconque, de connaître les valeurs initiales de ces distances et celles de leurs dérivées premières. A ce point de vue nouveau, les distances seront régies par des équations différentielles du deuxième ordre.

L'esprit de ces astronomes serait-il cependant satisfait complètement ? Je ne le crois pas ; d'abord, ils s'apercevraient bientôt qu'en différentiant leurs équations, de façon à en élever l'ordre, ces équations deviennent bien plus simples. Et surtout ils seraient frappés de la difficulté qui provient de la symétrie. Il faudrait admettre des lois différentes, selon que l'ensemble des planètes présenterait la figure d'un certain polyèdre ou bien du polyèdre symétrique, et on n'échapperait à cette conséquence qu'en regardant la constante des aires comme accidentelle.

J'ai pris un exemple bien particulier, puisque j'ai supposé des astronomes qui ne s'occuperaient pas du tout de Mécanique Terrestre et dont la vue serait bornée au Système Solaire. Mais nos conclusions s'appliquent à tous les cas. Notre univers est plus étendu que le leur, puisque nous avons des étoiles fixes, mais il est cependant limité, lui

aussi, et alors nous pourrions raisonner sur l'ensemble de notre univers, comme ces astronomes sur leur système solaire.

On voit ainsi qu'en définitive on serait conduit à conclure que les équations qui définissent les distances sont d'ordre supérieur au second. Pourquoi en serions-nous choqués? Pourquoi trouvons-nous tout naturel que la suite des phénomènes dépende des valeurs initiales des dérivées premières de ces distances, tandis que nous hésitons à admettre qu'elles puissent dépendre des valeurs initiales des dérivées secondes? Ce ne peut être qu'à cause des habitudes d'esprit créées en nous par l'étude constante du principe d'inertie généralisé et de ses conséquences.

Les valeurs des distances à un instant quelconque dépendent de leurs valeurs initiales, de celles de leurs dérivées premières et encore d'autre chose. Qu'est-ce que cette *autre chose*?

Si l'on ne veut pas que ce soit tout simplement l'une des dérivées secondes, on n'a que le choix des hypothèses. Supposer, comme on le fait d'ordinaire, que cette autre chose c'est l'orientation absolue de l'univers dans l'espace, ou la rapidité avec laquelle cette orientation varie, cela peut être, cela est certainement la solution la plus commode pour le géomètre; ce n'est pas la plus satisfaisante pour le philosophe, puisque cette orientation n'existe pas.

On peut supposer que cette autre chose est la position ou la vitesse de quelque corps invisible; c'est ce qu'ont fait certaines personnes, qui l'ont même appelé le corps Alpha,

bien que nous soyons destinés à ne jamais rien savoir de ce corps que son nom. C'est là un artifice tout à fait analogue à celui dont je parlais à la fin du paragraphe consacré à mes réflexions sur le principe d'inertie.

Mais en somme la difficulté est artificielle. Pourvu que les indications futures de nos instruments ne puissent dépendre que des indications qu'ils nous ont données ou qu'ils auraient pu donner autrefois, c'est tout ce qu'il faut. Or sous ce rapport nous pouvons être tranquilles.

La Conservation de l'Énergie.

Le principe de la conservation de l'énergie et le principe de la moindre action suggéreraient des réflexions analogues. Mais cet article est déjà trop long; je me bornerai donc à résumer rapidement ce que j'ai dit dans la préface de mon *Cours de Thermodynamique*.

Le principe de la conservation de l'énergie, ou, comme disent encore quelquefois les physiciens, le principe d'équivalence, est une des conquêtes les plus récentes et les plus précieuses de la Science; il repose sur des expériences nombreuses, et pourtant on ne voit pas très bien comment on pourrait l'énoncer en l'érigeant en principe absolu.

Nous connaissons beaucoup de formes de l'énergie, et rien ne nous prouve qu'il n'y en ait pas beaucoup d'autres qui nous sont inconnues. Dans chaque cas particulier, on voit bien ce que c'est que l'énergie; mais il est impossible d'en trouver une définition générale.

Si l'on veut énoncer le principe dans toute sa généralité

et en l'appliquant à tout l'univers, on le voit pour ainsi dire s'évanouir, et il ne reste plus que ceci : *Il y a quelque chose qui demeure constant.*

Mais cela même a-t-il un sens ? Dans l'hypothèse déterministe qui est celle de la Science, tous les phénomènes sont régis par un nombre très grand d'équations différentielles ; or on sait qu'en intégrant des équations différentielles quelconques, on trouve toujours que certaines fonctions appelées intégrales doivent être égales à des constantes.

Dès lors, si nous disons qu'il y a *quelque chose qui demeure constant*, nous ne faisons qu'énoncer une tautologie. On serait même embarrassé de dire quelle est, parmi toutes nos intégrales, celle qui doit conserver le nom d'énergie.

Ce n'est pas d'ailleurs en ce sens que l'on entend le principe d'équivalence quand on l'applique à un système limité.

On admet qu'il y ait, dans ce système, plusieurs parties qui varient indépendamment les unes des autres. Dire alors que quelque chose demeure constant, quelles que soient les variations indépendantes que ces diverses parties puissent subir, cela n'est plus une tautologie. Le principe a alors un sens bien net.

Mais comment concevoir ces variations indépendantes ? Dans l'hypothèse déterministe, l'état du monde à un instant donné ne peut dépendre que de son état initial. Dès que cet état initial est donné, tout s'en déduit ; il n'y a pas place pour plusieurs façons de varier, indépendantes l'une de

l'autre. Pour retrouver cette indépendance, il faut donc supposer que les états successifs du système dépendent d'autre chose que de son état initial. Mais de quoi? Ce ne peut être que de l'influence des forces extérieures au système.

Il faut donc que le système ne soit pas complètement isolé. Mais alors son énergie n'est pas constante, puisqu'il peut y avoir échange d'énergie entre le système et le monde extérieur. Il faudrait, pour que le principe conservât un sens, avoir un moyen de mesurer, ou tout au moins de définir la quantité d'énergie ainsi échangée. Dans les divers cas particuliers, on peut trouver une définition suffisante pour les besoins des physiciens; mais cette définition sera toujours imparfaite, elle ne sera jamais générale.

D'ailleurs, si le système n'est pas isolé, il est probable que l'expression rigoureusement exacte de son énergie interne dépendra de l'état des corps extérieurs, et si on peut quelquefois croire le contraire, n'est-ce pas uniquement par suite de notre ignorance, et parce que l'influence de ces corps est trop faible pour que notre expérience puisse la déceler?

Pour formuler le principe d'équivalence en lui donnant un sens absolu, il faut donc l'étendre à tout l'univers, et nous avons vu alors à quelle difficulté on se heurte.

En résumé, la loi de la conservation de l'énergie ne peut avoir qu'une signification, c'est qu'il y a une propriété commune à tous les possibles; mais dans l'hypothèse déterministe, il n'y a qu'un seul possible, et alors la loi se réduit à une tautologie ou, si l'on veut, à une définition.

Je ne veux retenir de cette discussion qu'une impression, c'est que la loi d'équivalence est une forme assez souple pour qu'on y puisse faire rentrer presque tout ce que l'on veut. Je ne veux pas dire par là qu'elle ne correspond à aucune réalité objective, puisque dans chaque cas particulier, et pourvu qu'on ne veuille pas pousser jusqu'à l'absolu, elle a un sens parfaitement clair.

Cette souplesse est une raison de croire à sa longue durée; il est certain qu'elle restera longtemps commode, et comme d'autre part elle ne disparaîtra que pour se fondre dans une harmonie supérieure, nous pouvons travailler avec confiance en nous appuyant sur elle, certains d'avance que notre travail ne sera pas perdu.

Conclusions.

Les principes de la Mécanique se présentent donc à nous sous deux aspects différents. D'une part, ce sont des vérités fondées sur l'expérience et vérifiées d'une façon très approchée en ce qui concerne des systèmes presque isolés. D'autre part, ce sont des postulats applicables à l'ensemble de l'univers et regardés comme rigoureusement vrais.

Si ces postulats possèdent une généralité et une certitude qui faisaient défaut aux vérités expérimentales d'où ils sont tirés, c'est qu'ils se réduisent en dernière analyse à une simple convention que nous avons le droit de faire, parce que nous sommes certains d'avance qu'aucune expérience ne viendra la contredire.

Cette convention n'est pourtant pas absolument arbi-

traire; elle ne sort pas de notre caprice; nous l'adoptons parce que certaines expériences nous ont montré qu'elle serait commode.

On s'explique ainsi comment l'expérience a pu édifier les principes de la Mécanique, et pourquoi cependant elle ne pourra les renverser.

Comparons avec la Géométrie. Les propositions fondamentales de la Géométrie, comme par exemple le postulat d'Euclide, ne sont non plus que des conventions, et il est tout aussi déraisonnable de chercher si elles sont vraies ou fausses que de demander si le système métrique est vrai ou faux.

Seulement ces conventions sont commodes, et cela, ce sont certaines expériences qui nous l'apprennent.

Au premier abord, l'analogie est complète; le rôle de l'expérience semble le même. On sera donc tenté de dire : Ou bien la Mécanique doit être regardée comme une science expérimentale, et alors il doit en être de même de la Géométrie; ou bien au contraire la Géométrie est une science déductive, et alors on peut en dire autant de la Mécanique.

Une pareille conclusion serait illégitime. Les expériences qui nous ont conduits à adopter comme plus commodes les conventions fondamentales de la Géométrie portent sur des objets qui n'ont rien de commun avec ceux qu'étudie la Géométrie; elles portent sur les propriétés des corps solides, sur la propagation rectiligne de la lumière. Ce sont des expériences de Mécanique, des expériences d'Optique; on ne peut à aucun titre les regarder comme des expériences

de Géométrie. Et même la principale raison pour laquelle notre Géométrie nous semble commode, c'est que les différentes parties de notre corps, notre œil, nos membres, jouissent précisément des propriétés des corps solides. A ce compte, nos expériences fondamentales sont avant tout des expériences de Physiologie, qui portent, non sur l'espace qui est l'objet que doit étudier le géomètre, mais sur son corps, c'est-à-dire sur l'instrument dont il doit se servir pour cette étude.

Au contraire, les conventions fondamentales de la Mécanique et les expériences qui nous démontrent qu'elles sont commodas portent bien sur les mêmes objets ou sur des objets analogues. Les principes conventionnels et généraux sont la généralisation naturelle et directe des principes expérimentaux et particuliers.

Qu'on ne dise pas que je trace ainsi des frontières artificielles entre les sciences; que si je sépare par une barrière la Géométrie proprement dite de l'étude des corps solides, je pourrais tout aussi bien en élever une entre la Mécanique Expérimentale et la Mécanique Conventionnelle des principes généraux. Qui ne voit en effet qu'en séparant ces deux sciences je les mutile l'une et l'autre, et que ce qui restera de la Mécanique Conventionnelle quand elle sera isolée ne sera que bien peu de chose, et ne pourra nullement être comparé à ce superbe corps de doctrine que l'on appelle Géométrie?

On comprend maintenant pourquoi l'enseignement de la Mécanique doit rester expérimental.

C'est ainsi seulement qu'il pourra nous faire comprendre la genèse de la science, et cela est indispensable pour l'intelligence complète de la science elle-même.

D'ailleurs, si on étudie la Mécanique, c'est pour l'appliquer; et on ne peut l'appliquer que si elle reste objective. Or, ainsi que nous l'avons vu, ce que les principes gagnent en généralité et en certitude, ils le perdent en objectivité. C'est donc surtout avec le côté objectif des principes qu'il convient de se familiariser de bonne heure, et on ne peut le faire qu'en allant du particulier au général, au lieu de suivre la marche inverse.

SUR LA GENÈSE ET LA PORTÉE DES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

Par URBAIN LE VERRIER,

Ingénieur en chef des Mines,

Professeur à l'École des Mines

et au Conservatoire des Arts et Métiers.

La Thermodynamique repose sur deux principes fondamentaux. Le premier, celui de l'équivalence entre la chaleur et le travail, a été démontré par une série d'expériences; le second, le principe de Carnot ou de Clausius, a été posé intuitivement, puis vérifié expérimentalement par l'étude de ses conséquences indirectes.

Pour le physicien, ces principes apparaissent comme autonomes, comme étant le fruit de découvertes qui ont ouvert à la Physique un champ nouveau. Leur démonstration n'est du reste qu'approximative : les mesures expérimentales ne concordent que grossièrement, et tout ce qu'on a le droit de dire, au point de vue physique, c'est que ce sont des lois idéales auxquelles les phénomènes observés se conforment à peu près. Les divergences sont-elles dues seulement à des erreurs d'expériences, ou tiennent-elles à

ce que les lois réelles sont moins simples? C'est une question que la science n'est pas encore en état d'aborder.

Si on pose ces principes sous une forme absolue, c'est que l'esprit humain a une tendance invincible à croire que les lois de la nature sont simples. Cette idée a certainement guidé les créateurs de la Thermodynamique, et comme cela arrive presque toujours, c'est pour vérifier des hypothèses dont ils avaient plus ou moins conscience qu'ils ont poursuivi leurs expériences.

Quoique les hypothèses aient le plus souvent précédé l'expérience dans l'esprit des physiciens qui ont découvert des faits nouveaux, l'usage a prévalu d'adopter dans l'enseignement l'ordre contraire, de présenter d'abord les expériences, et d'en déduire ensuite les conséquences pour les relier par des hypothèses.

On se donne ainsi l'illusion d'une méthode positiviste; mais il serait peut-être plus simple, et aussi logique, de poser *a priori* des principes, pour en donner ensuite la vérification expérimentale.

La Thermodynamique pourrait être étudiée en posant *a priori* que la chaleur est une forme de mouvement, en cherchant à lui appliquer les principes généraux de la Mécanique, et à vérifier les conséquences de ces déductions. Cette méthode exprimerait peut-être plus fidèlement la genèse des idées.

I. — Premier principe ou principe de l'équivalence.

Le fait brut qui se présente à nous est d'abord celui-ci : c'est que dans beaucoup de phénomènes, comme par exemple lors du choc brusque d'un corps contre une masse qui l'arrête, nous voyons de la chaleur apparaître au moment où un mouvement cesse. Il est naturel de supposer que la chaleur n'est qu'une manifestation spéciale du mouvement, et que, si nous connaissions le mode particulier de mouvement qui se fait sentir à nous de cette manière indirecte, nous pourrions traiter tous les problèmes thermiques par les principes et les méthodes de la Mécanique.

Il s'agit de contrôler cette hypothèse, et si elle est admissible, la tâche qu'elle nous impose n'est pas de créer une science autonome, mais au contraire d'en supprimer une en ramenant à l'unité deux sciences, la Thermique et la Dynamique, qui s'étaient constituées indépendamment l'une de l'autre, et qui avaient peut-être pour objet le même ordre de phénomènes.

Pour cela nous devons reprendre le fait brut qui nous a servi de point de départ, remplacer l'observation par l'expérience méthodique, renouveler ce fait dans des conditions variées qui se prêtent à des mesures précises.

Nous trouvons alors qu'en éliminant certaines causes perturbatrices, on constate un rapport à peu près constant entre la quantité de chaleur qui apparaît d'une part, et la force vive anéantie ou le travail consommé d'autre part.

Nous admettons que ce rapport serait tout à fait constant si nos expériences étaient parfaites.

Ceci nous montre d'abord que notre hypothèse est admissible jusqu'à nouvel ordre. Ensuite nous voyons quelle est la quantité mécanique qui correspond à la quantité de chaleur, et quel est le rapport entre les unités que les physiiciens et les mécaniciens avaient créées séparément pour ces deux quantités.

Si la chaleur est un mode de mouvement, la quantité de chaleur devait être *a priori* exprimable par une fonction des masses et des vitesses qui définissent ce mouvement : mais nous ne connaissons pas cette fonction. L'expérience nous apprend qu'elle doit être de la forme mv^2 , et que la chaleur est l'équivalent d'une force vive, ou encore qu'il peut y avoir transformation d'un travail en chaleur, et réciproquement. Elle nous apprend encore que l'unité de chaleur définie empiriquement par les physiiciens équivaut à l'unité de travail commune, le kilogrammètre, multipliée par 425.

Le premier principe de la Thermodynamique se réduit donc à l'expression du rapport entre deux unités qui avaient été choisies arbitrairement pour mesure des phénomènes de même nature. Il disparaîtrait de la science, ainsi que l'unité de chaleur, le jour où l'on connaîtrait la nature des mouvements thermogéniques. Il ne se présenterait plus que comme une application des principes généraux de la Mécanique.

Ces mouvements échappent à notre œil, il est à présumer qu'ils sont d'amplitude très faible mais de vitesse considé-

nable, et correspondent sans doute à des vibrations qui s'accélèrent sous l'influence de la chaleur. On comprend très bien que le choc ou le frottement ait pour effet d'accélérer ces vibrations, c'est-à-dire d'échauffer les corps, et que pour produire cet effet il y ait consommation de travail mécanique. Il n'y a donc pas à proprement parler dans ces phénomènes disparition de force vive : c'est un mouvement visible, comme celui du corps qui tombe, qui se transforme en mouvements invisibles, comme les vibrations moléculaires du corps devenu immobile en apparence. Dans cette transformation, conformément aux principes de la Mécanique, la force vive se conserve; l'augmentation de force vive des vibrations moléculaires correspond à la disparition de force vive du corps arrêté par ce choc, c'est-à-dire au travail de la chute : elle se manifeste à nous par l'échauffement du corps. Le principe de l'équivalence n'est plus que l'expression du rapport existant entre les deux unités qui avaient servi jusqu'à présent à mesurer la force vive sous ces deux formes, et dont l'une aurait été inutile si on avait bien connu le phénomène réel, au lieu d'en connaître seulement la manifestation indirecte.

Cette idée des vibrations moléculaires peut du reste être suggérée par un autre ordre de phénomènes. On sait que la chaleur se transmet comme la lumière, les rayons calorifiques donnent lieu aux mêmes phénomènes complexes que les rayons lumineux; l'analyse de ces phénomènes conduit à penser que le milieu qui les transmet est le siège de mouvements vibratoires, dont la rapidité augmente avec la

température des corps qui émettent les rayons. N'est-il pas naturel de croire que ces corps possèdent eux-mêmes des mouvements analogues à ceux qu'ils communiquent au milieu ambiant?

Cette hypothèse est aussi légitime qu'aucune de celles qu'on emploie en Physique. Elle n'est pas nécessaire pour établir la Thermodynamique : mais nous l'avons indiquée pour montrer comment cette science pourrait devenir un simple chapitre de la Mécanique, si la nature des mouvements moléculaires était mieux connue. Le principe de l'équivalence ne serait plus alors qu'un corollaire du théorème des forces vives, et la détermination exacte de l'équivalent mécanique de la chaleur n'offrirait qu'un intérêt historique ou pratique pour relier ensemble deux systèmes de mesure.

II. — *Principe de Carnot.*

Définition de la température absolue.

Le second principe de la Thermodynamique, ou principe de Carnot, a été découvert intuitivement par l'étude des machines thermiques. On appelle ainsi des appareils qui, comme les machines à vapeur, à gaz ou à pétrole, transforment de la chaleur en travail. Ces machines supposent essentiellement : 1° l'emploi d'un corps qui passe par une série de transformations physiques ; 2° le concours de trois organes essentiels, le premier où le corps s'échauffe, le second où le corps se refroidit partiellement tout en se dilatant et transformant en travail une partie de la chaleur

reçue pendant la première période, le troisième où le corps achève de perdre son excédent de chaleur et est ramené à son état primitif.

Dans la machine à vapeur, par exemple, le premier organe est la chaudière où l'eau se transforme en vapeur à haute température et à haute pression, le second est le cylindre où la vapeur se détend en poussant le piston et se refroidit en même temps que sa pression diminue, le troisième est le condenseur où la vapeur est ramenée à l'état d'eau et à sa température primitive.

L'eau absorbe dans la chaudière une certaine quantité de chaleur Q , elle en restitue une certaine quantité plus faible Q' au condenseur, la différence $Q - Q'$ est la portion utilisable, celle qui peut être transformée en travail dans le cylindre.

Si on suppose que toute cette différence soit utilisée réellement, la machine sera parfaite; elle aura son rendement maximum qui sera défini par le rapport de la chaleur utilisable à la chaleur totale mise en jeu, c'est-à-dire par la fraction :

$$\frac{Q - Q'}{Q} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{Q'}{Q}$$

On observe que le rendement augmente avec l'écart des deux températures de la chaudière et du condenseur. Il en est de même pour toute machine thermique. On y retrouve toujours deux organes qui jouent le même rôle essentiel. On se sert souvent pour caractériser ces organes des mots : *source chaude* et *source froide*; la source chaude est un

système capable de fournir de la chaleur sans que la température s'abaisse, comme la chaudière qui est toujours réchauffée par le foyer; la source froide est un système capable d'absorber de la chaleur sans que sa température s'élève, comme le condenseur qui est sans cesse refroidi par des injections d'eau fraîche. Ces deux sources sont chacune à température fixe : si elles étaient en contact direct, la chaleur passerait de l'une à l'autre sans être utilisée : mais si elles sont mises en relation par un mécanisme convenable, le passage de la chaleur s'accompagnera d'une certaine production de travail. Il est évident que, s'il n'y avait aucune différence de température entre les deux sources, il n'y aurait pas non plus d'échange de chaleur ni de travail produit. On conçoit donc que le rendement de la machine dépend de la différence des deux températures et doit augmenter avec elle. C'est cette relation que le principe de Carnot précise et généralise. Il peut s'exprimer ainsi :

Pour toute machine thermique fonctionnant entre deux températures déterminées, il existe un rendement théorique maximum, qui est le même quelle que soit la nature de la machine, et qui ne dépend que des deux températures extrêmes.

Ce principe ne se prête pas à une vérification directe, car le rendement pratique des machines est influencé par trop de circonstances accessoires, et reste toujours très inférieur au rendement théorique. La loi a donc été posée *a priori* et on ne peut la vérifier expérimentalement que dans ses conséquences indirectes.

Pour l'établir, il faut analyser de plus près les conditions générales de marche des machines thermiques, ou, ce qui revient au même, les lois de l'échange de chaleur entre deux corps.

L'observation nous fournit d'abord un fait constant, c'est que la chaleur ne passe jamais spontanément que d'un corps chaud à un corps plus froid. C'est comme un *lemme* que nous poserons au début de notre recherche et qui nous servira à démontrer l'impossibilité de toute hypothèse impliquant un résultat contraire. Nous verrons plus loin comment on doit en modifier l'énoncé pour le rendre rigoureux. Remarquons en passant qu'il n'est sans doute que la traduction thermique d'une loi mécanique, à savoir qu'un corps agissant sur un autre par contact ou par choc ne peut lui communiquer qu'une vitesse inférieure, ou tout au plus égale à la sienne.

Ceci fait penser que la température joue dans les phénomènes thermiques un rôle analogue à celui de la vitesse dans les phénomènes mécaniques, ou, en d'autres termes, qu'elle est une fonction des vitesses moléculaires. Mais pour le moment nous voulons rester dans le domaine des faits et analyser le phénomène sans introduire d'hypothèses sur son mécanisme intime.

L'échange de chaleur entre deux corps se produit à chaque instant d'une manière directe par contact ou par rayonnement; il n'est alors accompagné d'aucun phénomène mécanique. Mais dans les machines thermiques l'échange entre les deux sources est indirect. Il se fait par

l'intermédiaire d'un corps, tel que la vapeur d'eau, ou le gaz, qui est mis successivement en contact avec les deux sources. Ce corps sert de véhicule à la chaleur, la transporte d'une source à l'autre en traversant des organes mobiles, et c'est au cours de cette migration qu'il produit du travail en faisant mouvoir les dits organes.

La vapeur d'eau par exemple a emprunté de la chaleur à la chaudière, elle va en porter au condenseur : mais pour passer de l'une à l'autre elle traverse un cylindre dont elle pousse le piston, et développe une certaine quantité de travail.

Ainsi dans les machines thermiques la chaleur passe toujours d'un corps chaud à un corps froid, elle *tombe* en quelque sorte d'une température élevée à une température basse, et c'est en tombant qu'elle produit du travail. Cette expression figurée paraît avoir provoqué l'intuition du principe de Carnot. Elle suggère en effet une comparaison avec les machines hydrauliques, où l'eau peut produire du travail en tombant d'un réservoir à un autre situé plus bas; pour que cela soit possible, il faut que cette chute ne soit pas directe, et que l'eau ne puisse suivre sa pente naturelle qu'en traversant une machine qu'elle fait mouvoir. Le travail produit théoriquement sera égal à la masse d'eau multipliée par la différence de hauteur. Quelle que soit la machine employée, le maximum de travail qu'on pourra obtenir ne dépendra que de cette différence de hauteur.

Supposons deux réservoirs situés à des hauteurs h et h' au-dessus du niveau de la mer. L'eau contenue dans le pre-

mier pourrait produire en tombant jusqu'à la mer un travail égal à mgh . Si elle ne tombe que jusqu'au second réservoir, elle ne produira que $mg(h-h')$, c'est-à-dire une fraction seulement de ce travail total qu'elle tient en puissance. Le rapport des deux quantités $\frac{h-h'}{h}$ représen-

tera le rendement maximum de n'importe quelle machine hydraulique fonctionnant entre les deux réservoirs donnés.

Or la température nous apparaît comme jouant dans les machines thermiques le même rôle que la hauteur dans les machines hydrauliques; nous pouvons donc supposer que, si ces machines fonctionnent entre deux températures t et t' , leur rendement maximum sera $\frac{t-t'}{t}$.

Ce rapport peut ne pas se vérifier pour notre échelle thermométrique ordinaire qui a été prise arbitrairement; mais si nous modifions cette échelle de manière à ce qu'elle satisfasse à cette condition, nous aurons une échelle rationnelle. Le principe de Carnot nous servira donc à définir l'échelle des températures absolues.

Il est évident que notre comparaison n'est pas une preuve suffisante, mais elle nous invite à en chercher une. Nous y arriverons en faisant intervenir le principe de réversibilité.

Tout phénomène mécanique peut être considéré comme réversible. Pour prendre un exemple très simple, si nous bandons un ressort en le comprimant avec la main, nous pouvons le laisser se détendre sans cesser d'appuyer dessus : en se détendant il exercera sur notre bras un travail égal

au travail musculaire que nous avons dû développer pour le comprimer. Les forces mises en jeu dans ces deux phénomènes sont les mêmes : mais l'organe qui était moteur dans le premier cas devient résistant dans le second, et réciproquement. Nous dirons donc que la compression du ressort est un phénomène réversible.

Considérons une roue hydraulique. L'eau tombant du réservoir supérieur la fait tourner, et elle peut développer un certain travail moteur en actionnant par des engrenages une machine quelconque. Appliquons-lui au contraire un moteur assez fort pour la faire tourner à l'envers : elle puisera de l'eau dans le bief d'aval pour la reverser dans le bief d'amont. Pour remonter ainsi une certaine masse d'eau, il faudra dépenser un travail théoriquement égal à celui que cette même masse aurait pu développer en tombant. Le phénomène est donc réversible.

Imaginons aussi qu'on applique à une machine thermique un moteur capable de la faire marcher à l'envers, elle prendra de la chaleur à la source froide pour la remonter à la source chaude. Quoique ce genre de réversion soit plus difficile à réaliser, on peut en donner un exemple simple. Chauffons de l'air dans un cylindre fermé par un piston, l'air se dilatera en se refroidissant et poussera le piston en développant du travail. Prenons maintenant le cylindre rempli d'air froid et comprimons-le : l'air s'échauffera en résistant à la poussée du piston. Il y aura donc création apparente de chaleur, ou tout au moins passage de chaleur d'un corps froid à un corps plus chaud, puisqu'en

puissant de l'air froid, et sans le secours d'aucun foyer, nous pourrions chauffer un réservoir d'eau dans lequel serait plongé le cylindre.

Théoriquement, le travail qu'il faudra dépenser pour comprimer le gaz et le ramener à sa température primitive sera égal à celui que le gaz chaud avait pu développer en se dilatant. Le phénomène est donc réversible.

Ainsi une machine thermique en marche directe prend à un corps chaud (la chaudière) une certaine quantité de chaleur Q ; elle cède à un corps froid (le condenseur) une certaine quantité plus faible Q' , et dans l'intervalle elle produit une quantité de travail équivalente à $Q - Q'$. La même machine en marche inverse prendra au corps froid une quantité de chaleur Q' et reportera au corps chaud une quantité de chaleur supérieure Q : mais il faudra dépenser pour produire cette marche à contre-sens un travail équivalent à $Q - Q'$.

Ceci nous amène à modifier le lemme posé plus haut : la chaleur peut passer d'un corps froid à un corps chaud, mais à condition de dépenser du travail pour provoquer ce passage en sens inverse du sens naturel. Nous dirons donc que la chaleur ne peut passer d'un corps froid à un corps chaud sans dépense de travail.

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour démontrer le principe de Carnot. Considérons en effet deux machines thermiques A et B qui fonctionnent entre les mêmes températures t et t' : la première emprunte à sa chaudière une certaine quantité de chaleur Q , pour rendre au condenseur

une quantité Q' ; elle produit un travail W . Supposons que la seconde ait un rendement plus faible, cela veut dire que, mettant en jeu les mêmes quantités de chaleur, elle produira un travail moindre W' . Si nous employons maintenant la première machine à faire marcher la seconde à l'envers, cette dernière exigera une dépense de travail W' et elle remontera à la chaudière une quantité de chaleur Q égale à celle que la première machine avait empruntée. Tout sera donc remis en état, et le mouvement pourra recommencer : mais à chaque période de ce mouvement réciproque, il restera disponible un excédent de travail $W - W'$ que la seconde machine n'aura pas absorbé. Ainsi l'ensemble des deux machines pourra indéfiniment produire du travail sans rien dépenser, ce qui est *absurde*.

On peut encore raisonner d'une autre manière : si nous faisons marcher la seconde machine de manière qu'elle produise le même travail que la première, elle devra par hypothèse mettre en jeu des quantités de chaleur plus grandes : si donc nous renversons sa marche en la faisant commander par la première, elle dépensera le travail produit par celle-ci et elle remontera à la chaudière une quantité de chaleur supérieure à celle qui lui avait été empruntée. Il y aura donc de la chaleur créée de rien, c'est-à-dire remontée d'un corps froid à un corps chaud sans dépense de travail, ce qui est contraire à notre lemme.

Il suffit pour notre raisonnement que la seconde machine soit réversible. La conclusion doit donc se formuler ainsi :

« Une machine réversible ne peut avoir un rendement

inférieur à celui d'une autre machine quelconque fonctionnant entre les mêmes températures. » Par conséquent, toutes les machines réversibles fonctionnant entre deux températures données doivent avoir le même rendement.

Les machines non réversibles peuvent et doivent avoir un rendement plus faible. En effet, une machine n'est tout à fait réversible que si elle ne donne lieu à aucune perte de travail ou de chaleur. Si un mécanisme donne lieu à des pertes, c'est-à-dire s'il ne rend pas tout le travail qu'on lui applique, il est évident que pour le faire marcher à l'envers, il faudra aussi un excédent de travail, c'est-à-dire qu'on en dépensera alors plus qu'il n'en produisait dans la marche directe; les résistances passives (les frottements par exemple) diminueront le travail produit dans la marche directe et augmenteront le travail nécessaire dans la marche inverse. Dire qu'une machine est réversible, c'est donc dire qu'elle est parfaite. Le rendement sur lequel on raisonne est par définition un maximum irréalisable dans la pratique : c'est ce qui rend impossible la vérification directe du principe de Carnot.

Le rendement peut s'exprimer par la fraction $\frac{Q-Q'}{Q}$: car, d'après le premier principe de la Thermodynamique, le travail produit équivaut à la quantité de chaleur consommée en route, c'est-à-dire à la différence de la quantité Q empruntée à la première source et de la quantité Q' restituée à la seconde. $\frac{Q-Q'}{Q}$ exprime donc la fraction utilisable de la chaleur mise en jeu. S'il y avait contact direct, Q' serait égal

à Q . Avec le contact indirect, Q' devient inférieur à Q , et la différence se transforme en travail. Cette transformation serait parfaite s'il n'y avait pas de causes de pertes accessoires, et le rendement théorique ne dépendrait que de l'écart des températures.

Ce principe nous donne une relation nécessaire entre le rendement des machines et les températures, c'est-à-dire entre une donnée mécanique et une quantité thermique. Puisque le rapport $\frac{Q-Q'}{Q}$ est indépendant de la nature des machines et des organes mis en jeu, puisqu'il ne dépend que des températures t et t' , il peut servir à caractériser ces températures. Nous pourrions modifier notre échelle thermométrique arbitraire de manière que l'on ait toujours la relation : $\frac{Q-Q'}{Q} = \frac{T-T'}{T}$, ou encore : $\frac{Q'}{Q} = \frac{T'}{T}$.

Nous avons donc une définition mécanique de la température absolue.

Cette définition par elle-même resterait stérile, si on ne pouvait la traduire en nombres : mais, comme nous le verrons plus loin, l'étude de certains corps dont on connaît assez bien toutes les propriétés thermiques permet de retrouver par une autre voie la notion de température absolue, et d'en déterminer approximativement l'expression numérique. L'échelle absolue peut être remplacée en pratique par l'échelle centigrade à condition de reporter le 0 à -273 , c'est-à-dire d'augmenter tous les nombres de 273.

Le principe de Carnot, avec l'aide de cette échelle ap-

proximative, devient une loi numérique susceptible de vérification. Il nous apprend par exemple qu'une machine à vapeur dont la chaudière est à 120° et le condenseur à 50° aura pour rendement maximum $\frac{393 - 323}{393} = \frac{70}{393}$, soit environ $\frac{17}{100}$.

Si on refroidit le condenseur à 0° , le rendement idéal deviendra $\frac{120}{393}$ ou environ $\frac{30}{100}$. De plus, toute autre machine à gaz, à pétrole, etc., fonctionnant entre les mêmes températures, doit avoir le même rendement maximum.

Ce sont des prévisions qu'on peut soumettre au contrôle de l'expérience. Mais les rendements des machines réelles étant toujours très inférieurs, ce contrôle laissera beaucoup à désirer : nous trouverons que les limites théoriques ne sont jamais dépassées et qu'elles sont très loin d'être atteintes.

On peut obtenir des vérifications moins directes mais plus satisfaisantes ; en effet la relation $\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'}$ ou $\frac{Q}{T} = \frac{Q'}{T'}$ devient une loi physique qu'on peut appliquer à toutes les transformations réversibles des corps.

Du moment que nous pouvons mesurer approximativement les températures absolues, nous pouvons introduire cette loi dans les calculs. On arrive alors, en l'appliquant par exemple aux changements d'état comme la liquéfaction ou la vaporisation, à prévoir des phénomènes ou des relations numériques variées, que jusqu'à présent l'expérience a suffisamment vérifiées.

Ainsi le deuxième principe de la Thermodynamique, après avoir été aperçu par intuition, puis démontré au moyen de raisonnements empruntés à une conception idéale des phénomènes, est confirmé par la vérification expérimentale de ses conséquences indirectes.

Il prend donc la valeur d'une loi physique, et apparaît aux physiciens comme un principe autonome, comme une véritable découverte nous révélant des propriétés de la matière inconnues jusque-là. Au fond, il se réduit, comme le principe d'équivalence, à une relation entre deux systèmes de mesure, entre les données thermiques et les données mécaniques. Il nous livre par une voie indirecte une définition mécanique de la température, que nous aurions pu trouver directement si nous avions connu les lois du genre de mouvement qui constitue la chaleur.

Si la chaleur est la manifestation des vibrations moléculaires, la température doit pouvoir se définir par les données cinématiques qui caractérisent ces mouvements. Supposons par exemple que la température absolue soit définie comme proportionnelle au carré des vitesses moyennes des molécules : on retrouvera par déduction directe le principe de Carnot. En effet, un corps de masse m qui est à la température T possède une force vive moléculaire mv^2 , c'est-à-dire une quantité de chaleur proportionnelle à mv^2 ; ce même corps refroidi à la température T' aura ses molécules vibrant moins vite, il ne possédera plus qu'une force vive moléculaire mv'^2 et une quantité de chaleur Q' équivalente.

La différence $Q - Q' = m(v^2 - v'^2)$ sera la quantité de chaleur qui a disparu et qu'on pourra transformer en travail par un mécanisme convenable. Donc le rendement sera $\frac{Q - Q'}{Q}$ ou $\frac{m(v^2 - v'^2)}{mv^2}$ ou encore $1 - \frac{v'^2}{v^2}$. Puisque les températures absolues sont proportionnelles aux carrés des vitesses, $\frac{T'}{T} = \frac{v'^2}{v^2}$, et on peut écrire : $\frac{Q'}{Q} = \frac{T'}{T}$.

En d'autres termes, comme la masse du corps servant de véhicule reste la même, le rapport $\frac{Q'}{Q}$ des quantités de chaleur qu'il emprunte à la source chaude et qu'il cède à la source froide est égal au rapport des carrés des vitesses moléculaires de ces deux sources, c'est-à-dire au rapport des températures absolues.

L'hypothèse que nous venons de faire pouvait être suggérée par un autre ordre de phénomènes. La lumière émise par les corps incandescents se compose de rayons de couleurs différentes qu'on peut isoler par réfraction à travers un prisme; en étudiant le spectre ainsi obtenu, on démontre que les rayons rouges et violets qui en occupent les deux extrémités correspondent à des vibrations de rapidité différente : la vitesse des vibrations rouges est à peu près les $\frac{2}{3}$ de celle des vibrations violettes. Or les rayons rouges commencent à être visibles quand les corps dont ils émanent sont chauffés entre 400° et 500° , tandis que la température de 1500° environ est nécessaire pour que les rayons violets apparaissent. Si nous augmentons ces chiffres de 273, nous

trouvons à peu près $\frac{800}{1800} = \frac{4}{9}$, qui est le carré du rapport $\frac{2}{3}$ des vitesses.

On aurait donc pu en partant de cette observation définir *a priori* la température absolue comme proportionnelle au carré des vitesses moléculaires, et retrouver par déduction directe le principe de Carnot.

On arriverait au même résultat par la théorie cinématique des gaz, dont nous dirons quelques mots plus loin.

Cette hypothèse offre encore l'avantage de rendre plus exacte la comparaison avec les machines hydrauliques; en effet, si nous considérons des réservoirs à des hauteurs h et h' au-dessus du niveau de la mer, l'eau en tombant jusqu'à la mer acquerrait une vitesse v proportionnelle à la racine carrée de ces hauteurs, et une force vive : $mv^2 = 2gh$. Elle contient donc en puissance une force vive qui dépend de la hauteur où elle se trouve; en passant de l'une à l'autre elle en transforme une partie en travail et le rendement est : $\frac{h-h'}{h} = \frac{v^2-v'^2}{v^2} = 1 - \frac{v'^2}{v^2}$, si on appelle v et v' les vitesses que l'eau acquerrait par sa chute complète. Ainsi la hauteur joue bien le même rôle que la température dans les machines thermiques; et toutes les deux sont comparables au carré d'une vitesse. Seulement, dans le réservoir d'eau cette vitesse n'est qu'en puissance, tandis que dans les corps chauds elle existerait réellement sous forme de mouvements moléculaires invisibles produisant la sensation de chaleur.

Ainsi la comparaison qui a fait entrevoir le second

principe de la Thermodynamique est plus valable qu'on ne pourrait le croire tout d'abord : elle devient scientifique si on assimile aux quantités de chaleur, non plus les masses d'eau qui tombent, mais les forces vives qu'elles contiennent en puissance.

En résumé, le second principe de la Thermodynamique, comme le premier, n'exprime au fond qu'un rapport entre deux systèmes de mesures. L'un nous donne une définition mécanique de la quantité de chaleur, l'autre une définition cinématique de la température. Tous les deux pourraient se déduire directement des principes de la Mécanique, si on connaissait la forme et les lois des mouvements moléculaires : faute de cette connaissance, on a découvert des principes par une série d'inductions et d'expériences qui leur donnent, au point de vue physique, une autonomie apparente.

On peut se demander maintenant quelle est la valeur objective de ces lois établies sur des expériences approchées et sur des considérations théoriques un peu arbitraires. Ne sont-elles pas une pure création de notre esprit substituant au monde réel un monde idéal qu'il peut plus facilement soumettre à l'analyse? C'est ce que nous allons examiner.

III. — *Valeur objective des lois de la Thermodynamique.*

Nous avons dit plus haut que si on connaissait la forme et les lois des mouvements moléculaires, on pourrait en déduire la Thermodynamique d'une manière directe et

rigoureuse. Or il existe des corps pour lesquels, sans connaître ces lois mêmes, on connaît à peu près toutes les propriétés physiques qui en sont la résultante et qui peuvent y suppléer dans une certaine mesure. Ce sont les gaz. Tous les gaz pris à des températures assez éloignées de leur point de liquéfaction obéissent sensiblement aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, résumées dans la formule :

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

et le coefficient de dilatation α est à peu près le même pour tous.

Cette formule se simplifie si on remplace la température centigrade t par la température absolue T , définie en posant :

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273$$

On trouve alors :

$$pv = \pi T$$

π étant une constante égale à $p_0 v_0 \alpha$. On est donc amené à une définition empirique de la température absolue, et on peut résumer les deux lois en disant que le produit du volume d'une masse de gaz par la pression varie proportionnellement à la température absolue.

On a pu aussi mesurer les chaleurs spécifiques, c'est-à-dire les quantités de chaleur nécessaires pour échauffer une masse de gaz de 1 degré, soit sous pression constante, soit sous volume constant. Ces deux chaleurs spécifiques sont sensiblement constantes, et elles sont à peu près les mêmes

pour les différents gaz, si on les rapporte, non pas à l'unité de masse, mais à l'unité de volume¹.

Cela posé, on a tous les éléments nécessaires pour analyser les transformations thermiques des gaz : on peut calculer la chaleur qu'ils perdent ou qu'ils absorbent quand la température et la pression varient, on peut aussi calculer le travail qu'ils exercent sur les parois des récipients, et qui dépend de la pression et des variations du volume.

En faisant ces calculs pour différents cas, on retrouve les lois de la Thermodynamique. On peut donc dire qu'elles sont démontrées par déduction directe pour les gaz, et ne recourir aux raisonnements donnés plus haut que pour les étendre aux autres corps.

Mais ce mode de démonstration suppose qu'il existe des gaz *parfaits*, c'est-à-dire obéissant rigoureusement aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Or, ces lois ne sont qu'approximatives, tous les gaz connus s'en écartent plus ou moins, et les discordances deviennent considérables quand on approche du point de liquéfaction.

On est donc tenté de dire que les lois de la Thermodynamique sont aussi des lois approximatives, qu'elles ne nous

1. On peut retrouver ces propriétés en faisant certaines hypothèses sur la structure intime des gaz. En supposant que les molécules de ces corps sont animées de mouvements rectilignes indéfinis, qu'elles se trouvent ainsi projetées contre les parois qui les enferment, et que la pression provient de ce bombardement continu; en admettant que les vitesses moléculaires augmentent avec la température, on construit une théorie cinématique des gaz, d'où l'on déduit directement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac. On voit donc que ces lois remplacent dans une certaine mesure la connaissance des mouvements moléculaires.

donnent des lois réelles qu'une image déformée, simplifiée à plaisir par notre esprit¹.

Quelle que soit la manière dont on cherche à fonder la Thermodynamique, on se heurte au même doute: car, d'une part, les expériences ne donnent que des vérifications approchées, d'une précision très inférieure à celle qu'on obtient dans les autres branches de la Physique; d'autre part, les raisonnements qu'on est obligé de faire intervenir portent toujours sur des corps fictifs et sur des phénomènes irréalisables. Cette dernière remarque pourrait amener à conclure, avec une certaine apparence de logique, que les lois trouvées de cette manière ne peuvent pas être celles du monde réel. Nous allons examiner quelques-unes des difficultés que soulève cette intrusion de notions idéales dans une science positive, et qui se traduisent parfois par des contradictions apparentes.

La température absolue nous présente une de ces contradictions. La température absolue, telle qu'on la détermine par l'étude des gaz, est égale à la température centigrade augmentée de 273 :

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273$$

C'est cette valeur qu'on emploie dans les calculs.

Il en résulterait que le zéro absolu correspondrait à un froid de 273° au-dessous du zéro ordinaire, température

1. La déduction n'est, il est vrai, qu'une démonstration de plus, mais elle joue un rôle indispensable: c'est en effet la seule méthode qui nous donne en nombres l'échelle thermométrique absolue et qui nous permet de développer le principe de Carnot et d'en tirer des conséquences.

dont on commence à approcher dans les expériences de congélation des gaz.

Or le zéro absolu n'est pas concevable : car ce serait une température où les gaz, même sous la plus faible pression, devraient occuper un volume nul.

D'ailleurs, dans le raisonnement général sur lequel se fonde le principe de Carnot, la température absolue se présente comme définie par des rapports, et l'analyse conduit à l'exprimer par une fonction exponentielle qui ne comporte pas la valeur zéro.

Il semble donc que la notion de température absolue soit en contradiction avec la réalité. Mais il n'y a là qu'un malentendu.

Nous arrivons à cette notion de deux manières différentes. L'une nous fournit une définition théorique satisfaisante, mais que nous ne savons pas encore traduire en formule numérique; l'autre (l'étude des gaz) nous fournit une expression numérique simple : mais cette expression n'est qu'approchée; elle peut remplacer pratiquement la véritable formule inconnue, pourvu qu'on se limite à raisonner sur des températures où il existe des gaz se rapprochant des gaz parfaits. Mais elle n'a plus aucune raison d'être aux températures très basses où tous les gaz sont liquéfiables, et il n'est pas étonnant qu'elle donne des résultats absurdes quand on étend ainsi son application.

On a donc le droit de faire intervenir dans les raisonnements la température absolue théorique et de lui substituer dans les calculs l'expression $t + 273$. Mais cette substitution

n'est légitime qu'au-dessus d'une certaine limite de température, et c'est un non-sens de parler de zéro absolu.

Cette circonstance n'infirme en rien la valeur objective du principe de Carnot.

La notion de réversibilité soulève une objection plus grave, car elle existe plus ou moins cachée dans tous les raisonnements que l'on fait en Thermodynamique.

Qu'on le dise ou non, on n'analyse jamais que des phénomènes supposés réversibles; or, comme aucun phénomène réel n'est pratiquement réversible, on pourrait en conclure que tout l'édifice ainsi bâti est fictif, que nos lois ne sont pas applicables aux phénomènes réels.

Tous les phénomènes mécaniques supposent une cause et un effet, c'est-à-dire deux corps dont l'un est moteur et agit sur l'autre, qui lui cède en opposant plus ou moins de résistance. Il y a donc à considérer des forces agissantes et des forces résistantes, ou plus brièvement des actions et des réactions.

Or, pour que le phénomène se produise, il faut que l'action l'emporte sur la réaction; pour qu'il ait lieu en sens inverse, il faudrait au contraire que la réaction l'emportât sur l'action. Le phénomène inverse ne pourra donc se passer dans les mêmes conditions que le direct.

Pour que tous les deux fussent également possibles, il faudrait que l'action et la réaction fussent à chaque instant égales, et alors il ne se passerait rien du tout.

Les mathématiciens lèvent la difficulté en disant qu'on raisonne sur des conditions limites : on peut supposer

l'excès de l'action sur la réaction aussi petit qu'on veut; cela n'aura d'autre effet que de ralentir le mouvement : on peut donc se figurer des phénomènes qui se rapprocheront autant qu'on veut des conditions de la réversibilité, mais qui deviendront de plus en plus lents. Passant à la limite, nous pouvons supposer nul cet excès de force que nous avons le droit de réduire tant que nous voulons; nous aurons alors un phénomène réversible qui serait théoriquement réalisable, à condition d'y mettre un temps infini. Cette conception, malgré sa valeur mathématique, n'est peut-être pas très satisfaisante au point de vue objectif; nous croyons qu'il faut la compléter par d'autres considérations, d'autant plus que dans certains cas on est amené à se figurer les phénomènes à la fois comme réversibles et comme très brusques : on ne peut donc plus recourir à l'artifice de la lenteur.

Pour nous, l'idée de la réversibilité n'est pas une conception fictive des phénomènes, c'est une abstraction légitime dans laquelle nous ne prenons qu'une partie de la réalité. Lorsque nous bandons un ressort nous employons un excès de force, quand nous le laissons se détendre nous appliquons des efforts moindres, mais cela ne change rien aux phases par lesquelles passe le ressort qui à chaque instant développe une réaction proportionnelle à sa diminution de longueur et qui passe par la même série d'états à l'aller et au retour. Le phénomène n'est donc pas réversible pour notre bras, il l'est pour le ressort, dont les transformations sont les mêmes dans les deux sens.

D'une manière générale, tout phénomène mécanique pris dans son ensemble est irréversible, mais il contient une partie réversible qu'on peut considérer seule.

Pour renverser le sens du mouvement, il faut modifier le mode d'action des causes, mais cela n'empêche pas les effets de rester les mêmes tout en se succédant dans l'ordre inverse. Le jeu des forces extérieures n'est pas réversible, mais les transformations du corps sur lequel ces forces agissent sont réversibles et peuvent être étudiées comme telles.

Le phénomène réversible n'est donc pas irréalisable en lui-même, seulement on ne peut le réaliser qu'avec des moyens irréversibles : mais on a le droit de faire abstraction de ces moyens pour l'étudier et lui appliquer l'analyse mathématique.

Cette abstraction n'est légitime qu'à certaines conditions : il faut notamment que la question de temps n'intervienne pas. Si nous bandons un ressort, l'excès de force que nous emploierons le fera comprimer plus ou moins vite et nous ne pourrions pas le négliger à ce point de vue : mais il ne changera rien à la série des états successifs du ressort qui resteront les mêmes tout en se succédant plus ou moins vite : nous pouvons donc en faire abstraction si cette question de temps ne nous intéresse pas. Nous n'avons pas besoin de supposer ce temps infini, il suffit que nous n'ayons pas à nous en préoccuper : une lenteur infinie serait nécessaire pour se rapprocher des conditions qui rendraient réversibles à la fois les effets et les causes, c'est-à-dire le

phénomène et les moyens employés pour le réaliser ; elle est inutile pour concevoir comme réversible le phénomène en lui-même, l'effet abstrait de sa cause.

En un mot, c'est la réversibilité simultanée des causes et des effets qui implique contradiction, celle des effets n'a rien de contradictoire ni d'irréel.

Les phénomènes adiabatiques sont un cas particulier et le plus délicat des phénomènes réversibles. On nomme ainsi des transformations qui se font sans aucun échange de chaleur entre le milieu ambiant et le corps qu'on étudie. Soit par exemple un gaz qu'on comprime dans un cylindre. Si on suppose que les parois soient absolument non conductrices, le gaz ne perdra ni ne gagnera de chaleur par contact : cependant il s'échauffe, parce que le travail employé à le comprimer se transforme en chaleur.

L'étude de ces phénomènes joue un rôle important dans la Thermodynamique : or ils sont doublement irréalisables.

Il n'existe pas de parois imperméables à la chaleur, et pour s'approcher de ces conditions on cherche à rendre la compression très brusque, afin que l'échange de chaleur n'ait pas le temps de prendre une valeur notable.

Mais d'autre part il faut supposer le phénomène réversible, ce qui, en pratique, exigerait une lenteur extrême.

Il semble donc qu'en raisonnant sur les phénomènes adiabatiques, on réunit deux conditions toutes les deux impossibles, et de plus contradictoires entre elles. C'est le comble de l'arbitraire au point de vue logique. Cependant cette

méthode fantaisiste donne des résultats contrôlés par l'expérience.

En étudiant des faits de dilatation ou de compression brusque sur différents corps, on peut faire des mesures qui concordent à peu près avec les calculs faits en supposant ces phénomènes à la fois adiabatiques et réversibles. Ces calculs devaient donc avoir un fondement légitime.

La difficulté disparaît si on reconnaît, comme nous l'avons dit plus haut, que le phénomène de la compression pris en lui-même, abstraction faite des moyens employés pour le produire, peut réellement être considéré comme réversible, sans qu'il soit nécessaire de le supposer lent. Quant à la condition d'adiabatisme, si elle n'est pas rigoureusement réalisable dans les expériences, elle l'est à peu près, et n'a du reste rien d'incompatible ni avec la réversibilité ni avec la nature réelle des phénomènes.

L'expérience nous donnera donc des résultats plus ou moins approchés, parce qu'elle ne réalisera pas tout à fait les conditions théoriques que nous avons imaginées, mais nous sommes autorisés à penser que la loi posée est exacte et que nous arriverions à une vérification rigoureuse si nous possédions des moyens d'expérimentation parfaits.

La Physique et la Mécanique nous offrent d'autres exemples de principes exacts fondés sur des raisonnements fictifs. Tel le principe d'Archimède, qu'on démontre en supposant qu'au milieu d'une masse liquide on en solidifie une partie sans rien changer aux conditions d'équilibre. C'est une conception étrange et absolument irréalisable.

Cependant on ne doute guère de la valeur objective du principe d'Archimède, et on n'est pas tenté de le considérer comme une loi approchée ni fictive.

Il n'y a pas de motif sérieux pour être plus sceptique vis-à-vis des lois de la Thermodynamique, bien que les raisonnements soient dans ce domaine plus complexes, et les moyens d'expérimentation plus défectueux.

Il est vrai que l'expérience ne suffit pas à établir ces lois, que d'autre part la déduction directe en est impossible, faute de données suffisantes sur les propriétés réelles des corps : pour suppléer à cette lacune, nous sommes obligés de substituer aux formules réelles, qui nous sont inconnues, des formules artificielles qui s'en rapprochent plus ou moins, de raisonner sur des corps imaginaires dont les corps réels ne reproduisent qu'imparfaitement les propriétés.

La Thermodynamique ainsi obtenue peut passer au premier abord pour une construction arbitraire qui pourrait ne correspondre à aucune vérité objective : mais lorsque nous voyons les expériences les plus variées vérifier à peu près nos conclusions, quand les résultats obtenus sur des phénomènes très différents et par des méthodes différentes se prêtent tous à rentrer dans le cadre des lois que nous avons pensées, quand l'étude de ces lois nous amène à prévoir des faits nouveaux qui se réalisent, il faut bien reconnaître qu'il y aurait là une série de coïncidences inexplicables si notre théorie n'avait aucun rapport avec la réalité.

Bien que ces vérifications soient seulement approxima-

tives, la multiplicité et la variété des coïncidences suppléent dans une certaine mesure à leur rigueur. Nous avons donc le droit de croire que la Thermodynamique contient une part de vérité objective.

Les principes peuvent être considérés de deux manières : soit comme des lois idéales dont les lois naturelles se rapprocheraient beaucoup, sans qu'il y ait identité complète, soit comme des lois réelles dont la manifestation serait altérée dans la pratique par des causes perturbatrices encore inconnues.

Le perfectionnement des méthodes expérimentales permettra peut-être un jour d'opter entre ces deux manières de voir.

En tout cas, les progrès de la science nous semblent devoir tendre à effacer de plus en plus l'autonomie apparente de la Thermodynamique, et à en faire un simple chapitre de la Dynamique générale.

IV. — *Conséquences métaphysiques.*

Les deux lois métriques que nous avons exposées se complètent par deux lois de tendance qui sont du plus haut intérêt pour le philosophe.

Tous les phénomènes naturels tendent à diminuer les différences de vitesses et de températures¹ entre les corps, c'est-à-dire à faire disparaître les sources d'énergie, les

1. Ces deux effets ne sont que des cas particuliers du même phénomène général, si, comme nous l'avons dit, la température n'est qu'une manifestation de certaines vitesses.

causes de mouvements relatifs. C'est ainsi que deux corps qui s'attirent ou se rencontrent prendront tous les deux la même vitesse et continueront à cheminer ensemble sans plus exercer d'action l'un sur l'autre; que deux corps échangeant leur chaleur par contact ou par rayonnement se mettront à la même température et qu'il n'y aura plus entre eux aucun phénomène thermique. Il en résulte qu'un système isolé, quelque complexe qu'il soit, tend vers un état d'inertie complète, où aucun phénomène mécanique ni thermique ne pourrait plus s'y produire sans une cause extérieure.

Cette loi fondamentale, sur laquelle nous n'insistons pas, car elle est facile à comprendre, est de nature à concilier l'idée de création avec celle de la permanence de la matière et de l'énergie.

Nous voyons en effet que le système solaire, supposé isolé, ne peut se maintenir dans son état actuel : il tend vers un état qui, sans être le néant matériel, serait le néant mécanique, où il n'y aurait plus de vie ni même de mouvement possible. De cet état final il ne pourra être tiré que par l'action d'une cause extérieure qui en fera peut-être un nouveau monde.

Si on les applique pour reconstituer l'histoire du passé, ces mêmes lois sont de nature à justifier l'hypothèse de Laplace d'après laquelle le système solaire aurait été primitivement à l'état de nébuleuse, les astres se seraient formés par l'agglomération de certaines parties de cette nébuleuse, les planètes auraient toutes passé par une période d'incan-

descence et ne seraient arrivées à être habitables qu'après un long refroidissement.

Ainsi la vie telle que nous la connaissons n'est possible que pendant une période relativement très courte de l'évolution d'un monde, et elle est forcément appelée à disparaître.

C'est un positivisme mal compris, que de rejeter l'idée de création au nom de la science; ce qui est antiscientifique, c'est d'attribuer au monde que nous voyons une durée illimitée dans l'avenir ou dans le passé. Ce monde ne peut se conserver lui-même tel qu'il est : s'il ne peut s'anéantir, il doit mourir, c'est-à-dire devenir inerte, et il ne pourra renaître que par l'intervention d'une force extérieure. Son existence à un moment donné implique dans le passé une intervention analogue.

Nous ne voulons pas développer ici ces questions qui élargiraient trop notre cadre, mais nous avons cru intéressant de les indiquer.

LA COMBINAISON CHIMIQUE AU POINT DE VUE DE LA THÉORIE DE LA CONNAISSANCE

Par W.-M. KOZLOWSKI,
de Cracovie.

Le concept fondamental de la Chimie est l'idée de *combinaison*. C'est l'idée qui forme la clef de voûte de son édifice scientifique. Ce n'est donc que par l'analyse de cette idée que nous pourrions parvenir au point d'où tout le domaine de la Chimie sera ouvert à l'analyse philosophique; c'est en découvrant sa genèse psychologique que nous réussirons à reconstruire le squelette des notions primitives qui forment la base de cette science.

La voie par laquelle on peut atteindre ce but est double : celle de la critique philosophique ou celle de l'histoire de la science. Nous pouvons analyser les concepts élaborés de la science, pour en découvrir les éléments psychologiques primitifs; ou bien nous pouvons suivre la formation de ces concepts dans leur développement historique. La deuxième méthode se prête très bien à confirmer les résultats de la première.

C'est en suivant ces deux méthodes que l'auteur est parvenu à certains résultats généraux, qu'il a publiés dans une série de mémoires en polonais¹. Comme ces résultats sont indispensables pour faire comprendre ce qui suit, il commencera par les résumer.

1° Nous considérons la science en général comme un produit idéal destiné à introduire l'unité dans la diversité fondamentale des matériaux fournis à notre conscience par différents organes intellectuels (qu'on nous pardonne cette métaphore) comme la sensibilité et le raisonnement, les impressions des divers sens, etc. La science n'est donc qu'un genre de triangulation mentale; elle ressemble à cette série de triangles imaginaires que le géomètre construit pour lier la base de ses opérations avec un point éloigné et inattingible.

2° Les concepts de la science, loin de correspondre à des réalités extérieures, ne sont au contraire que des fétiches anthropomorphiques de la pensée primitive, élaborés et adaptés par une série d'opérations méthodiques aux nécessités de la pensée scientifique. Ce procédé transforme le concept primaire et le recouvre d'une série de formations nouvelles, additionnelles et conceptuelles; mais le fond premier et intuitif y reste le même.

1. Nous nous dispensons de citer ici ces travaux, inaccessibles à la plupart de nos lecteurs en raison de la langue. Nous ne renvoyons donc qu'à deux communications en français : *Les propositions fondamentales de la science moderne à l'aube de la philosophie grecque*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, p. 717 (nov. 1900), et un résumé dans la *Revue philosophique* (Périodiques : janvier et août 1900) : *Les sources psychologiques de certaines lois fondamentales de la nature*.

3° Nous considérons les lois de la nature comme l'adaptation des catégories de la pensée aux formes intuitives de la sensibilité, et nous hasardons l'hypothèse que les lois appelées par nous rationnelles (celles qui s'expriment par une formule mathématique exacte et simple) sont d'origine apriorique.

4° L'incongruence fondamentale de ces deux sphères cognitives (celles de la sensibilité et du raisonnement) trouve son expression dans l'opposition de deux concepts : ceux du plein et du vide (matière et espace), qui forment les deux concepts fondamentaux de la science.

5° L'analyse psychogénétique de ces deux concepts nous amène à la conclusion qu'ils sont des produits de deux sphères distinctes de notre être psychique : de la perceptivité et de l'activité. Le plein, produit de la perceptivité, est l'agglomération des impressions tactiles ¹ non différenciées (fétiche primitif qui se subtilise ensuite en concept abstrait de matière) avec les différentes qualités visuelles (couleurs, comme première qualification des diverses substances concrètes). Le vide est le produit de la sphère motrice, qui n'engendre que cette notion, quand les mouvements produits par nous ont un caractère purement investigateur (tâtonnement); quand ils ne tendent pas à produire un changement dans l'aspect du monde phénoménal.

6° Les mouvements (les sentiments d'innervation, pour être exact) qui ont cette tendance font naître au contraire

1. Quand nous parlons des impressions tactiles, nous les prenons au sens strict du mot, en excluant les impressions thermiques et toutes celles qui naissent de la combinaison du tact avec le mouvement.

un nouveau couple de concepts opposés : ceux de la *masse* (la résistance au mouvement, qui s'associe au concept tactile de matière) et de la *force*.

7° Enfin la tache colorée et configurée, élément visuel primaire, est élaborée au moyen des mouvements de l'œil et transformée, par une synthèse psychique avec le produit de ces mouvements (la troisième dimension), en une notion de *corps*, tandis que le vide prend le caractère exact d'*espace géométrique*.

8° C'est ainsi que les trois sphères qui participent à la formation des notions fondamentales du monde extérieur donnent naissance aux concepts qui servent de base à trois sciences diverses. La sphère tactile, qui produit le concept de matière, à la *Physique*; la sphère motrice, avec ses concepts de masse et de force, à la *Mécanique*; la sphère visuelle, avec ses notions des corps à formes bien définies et de l'espace à trois dimensions, à la *Géométrie*.

9° Cette analyse permet d'entrevoir aussi les fondements psychologiques de certaines lois très générales de la nature, ou plutôt des postulats aprioriques. C'est ainsi que l'impénétrabilité des corps n'est que le résultat de ce fait psychologique, que chaque corps produit son espace; il y a donc autant de lieux occupés que de corps perçus. L'égalité de l'action et de la réaction se déduit du fait psychologique, que les concepts de force et d'inertie ne sont que les deux faces d'un seul et même effort volontaire (innervation musculaire). L'unité des forces physiques, principe qui implique que tout changement dans le monde physique

n'est que mouvement, découle de ce que l'unique moyen qui nous soit connu subjectivement d'opérer un changement dans le monde phénoménal est l'effort musculaire, et que le sentiment d'innervation qui l'accompagne est dépourvu de toute différenciation qualitative. La même homogénéité (au point de vue qualitatif) des impressions tactiles (pression) est la base d'un postulat parallèle, celui de l'unité de matière ; postulat qui, malgré tous les efforts des chimistes et des alchimistes, n'est pas encore érigé en loi empirique.

10° La science physique doit son existence à la tendance de l'esprit de réduire à l'unité les diverses qualités dues à des organes sensoriels différents. Si nous n'avions pas d'autres sens que le tact et le sentiment de l'innervation, il y aurait probablement une Mécanique, mais il n'y aurait pas de Physique. Il y a un demi-siècle à peine, il existait autant de physiques séparées que nous avons de manières différentes de percevoir le monde extérieur, chacune avec une matière impondérable qui lui était propre. L'unité de la Physique a été préparée par la loi psycho-physiologique des énergies spécifiques, qui transporta la diversité des impressions sensorielles dans la conscience du sujet.

On entrevoit, d'après ce qui précède, que le fondement primaire de la distinction des matières différentes, c'est la couleur. L'œil est l'unique organe, parmi ceux qui jouent un rôle dans la formation des concepts, dont les impressions soient qualitativement différentes ; car l'ouïe ne donne que des distinctions quantitatives. On pourrait croire que les

sons de la gamme ont des qualités diverses, comme les couleurs du spectre. Mais, si cela avait lieu, la transposition d'une mélodie ne serait pas possible. Nous n'hésitons jamais à définir la qualité de la couleur que nous voyons, mais il n'y a que des musiciens de capacité exceptionnelle qui puissent définir la hauteur d'un son sans diapason. Et chaque son peut servir de base pour reproduire la mélodie que nous avons entendue dans une tonalité déterminée. La gamme musicale est un produit historique et conventionnel.

Il en est tout autrement de la couleur. Elle est perçue immédiatement et n'admet pas de substitution. Elle est aussi le premier des caractères qui nous induisent à supposer l'identité ou la différence des substances. La science moderne se sert d'une série entière de qualifications pour établir l'identité des corps ou pour les caractériser; tels sont la dureté, la ductibilité, le poids et la chaleur spécifiques, etc. Mais il est facile de voir que tous ces caractères sont des résultats d'expériences plus ou moins compliquées et impliquant l'activité de l'investigateur. Au contraire, la couleur appartient à la sphère purement perceptive, et, comme telle, elle se lie intimement avec la qualité du sens tactile pour former les notions des matières concrètes. Si nous analysons nos représentations à ce sujet, nous nous apercevrons qu'elles sont composées d'une notion assez vague de matière-substrat, imbue d'une couleur caractéristique.

Si notre sens visuel ne possédait pas cette aptitude, nous serions incapables de distinguer des matières *qualitative-*

ment différentes (quoique nous pourrions établir des différences quantitatives, comme celles de poids spécifique et autres), et la Chimie n'existerait pas.

La Chimie est donc le résultat de la différence qualitative des impressions visuelles, comme la Physique résulte de la différence qualitative des impressions des sens différents. Elle est due à l'effort de notre intellect pour introduire l'unité dans cette diversité, et elle tend obstinément, malgré tous les échecs, au postulat de l'unité de la matière.

La diversité des matières, fait d'observation, forme une antinomie avec la tendance de notre esprit (tendance dont la source psychologique a été indiquée plus haut), à considérer la matière comme identique en principe. C'est de cette antinomie que se développa tout l'appareil scientifique de la Chimie moderne; c'est elle qui est le premier fondement de la distinction entre la matière première du monde, être transcendant des philosophes, et les substances phénoménales concrètes. L'eau de Thalès, l'air d'Anaximène, et surtout l'ἀρχή dépourvue de qualités d'Anaximandre, sont autant de tentatives pour élaborer ce concept de matière unique. Mais le fait empirique de la diversité s'impose à la pensée dès qu'elle commence à devenir plus précise. Anaxagore se voit obligé d'admettre autant d'éléments ou χημικά qu'il y a de substances homogènes. C'est là une ébauche un peu grossière de nos éléments chimiques, qui se réduisent à une soixantaine, au lieu de l'infinité admise par le philosophe grec.

L'idée d'élément implique celle de combinaison, car c'est le procès par lequel les matières concrètes sont construites avec ces éléments. Aussi la forme primitive de ce concept se trouve déjà chez Anaxagore, aussi bien que celle de la décomposition. Ce sont la *σύνθεσις*, par laquelle les choses sont produites, et la *διαίρεσις*, qui les fait disparaître. La forme sous laquelle la combinaison se présente tout d'abord est celle d'un mélange. Mais qu'est-ce qu'un mélange? C'est l'interposition des particules d'un élément entre les particules d'un autre ou de plusieurs autres. Plus les particules sont petites, plus le mélange est parfait. Si nous poussons la finesse des particules jusqu'à un tel degré qu'aucun de nos moyens d'investigation ne puisse plus les faire apparaître comme telles, nous arrivons à une combinaison d'éléments. C'est là notre concept moderne de combinaison dans les termes de l'hypothèse atomistique. *La combinaison chimique est un mélange d'atomes*. On voit que nous ne sommes pas de beaucoup avancés sur les anciens.

Mais qu'est-ce qu'une combinaison en réalité?

Nous avons deux substances différentes A et B. Après la combinaison, toutes deux cessent d'exister; en revanche nous en avons une troisième C, qui n'est ni A, ni B. Pourquoi donc la Chimie ne prend-elle pas ce fait tel qu'il est? Pourquoi persiste-t-elle à voir un mélange dans chaque combinaison, et admet-elle l'existence d'éléments comme tels dans chaque corps composé?

C'est que le fait empirique précité se heurte à un postulat apriorique inévitable : celui de la persistance de la matière.

Ce postulat d'origine purement rationnelle ¹ forme une nouvelle antinomie avec le fait empirique (par conséquent sensible) de la disparition des substances au moment de la combinaison, et de leur réapparition lors de la décomposition. C'est pour résoudre cette antinomie qu'on intercale une substance dans une autre, de même que les atomistes intercalèrent le vide dans le plein pour sortir de l'antinomie de l'être et du non-être. Comme ni A ni B ne peuvent disparaître, et que C ne peut pas naître, il faut bien que les deux premiers existent d'une manière latente dans C, et que l'existence et toutes les propriétés de C soient expliquées par cette persistance latente de A et de B.

Mais notre description de la combinaison n'est pas encore complète. Il ne suffit pas que A et B disparaissent en deux lieux quelconques, et que C apparaisse en un troisième, pour que nous puissions dire que C est produit par la combinaison de A et de B. La condition essentielle, indispensable, est que la disparition et l'apparition se produisent dans un même lieu.

Nous avons vu que chaque corps produit sa propre place. La condition préalable de la combinaison est la juxtaposition des corps ². Mais nous n'avons le droit de parler de combinaison, que lorsque les deux corps cessent d'exister

1. C'est la *conditio sine qua non* de la régularité dans le monde phénoménal. Dans un monde où « tout pourrait naître de tout », aucune régularité, aucune prévision, et par conséquent aucune science ne serait possible. Un tel monde serait incompréhensible. Mais le contraire doit être admis comme une condition d'investigation fructueuse.

2. Cette condition est exprimée dans les termes de la Chimie moderne par l'assertion que les forces chimiques n'agissent qu'à des distances infiniment petites.

comme tels. Dès lors, il n'y a plus deux places occupées par les deux corps : il n'y en a qu'une seule. Si donc nous persistons à admettre l'existence des deux corps A et B dans le corps composé C (et cette hypothèse est inévitable, comme nous l'avons vu), nous pouvons donner la définition qui suit :

La combinaison chimique a lieu, lorsque deux ou plusieurs corps occupent une seule et même place.

Remarquons qu'il ne s'agit pas de la mesure des volumes. Le volume de C peut être réduit par rapport à la somme des volumes de A et de B, comme c'est le cas dans la plupart des réactions, ou il peut la surpasser, comme il arrive quelquefois. Ce n'est pas la *quantité* de l'espace que nous prenons en considération, mais l'identité de lieu, l'impossibilité de distinguer des parties hétérogènes dans l'étendue du corps.

On voit tout de suite en quoi cette conception de la combinaison (qui n'en est que la description exacte) diffère de la notion que nous offre l'hypothèse atomistique : celle-ci n'est qu'une juxtaposition d'atomes hétérogènes, dont chacun occupe sa place propre, quoique infiniment petite. La difficulté n'y est pas résolue, mais transportée dans le domaine de l'infinitésimal.

Une conséquence bien intéressante découle de la conception que nous venons de développer : c'est qu'il existe une Chimie à deux dimensions. L'idée de la matière, qui est intimement liée à celle de la troisième dimension, forme le concept fondamental de la Physique. Mais, en Chimie, ce

sont les qualités qui entrent en jeu. Quand deux corps se combinent pour en former un troisième, ce n'est pas la matière des deux premiers qui disparaît pour donner lieu à la matière du troisième; tout au contraire, nous admettons que la matière ne change pas, du moins quant à sa quantité, et nous avons une tendance à supposer qu'elle reste la même quant à son essence. Mais les qualités du chlore et du sodium disparaissent totalement pour faire apparaître les qualités parfaitement distinctes du chlorure de sodium, lorsque la combinaison des éléments a eu lieu.

Le fondement perceptif et subjectif de la distinction qualitative des matières différentes est (nous l'avons vu) la couleur. Mais la couleur n'a rien qui la lie essentiellement à l'espace à trois dimensions; c'est la surface, au contraire, qui en est la forme naturelle et primitive. Nous pouvons donc isoler cette qualité de la notion des corps, et opérer avec elle dans l'espace à deux dimensions. Le type le plus simple de la combinaison chimique, la Chimie à deux dimensions, c'est la combinaison des couleurs.

Lorsque deux ou plusieurs couleurs occupent la même place, elles disparaissent pour faire naître une troisième. On voit que cette formule, que l'on pourrait nommer la loi générale de la Chimie à deux dimensions, ne diffère de celle que nous avons donnée pour la combinaison chimique que par l'absence de l'idée de corps qui, comme on l'a vu, n'est pas essentielle.

En comparant la combinaison des couleurs avec celle des sons, nous remarquons d'abord une différence très marquée.

Nous entendons dans l'accord les sons élémentaires qui le composent; nous pouvons les distinguer, au moyen d'un résonateur de Helmholtz, qui ne fait que les renforcer, si faibles qu'ils soient. Au contraire, les couleurs qui se combinent ne laissent aucune trace de leur existence dans la couleur composée, et il faut une expérience physique assez compliquée pour les y découvrir. L'harmonie des sons est un mélange, tandis que le « mélange » des couleurs est une vraie combinaison. D'où vient la différence? De ce caractère spécifique de l'œil, que chaque qualité qu'il produit doit être étendue. Les sons n'occupent pas de places; c'est pourquoi ils ne peuvent pas former de combinaison, car, nous l'avons vu, la coïncidence spatiale en est la condition essentielle.

Une autre différence bien remarquable consiste en ce qu'un certain effet harmonieux n'est produit que par une consonance de sons déterminés et toujours les mêmes; tandis qu'une couleur « composée » peut être formée par des combinaisons diverses des couleurs composantes. En fait, il n'y a pas de couleurs simples ou composées. On sait que toutes les couleurs possibles peuvent être produites par une combinaison de trois couleurs fondamentales choisies arbitrairement parmi celles du spectre. Il n'y a donc pas, à proprement parler, d'analyse dans la Chimie à deux dimensions¹, puisqu'on ne peut jamais savoir si les composants sont identiques aux produits de la décomposition.

1. Nous parlons de l'analyse psychologique des couleurs comme impressions. On sait qu'au moyen du spectroscope on peut décomposer chaque couleur dans les vibrations élémentaires dont elle est composée, disposées suivant leur longueur d'onde. Mais c'est une analyse objective qui n'a rien à faire avec celle des sen-

Revenons maintenant au postulat qui est le but idéal de la Chimie moderne : celui de l'unité de matière. On conçoit aisément que la conception de la combinaison, admise dans la Chimie contemporaine, est absolument incompatible avec cette tendance : les mélanges des atomes ne peuvent différer entre eux que lorsque les atomes sont hétérogènes. S'il n'y avait qu'une matière, ces atomes ne feraient que la reproduire toujours, et il n'y aurait pas de combinaisons. On peut réduire la quantité des éléments jusqu'à un certain nombre. Les formules structurales de la Chimie organique et les conceptions de la Stéréochimie sont autant de moyens de réduire la quantité des éléments et de remplacer l'hétérogénéité matérielle par des différences formelles de position. Mais avec tous ces moyens on pourrait réduire le nombre des éléments à quatre ou cinq, jamais à *un*. Non seulement la Chimie atomistique, mais *toute Chimie matérialiste en général, c'est-à-dire toute Chimie qui considère les différences qualitatives comme inhérentes aux substratums matériels, est en opposition permanente avec l'idée de l'unité de matière.*

D'autre part, l'idée de combinaison, que nous venons de proposer, est absolument incompréhensible, si nous prenons pour point de départ la conception matérialiste. Comment deux corps peuvent-ils occuper la même place ? Comment les qualités, qui sont inhérentes aux substances, peuvent-

sations. Ainsi la couleur jaune est toujours une couleur élémentaire pour le spectroscope. Mais nous pouvons obtenir l'impression de cette couleur par une superposition du rouge et du vert. La couleur blanche peut être produite par toute une série de composants pris par deux, par trois, ou plus.

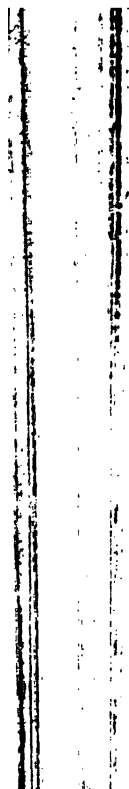
elles changer quand ces substratums restent les mêmes? Voilà les questions auxquelles nous ne pourrons jamais répondre, si nous ne quittons pas ce point de vue.

Mais la Physique nous montre le moyen d'éviter ces difficultés. Si elle réduit les qualités hétérogènes, produites par la différence des organes des sens, à des différences quantitatives, pourquoi ne pourrions-nous pas faire de même pour les qualités diverses d'un même sens? Pourquoi ne pourrions-nous pas considérer les corps divers comme autant d'*états* d'un substratum quelconque? comme une forme de mouvement par exemple?

Si le chlore et le sodium n'étaient que deux formes d'ondes d'une substance hypothétique (disons : d'un éther chimique), il n'y aurait rien d'impossible à ce qu'ils occupassent une même place : ce ne serait qu'une onde nouvelle produite par leur interférence, et comme la forme en serait toute autre que celle de chacune de ses composantes, les qualités du produit de la composition, c'est-à-dire l'action de l'onde résultante sur nos sens seraient tout à fait différentes de celles des composantes.

Ce n'est pas ici le lieu de développer cette hypothèse. Nous la considérons comme une suggestion que la Philosophie peut fournir à la Chimie. Elle paraîtra bien étrange à beaucoup de chimistes. Mais (nous l'avons indiqué) la Chimie est entrée dans la voie de la « dématérialisation » de ses concepts au moment où elle adopta la théorie des substitutions. N'était-ce pas un chimiste éminent qui tâchait de tourner en ridicule cette théorie, en objectant l'acide

acétique, dont tous les composants étaient remplacés par le chlore, et qui ne cessait pas néanmoins d'être acide acétique ? C'est que le préjugé matérialiste n'est pas facile à vaincre. Nous espérons pourtant que les travaux philosophiques dans le domaine de la théorie de la connaissance appliquée à la philosophie des sciences faciliteront la transition qui se fait déjà jour en Physique : celle des concepts matérialistes aux concepts idéalistes.



ÉTUDE CRITIQUE SUR LES PRINCIPAUX CONCEPTS FONDAMENTAUX DE LA CHIMIE

Par FRANZ WALD,

Chimiste en chef de l'usine métallurgique de Kladno (Bohême).

Introduction.

Autant que nos renseignements historiques s'étendent, on a toujours cherché, dans l'étude des phénomènes chimiques, la « composition » des corps au moyen de certains « éléments », encore que le concept d'*élément* ait subi de profondes transformations, depuis les quatre éléments d'ARISTOTE jusqu'aux 80 éléments environ de la Chimie moderne. Il semble par suite que la notion de *composition* d'une substance avec des *éléments* soit une forme d'intuition aussi nécessaire et aussi simple que par exemple l'espace ou le temps. La seconde partie du présent travail tend à démontrer que cette opinion est complètement erronée, et qu'on peut considérer les phénomènes chimiques d'une manière toute différente et plus générale.

Pour faciliter le passage à cette nouvelle conception, la première partie rend brièvement compte des travaux anté-

rieurs de l'auteur, qui avaient été entrepris en conservant encore les conceptions fondamentales usuelles. On y a réuni les éléments chimiques et les combinaisons chimiques sous l'expression d'« individus chimiques ».

I. — *Les individus chimiques.*

1. L'hypothèse atomique représente à l'esprit les éléments et les combinaisons chimiques comme des formes existant *toutes faites*, tandis qu'ils s'offrent à l'observateur non prévenu comme des produits d'opérations souvent très difficiles et très longues, en un mot, comme des *préparations*.

D'après l'hypothèse atomique, les combinaisons consistent en un très petit nombre d'*atomes*, qui sont eux-mêmes de petits corps solides (par suite, dans un « état d'agrégation » fixe, et non fluides), qui n'éprouvent aucune altération et qui ne peuvent pas *naître*, bref, qui sont les produits d'un *acte de création*.

Nous ne voulons pas prendre d'avance une attitude hostile à l'égard de l'hypothèse atomique; et nous devons convenir qu'elle a rendu beaucoup de services à la Chimie. Mais il y a aussi en Chimie bien des questions importantes qu'il faut exclure de la discussion, quand on accepte *a priori* cette hypothèse.

Quand on se représente dans la nature des atomes et des molécules comme tout faits, on ne peut assigner à la Chimie d'autre objet que d'étudier les combinaisons bien définies des atomes, tandis que les mélanges variables des

éléments et des combinaisons doivent en être exclus comme des substances non-chimiques, et peuvent tout au plus être regardés comme des matériaux bruts d'où l'on tire les individus chimiques.

La Chimie scientifique aurait donc, par exemple, à s'occuper du chlorure de sodium pur et de l'eau pure, mais non de la dissolution du chlorure de sodium dans l'eau; et si elle le fait, ce n'est que pour des raisons pratiques, car ce problème devrait proprement ressortir à la Physique. Mais comme de tels objets ne peuvent pas non plus être logiquement attribués à la Physique, nous voyons apparaître une science intermédiaire, la *Chimie physique*, qui emprunte sa matière à la Chimie et sa méthode à la Physique.

Un tel état de choses, dans n'importe quel domaine de la science, ne peut pas satisfaire longtemps l'esprit humain; aussi un maître dans ces recherches, le Prof. OSTWALD, a-t-il dès le début opposé sa science, comme *Chimie générale*, à la Chimie ordinaire, comme *spéciale*. Mais l'état *de fait*, suivant lequel les travaux de cet ordre sont appelés physico-chimiques, cache un danger qu'il faut faire nettement ressortir : car il repose sur une *arrière-pensée* tacite, incontestée et pourtant indémontrée, qui me paraît être une source perpétuelle d'erreurs. C'est l'idée que les causes des combinaisons chimiques proprement dites sont *radicalement différentes* de celles qui peuvent produire des mélanges homogènes à composition variable de ces combinaisons.

Or cette idée paraît inséparable de l'hypothèse atomique, et a toujours été maintenue dans ce sens. On n'a, pour justifier cette conception, pas d'autre raison que la prétendue différence des effets de ces causes, laquelle ne tombe pas sous les sens. Ce seraient, d'une part, des forces qui agiraient directement entre les atomes; d'autre part, des forces entre les molécules; les premières engendreraient, dit-on, les substances de composition constante, c'est-à-dire les combinaisons chimiques ou « molécules »; les dernières produiraient les substances de composition variable, c'est-à-dire les mélanges physiques, ou mélanges de molécules d'espèces différentes. Mais comme il y a encore certaines combinaisons que la théorie des valences ne peut pas bien expliquer, on admet aussi la formation de combinaisons chimiques de molécules (par suite, des molécules de molécules).

Il ne faut pas juger trop sévèrement cette inconséquence, car elle peut s'excuser par l'imperfection de nos hypothèses, leur développement continu et leur approfondissement progressif. Mais alors on perd le droit de maintenir la distinction des causes physiques et des causes proprement chimiques, et d'en faire la base de toute recherche, comme l'exige la théorie atomique.

2. A l'idée fondamentale de cette théorie, à savoir que ce sont des causes radicalement différentes qui produisent, d'une part, les combinaisons « chimiques » homogènes, et d'autre part, les mélanges « physiques » homogènes (par exemple, les solutions), j'ai depuis plusieurs années opposé

l'idée que nous avons affaire dans les deux cas à des phénomènes essentiellement *semblables*, et que la production de substances de composition soit constante, soit variable, dépend seulement de circonstances *accidentelles*¹. Je conçois la composition de chaque substance comme variable en principe; mais tandis que, par exemple, la composition d'une solution « saturée » d'alun varie très notablement avec la température, celle d'une solution de chlorure de sodium, en présence d'un excès de sel, ne varie qu'assez peu entre -10° et $+80^{\circ}$ C. environ, et celle d'une autre combinaison de chlorure de sodium avec l'eau, en présence de la solution précédente, ne varie pas du tout au-dessous de 10° C. environ. Or on appelle la première une dissolution du chlorure de sodium dans l'eau; et l'on conçoit ordinairement la seconde comme une composition chimique (moléculaire) et on lui donne la formule $\text{NaCl}, 2\text{H}_2\text{O}$. Mais pour moi, une combinaison « chimique » n'est qu'un cas particulier (cas-limite) d'un mélange homogène à composition variable, à savoir celui où, pour des causes particulières *accidentelles*, la *variabilité* habituelle, plus ou moins grande, de la composition descend au-dessous de toute limite perceptible.

3. On peut exposer et faire comprendre cette idée d'une manière bien plus claire et plus précise, si l'on prend la peine de s'initier à certaines conceptions que M. J.-W. GIBBS

1. *Listy Chemické*, années XVII-XIX; *Zeitschrift für physikalische Chemie*, XVIII, 339; XIX, 667. Voir d'autres publications de l'auteur, qui se rapportent au même objet, ap. *Zeitschrift für physikalische Chemie*, XXII, 253; XXIII, 78; XXIV, 633.

a introduites dans la science¹. Ce n'est pas ici que je puis exposer les idées de M. Gibbs, même seulement les plus importantes. Je ne puis qu'indiquer brièvement que M. Gibbs appelle *phase* tout corps homogène de composition variable. De telles phases peuvent être aussi bien des mélanges de gaz que des dissolutions, soit fluides, soit solides. Des phases qui sont en contact immédiat et qui peuvent influencer mutuellement sur leur quantité ou leur composition, s'appellent phases *coexistantes*, en supposant que dans leurs actions réciproques elles aient atteint l'état d'équilibre. Si, par exemple, nous mettons dans une bouteille de l'eau avec une quantité suffisante d'un sel, que nous fermions la bouteille, où reste encore de l'air, et que nous établissions l'état final en secouant la bouteille à température constante, nous obtenons un système de trois phases coexistantes, à savoir (en gros) une dissolution de sel dans l'eau, un excès de sel et un mélange d'air et de vapeur d'eau. (La phase liquide comprendra aussi une petite quantité d'air dissous.) Si la température varie, la quantité de sel dissous, celle d'oxygène dissous, etc., varieront, et aussi la quantité de vapeur d'eau dans l'air; naturellement, le rapport de l'oxygène à l'azote, etc., dans l'air variera aussi légèrement.

Dans l'exemple précédent, le sel solide varie seulement en quantité, non en composition; mais il y a des exemples

1. Les mémoires de M. Gibbs des années 1873-78, qui ont paru dans les *Transactions of the Connecticut Academy*, et qui sont particulièrement importants pour notre sujet, ont été traduits en allemand en 1882 par le Prof. OSTWALD et en français récemment par M. LE CHATELIER : *Équilibre des systèmes chimiques*, 1 vol. in-8 de la *Bibliothèque de la Revue générale des Sciences* (Paris, Carré et Naud, 1899).

où toutes les phases varient en composition. Si l'on prend, par exemple, du phénol pur, cristallisé, et qu'on ajoute une petite quantité d'eau, non seulement l'eau prend du phénol, mais encore le phénol prend de l'eau, et les rapports de mélange de ces corps se montrent variables avec la température (et aussi dans une certaine mesure avec la pression).

Le concept de *phase* constitue une importante généralisation des concepts ordinaires de la Chimie « pure », il les précise et élargit leur portée. La Chimie « pure » ne cherche que des « individus chimiques », et ne s'occupe que très accessoirement des autres corps qui peuvent apparaître en même temps. Grâce à M. GIBBS, *toutes* ces substances sont devenues l'objet de la recherche, ils ont tous droit à une *égale* attention, et cela d'autant plus qu'on peut établir une loi très générale, tout à fait indépendante du fait que les phases coexistantes sont des individus chimiques ou des mélanges variables.

M. GIBBS transporte en effet dans ce domaine les concepts, si utiles en Mathématiques, de « variations indépendantes » et « dépendantes ». Si, par exemple, un sel se met en équilibre avec sa solution aqueuse, nous sommes libres d'élever sa *température*. Nous produisons ainsi une « variation indépendante de la température », qui a pour conséquence nécessaire une variation de la concentration de la solution, de son volume, de sa densité, etc.; ce sont alors des « variations dépendantes » dans les propriétés de la solution. Or M. GIBBS a trouvé une loi importante tou-

chant le nombre des variations *indépendantes* ; il a établi combien de variations indépendantes différentes peuvent être imposées à un système de phases pour que le nombre des phases reste invariable, et a trouvé leur nombre égal à :

$$n + 2 - r,$$

n étant le nombre des éléments indépendants définis en particulier, et r le nombre des phases.

Dans la théorie des phases de M. Gibbs, on peut évidemment concevoir aussi les variations de composition des phases comme pouvant être indépendantes, suivant les cas. Si l'on considère des variations dépendantes de la composition des phases, elles peuvent avoir des valeurs très différentes d'une phase à l'autre ; leur grandeur dépend de la constitution individuelle des phases coexistantes, et il est fort possible que pour des phases particulières elle atteigne la valeur *zéro*. Dans ce cas le chimiste donne une attention spéciale à ces phases qui paraissent particulièrement résistantes, et qui ne varient qu'en quantité et non en composition ; il les appelle des individus chimiques et en fait l'objet principal de son étude.

Je crois pourtant que ces individus ont aussi, en général, une composition variable ; si dans certains systèmes de phases on les obtient avec une composition constante, cela tient, selon ma conception, non à ce qu'ils sont caractérisés par des propriétés spéciales, mais à ce que les propriétés des autres phases coexistantes, à composition variable, sont dans une relation particulière à l'égard de celles de la phase

individuelle. Pour un changement convenable de ces phases coexistantes, la phase individuelle, qu'on croit absolument invariable, éprouverait une variation de composition.

La Chimie ordinaire, qui ne s'intéresse qu'aux phases individuelles, me paraît alors, naturellement, comme une partie très étroite et assez arbitrairement délimitée d'une science bien plus étendue, qu'on peut appeler la *théorie générale des phases*, et qui devrait comprendre, avec la Chimie ordinaire, tout le domaine des solutions homogènes à composition variable, et par suite la Chimie physique¹.

4. Dans cette conception, une substance donnée ne peut être regardée comme un individu chimique que si l'on est sûr qu'elle a été en coexistence avec d'autres phases, et qu'elle aurait *pu* changer de composition. Il faut savoir que les autres phases étaient capables d'absorber ou de rendre ses éléments, et qu'il s'est produit au moins *une* variation indépendante (par exemple de la température, de pression, de la quantité relative d'un élément dans une phase variable), qui entraîne d'ordinaire des variations dépendantes dans la composition des phases; que, de plus, *toutes* ces variations indépendantes (en tant qu'elles étaient compatibles avec la coexistence du nombre donné de phases suivant la règle de M. GIBBS) ont été accomplies, et que néanmoins la phase considérée comme individu chimique

1. L'opinion ici émise a sans doute beaucoup de raisons à faire valoir au point de vue chimique, mais je crains qu'elle ne soit pas tout à fait acceptable au point de vue mathématique. On voudra bien remarquer, en tout cas, que je rapporte ici mes opinions d'une période antérieure.

est restée invariable en composition, sinon en quantité.

Cette explication fournit la première définition exacte d'une composition chimique. Bien que jusqu'alors tout chimiste eût le *sentiment* juste de ce qu'on entend par individu chimique, il était impossible, avant l'introduction de la théorie des phases de M. GIBBS, d'exprimer cette conception d'une manière assez précise pour que dans les cas concrets on pût savoir sans aucun doute si l'on avait affaire ou non à des individus chimiques. Après un règne presque centenaire, l'hypothèse atomique était donc en fait incapable de définir un des concepts chimiques les plus importants.

Qu'une définition exacte de l'individu chimique ne soit nullement superflue, c'est ce que prouve le fait qu'on a souvent discuté pour savoir si une préparation déterminée peut ou non être considérée comme une combinaison chimique. Il n'y a pas longtemps encore, un chercheur à bon droit renommé fut fort étonné de trouver que des combinaisons cristallisées peuvent contenir une quantité d'eau variable, et même variable d'une manière continue, et par suite ne peuvent être des individus chimiques; c'est qu'il était parti de l'opinion traditionnelle, que la possibilité d'obtenir une substance sous forme de gros cristaux clairs et physiquement homogènes était une garantie suffisante de son individualité chimique, pour être obligé ensuite par ses recherches de reconnaître la vérité du contraire¹.

5. Bien que nous devions à M. GIBBS l'invention du concept de *phase* et presque tous les développements théo-

1. *Zeitschrift für physikalische Chemie*, XXVII, 323.

riques qui s'y rattachent, je suis obligé de remarquer que la conception ici présentée des individus chimiques comme de phases de composition accidentellement invariable ne provient pas de lui, mais de moi (et en un certain sens de BERTHOLLET); car, en laissant de côté toute question de priorité, je dois tenir compte de ce fait, que M. Gibbs reste attaché à l'hypothèse atomique, et par suite ne peut guère être tenté de reconnaître les idées soutenues ici comme sa propriété, ou seulement comme une conséquence de ses propres idées.

6. Qu'il me soit encore permis de faire une courte remarque historique. Ma conception des individus chimiques représente sur un point essentiel la continuation moderne d'idées qui ont été éclipsées pendant près d'un siècle. On sait que les conceptions géniales de BERTHOLLET au commencement du XIX^e siècle ne rencontrèrent pas un terrain favorable, et qu'elles n'ont retrouvé l'attention qu'elles méritent que depuis quelques dizaines d'années.

BERTHOLLET avait soutenu avec beaucoup de pénétration cette idée, que la composition de tous les produits d'opérations chimiques était variable; il concevait ces substances comme des phases variables, au vrai sens moderne du mot; il était à certains égards le précurseur direct de M. GIBBS. Mais BERTHOLLET succomba dans sa lutte avec PROUST, qui prouva qu'il y a un grand nombre de phases de composition constante (ou variable d'une manière *imperceptible*). Or il me semble qu'on fait encore aujourd'hui grand tort à BERTHOLLET en lui reprochant comme une erreur de n'avoir

pas voulu reconnaître la constance de la composition des individus chimiques, alors que cette constance était regardée (à ce qu'on croit) par ses contemporains comme assez bien établie, sinon peut-être comme prouvée tout à fait sûrement. On oublie qu'*alors* la Chimie prenait encore pour objet la recherche de *tous* les phénomènes produits par l'action réciproque des diverses substances, et qu'il n'y avait pas encore de distinction entre les individus chimiques et les mélanges homogènes non-chimiques, au sens moderne du mot.

BERTHOLLET préférait inconsciemment croire que seules les substances vraiment *élémentaires* possèdent une composition constante, et naturellement très simple. Lors donc que PROUST avait raison contre BERTHOLLET, il acquérait à la science un fait important, mais il semait en même temps le germe de cette conception étroite des problèmes de la Chimie, qui a prévalu depuis lors, et qui se limite exclusivement à la production des individus chimiques. C'est alors seulement que se produisit une distinction rigide entre les combinaisons chimiques et les mélanges non chimiques (quoique homogènes), ce qui engendra l'habitude constante de négliger systématiquement l'étude de ces derniers.

Mais, chose étonnante, une conséquence immédiate de la découverte de PROUST est restée inaperçue jusqu'à nous. L'idée de BERTHOLLET, à savoir que toutes les combinaisons chimiques avaient une composition variable, ne pouvait provenir que de l'hypothèse tacite, que les « corps élémen-

taires » occupent une place particulière dans la nature; car toute analyse des corps naturels est à peu près inconcevable, si l'on regarde même les phases élémentaires comme variables en toutes circonstances. Or, si l'on constate d'autre part que d'autres phases encore ont une composition constante, au moins dans certains cas, on doit en conclure que les « éléments » n'ont par là aucun privilège par rapport aux autres individus. C'est là une pensée que nous développerons davantage dans la seconde partie de ce travail.

7. Nous sommes maintenant en présence d'innombrables individus chimiques, dont beaucoup ont été découverts avec une dépense extraordinaire d'ingéniosité et de peine. Mais si l'on considère sans parti pris l'ensemble des phénomènes dont s'occupe le chimiste, on ne peut méconnaître que la Chimie du xix^e siècle s'est bornée volontairement à cultiver un champ de recherches *beaucoup trop étroit*. Elle l'a fait sans doute dans la conviction qu'il fallait d'abord connaître les individus très résistants chimiquement, avant de pouvoir passer à l'étude des phases variables, et a réservé à l'avenir cette dernière partie du travail.

Mais, avec le temps, on oublia presque qu'il reste un vaste domaine à explorer, et les recherches consacrées à ces questions ne sont plus considérées à présent comme proprement chimiques, mais tout au plus comme physico-chimiques. Les bornes que la Chimie s'était imposées au début du siècle, d'une manière provisoire et pour des motifs

pratiques, sont devenues par habitude une prétendue nécessité théorique, et le champ fécond laissé en dehors n'est plus considéré comme appartenant à la Chimie.

Cet état de choses ne serait nullement regrettable, s'il n'était lié avec le préjugé que la Chimie peut, de son domaine limité, conquérir tous les domaines voisins. Alors qu'elle n'étudie qu'un champ très restreint dans le vaste territoire des phénomènes des systèmes de phases, elle croit pouvoir fournir tout ce qui est nécessaire à l'intelligence de l'ensemble de ces phénomènes. Au lieu de chercher dans la théorie générale des phases la solution des difficultés qu'elle ne peut surmonter dans son propre domaine, elle croit avoir répondu à toutes les questions dont elle ne s'est même pas occupée jusqu'ici.

Nous venons de discuter l'idée que les individus chimiques ne sont que des phases à propriétés particulièrement remarquables, et nous sommes arrivé ainsi à la première définition exacte de l'individu chimique. Nous allons maintenant voir s'il ne reste plus rien à faire.

II. — *Les transformations de la matière.*

1. Dans la section précédente, j'ai exposé que la conception aujourd'hui courante des individus chimiques a besoin d'une certaine modification, quand on veut rendre mieux compte des faits et étendre son horizon au delà du cadre étroit de la Chimie « pure ». Mais une fois qu'on a réussi à s'affranchir des conceptions atomiques traditionnelles, on reconnaît bientôt que la modification proposée n'est pas

suffisamment radicale, car il se présente bientôt une foule de nouvelles questions, dont nous avons maintenant à parler, bien que je ne croie nullement pouvoir en donner une solution définitive, et me contente d'appeler sur elles la discussion.

Nous avons jusqu'ici parlé sans réserve de la *composition* des phases, et par suite employé sans scrupule le concept d'« élément ». Mais qu'entend-on par éléments, et comment les connaît-on? Est-il nécessaire ou seulement utile de parler d'éléments en Chimie, et, dans ce cas, quels sont les faits qu'on veut exprimer par ce concept? Ce concept est-il propre à décrire tous les processus chimiques, ou peut-être en le formant renonce-t-on d'avance à étudier plus à fond certains processus? Quels phénomènes constituent l'objet de l'étude chimique?

2. Il n'y a encore aujourd'hui aucune science qui soit capable de traiter tous les phénomènes; chaque science se contente d'étudier plus précisément une *face* particulière du monde de la perception; chaque science spéciale ne considère pour ainsi dire qu'une projection de l'univers, une image plus ou moins idéalisée des faits, et l'on n'a pas encore réussi à construire, avec ces images partielles, un modèle suffisamment exact et complet de l'ensemble des faits, et peut-être même n'est-il pas probable qu'on y réussisse jamais. Mais on peut demander que chaque science s'efforce de mettre en lumière quelle face des phénomènes elle *veut* considérer, et lesquelles elle *néglige* *exprès*.

La Chimie est une science naturelle, et l'on peut se dis-

penser d'expliquer ici quelle partie du devenir se trouve exclue par la détermination du domaine *chimique*; on peut aussi regarder comme donné le concept de *corps*, encore qu'il ait subi dans l'histoire bien des transformations: qu'il suffise de rappeler, par exemple, qu'il y a quelques siècles les gaz étaient à peine considérés comme des corps.

Dans chaque corps nous remarquons une foule de caractères distinctifs, parmi lesquels la forme et la grandeur, ainsi que les distances à d'autres corps. En Chimie, on n'étudie que les phénomènes où les corps intéressés sont en contact immédiat, et qui ne dépendent pas essentiellement de leur forme ni de leur grandeur.

Par là on forge pour les besoins de la Chimie une abstraction du concept de corps, le concept de substance¹. Une observation superficielle nous fait connaître aussi bien des substances très stables que des substances qui subissent aisément des altérations, et même qui disparaissent complètement en apparence. Une étude plus attentive des phénomènes « chimiques » montre bientôt qu'il ne se produit guère de *disparition totale* d'une substance, sans quelque changement des autres corps, et ainsi se forme bientôt l'idée que la matière est *permanente* dans sa *quantité* (bien qu'on manque au début de tout criterium pour la mesurer ou même la définir), mais variable dans toutes ses autres propriétés. Tandis que les expériences éparses

1. Nous traduisons ici par *substance* le mot *Stoff*, qui signifie aussi *matière* en général. (Note du traducteur.)

de la vie pratique n'affirment ni ne démentent catégoriquement la variabilité de la matière, une collection systématique de phénomènes « chimiques » fournit bientôt une telle abondance de transformations surprenantes et inattendues, qu'elle conduit aussitôt à la première théorie chimique, celle de la parfaite transformabilité de la matière. Toute transformation *concevable* apparaît comme *possible*, et la Chimie prend par là un caractère éminemment pratique : elle cherche à réaliser les transformations particulièrement désirables, et devient l'alchimie qui cherche la pierre philosophale.

Après mille ans d'efforts stériles, cette théorie s'est effondrée, et nous en avons recueilli la conviction qu'un certain nombre de transformations n'est sûrement pas réalisable pour nous jusqu'ici.

L'acquisition de cette connaissance a complètement changé le but de la recherche chimique pour un certain temps (depuis BECHER et STAHL); tout l'intérêt s'est concentré sur la *distinction* exacte des transformations vraiment *réalisables* et de la foule des transformations simplement *concevables*.

Depuis lors, toute conception qui semblait menacer de retomber dans les erreurs de l'alchimie a soulevé une terreur systématique, et cette tendance psychologique a régné jusqu'à présent dans la masse des chercheurs. C'est d'elle qu'est née l'opposition tranchée des *éléments* chimiques et de leurs combinaisons. Nous allons examiner de plus près cette opposition, et nous verrons qu'on peut par-

faitement rendre compte de ces phénomènes, *sans être obligé de poser la question des éléments de la matière.*

3. Parmi les propriétés de la matière, la *masse* s'est manifestée comme particulièrement invariable, peut-être même comme absolument constante, et par suite nous déterminerons (comme c'est l'usage général depuis LAVOISIER) la *quantité* de la matière par sa masse. D'autres propriétés des corps (en dehors de leur situation, de leur forme et de leur grandeur, dont nous faisons abstraction) sont susceptibles de changements variés, mais non de tout changement *concevable*. L'impossibilité de réaliser certains changements concevables conduit à l'hypothèse de corps « élémentaires » essentiellement différents; pourtant il y a aussi des changements qui ne se réalisent que difficilement, sans être tout à fait impossibles, et alors l'esprit des chimistes hésite entre l'identité et la diversité des corps donnés, car on manque jusqu'ici d'un criterium précis, et la décision dépend beaucoup de la convention.

En général, personne n'admettra aisément un changement de matière, quand par exemple l'eau change de température; et pourtant il y a un certain nombre de corps (comme le peroxyde d'azote N^2O^4) où l'on suppose que des changements de matière sont produits par des variations de température.

Sans parler de ces exceptions, qui sont motivées par des circonstances particulières, on tend plus ou moins consciemment à considérer des corps sensiblement différents comme différents aussi chimiquement, en tant qu'ils ne

possèdent pas dans les mêmes conditions physiques des propriétés parfaitement identiques. En cela des différences relativement fort peu importantes (comme par exemple entre les acides tartriques droit et gauche) peuvent être décisives, tandis que de notables différences (comme entre l'eau, la glace et la vapeur) peuvent être complètement négligées. On exige des substances chimiquement identiques que leurs propriétés soient déterminées d'une manière entièrement univoque par les conditions extérieures, dites physiques, bien qu'à cet égard on ne soit pas arrivé à des résultats pleinement conséquents. Du moins on a par là la possibilité de définir l'identité chimique des substances au moyen de la loi des phases de M. GIBBS ($n + 2 - r$ avec $n = 1$).

4. De telles considérations n'étaient guère possibles aux anciens chercheurs, et si nous voulons suivre le grand courant des idées chimiques, il faut nous contenter, au moins provisoirement, de considérer comme différentes deux substances entre lesquelles on peut remarquer des différences quelconques, sans examiner plus à fond si cette différence est chimique ou non.

Nous désignerons maintenant de telles substances par $a, b, c, \dots$ et quand nous parlerons de quantités (ou masses) déterminées de ces corps, nous adjoindrons à ces lettres des indices, en écrivant $a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots$ etc. Ces indices n'indiqueront que la *diversité* des masses, par exemple de a_1 et de a_2 , mais non leur rapport (comme si $a_1 : a_2 = 1 : 2$). Par rapport à la constance de la masse, nous pourrions

exprimer le cas le plus simple de changement de matière par l'équation :

$$a_1 = b_1.$$

De tels processus peuvent encore se distinguer à bien des égards; un cas très fréquent est celui où la masse d'un corps diminue, et celle d'un autre, en contact avec lui, augmente d'une manière continue, sans qu'on puisse constater un autre changement de leurs propriétés (exemple : le phosphore jaune et le phosphore rouge à la température ordinaire). Parfois, le processus est réversible, il peut être arrêté à volonté et effectué en sens inverse (exemple : le soufre soluble et le soufre insoluble). Dans des cas plus rares encore, l'état des deux corps est déterminé d'une manière univoque par des conditions physiques (exemple : vapeur d'eau, glace ou eau), et alors on regarde les deux corps, encore aujourd'hui, comme tout à fait identiques chimiquement.

Dans d'autres cas (en particulier en Chimie organique), on constate un *retard* sensible des changements, et souvent il n'y a pas de limite spatiale entre les divers corps; la transformation de a en b s'effectue par une suite continue d'états intermédiaires, de sorte que a ne désigne que l'état initial, et b l'état final, et qu'on renonce à définir plus nettement les états intermédiaires. On conçoit alors ces états comme représentables par un mélange du corps a et du corps b différent du premier, lesquels peuvent être chacun en soi assez stables, mais qui sont amenés à la transformation observée soit par le contact, soit par d'autres circon-

stances. Beaucoup de transformations d'isomères sont de cette espèce. Enfin, il reste quelques cas où le processus en question ne peut être *directement* observé, et n'apparaît que comme le résultat final de nombreux processus intermédiaires (exemple : la transformation d'hydrocarbures isomères de la formule C^nH^m). Il est remarquable que l'ancienne Chimie n'ait accordé aucune attention spéciale à ces processus, ce à quoi contribuait d'ailleurs cette circonstance, qu'à part les processus physiquement réversibles de ce genre on en connaissait fort peu d'autres.

La principale raison pour laquelle on négligeait ces transformations résidait en tout cas en ce qu'elles se rapprochaient passablement de l'idée que l'école alchimiste s'était faite de la transformation de la matière ; comme cette idée avait été trouvée insuffisante pour *tout* expliquer, les générations suivantes avaient à *dessein* omis ces phénomènes, comme *non chimiques*. Toutes les fois qu'un corps *b* provient d'un corps *a* suivant l'équation :

$$a_1 = b_1,$$

on disait avec une certaine insistance que le corps *a* était *chimiquement* identique à *b*. Au lieu de dire : « *a devient b* », on disait : « *a est b* ». Par là on niait *a priori* la possibilité des isomères.

Cette conception me paraît être une réaction psychologique contre les anciennes théories alchimistes ; on niait toute différence *chimique* entre des substances qui étaient transformables sans difficulté, et l'on réservait son attention

pour les processus qui ne peuvent avoir lieu que par la coopération de *plusieurs* substances. Malgré de nombreux faits contraires, on est resté jusqu'ici fidèle à cette opinion pour les *commençants*.

5. Les réactions chimiques ne se produisent guère qu'au contact de *plusieurs* corps, quand ce ne serait que les vases, l'air, etc. Or une observation très superficielle montre déjà que la présence de bien des corps n'a aucune influence sensible sur le cours du phénomène, et ainsi se forme bientôt le concept de substances *indifférentes*, par opposition à celui des substances *actives* dans une transformation. Soit donc un phénomène où l'on a, par exemple :

$$a_2 + b_2 = b_2 + c_2 + d_2 + \dots$$

nous le concevons aussitôt dans le sens suivant :

$$a_2 = c_2 + d_2 + \dots$$

et nous laissons complètement de côté b_2 .

Ces idées apparaissent avec le temps comme une image très imparfaite des phénomènes, car on connaît aujourd'hui un assez grand nombre de processus où certains corps, sans éprouver eux-mêmes de changement sensible, ont une influence essentielle au moins sur le cours temporel de l'action réciproque d'autres corps (exemple : la mousse de platine, etc.). On doit mentionner ici une autre classe de phénomènes analogues se rapportant encore à l'équation précédente. Il peut arriver qu'un corps tel que b , mis en présence de a , donne un nouveau corps (par exemple : une solution), dont les propriétés peuvent être considérées, avec

une approximation grossière, comme une moyenne des propriétés des corps mélangés. Les produits de la réaction peuvent, au même degré d'approximation, être regardés comme une solution du corps *b* non altéré dans les corps *c*, *d* (ou inversement). Alors encore, on fait logiquement abstraction du corps *b*, en admettant *a priori* que sa présence est tout à fait indifférente. Mais avec le temps, on a constaté que cette abstraction ne pouvait s'effectuer d'une manière conséquente, parce qu'on découvrait que la nature du dissolvant (lors même que sa quantité ne change pas par la réaction), ou même de simples traces de certains corps, ont souvent une influence extraordinaire sur le cours du phénomène. C'est à de telles observations qu'on doit les théories modernes de la dissolution et les recherches sur la « catalyse ».

6. Ces considérations vont nous mener au point où s'établit, en Chimie, la composition des corps naturels.

Sans avoir atteint ce but, nous devrions déjà considérer comme but de l'étude chimique la *schématisation* des phénomènes naturels. Nous pourrions maintenant passer à la détermination des éléments; mais nous voulons insérer ici une observation dont les prémisses résultent de ce qui précède, tandis qu'il faudrait plus tard les rappeler à nouveau. Il faut sans doute supposer le concept de composition comme déjà formé, et les éléments comme connus; mais cela ne pourra guère choquer, d'autant plus que nous ne combattons pas absolument dans la suite l'existence de corps « élémentaires ».

Nous devons la connaissance des éléments à une suite d'idées où des particularités importantes des phénomènes naturels sont à présent oubliées à dessein, tandis que vers le temps de LAVOISIER on ne les avait pas encore remarquées ou on les considérait comme tout à fait accessoires. La recherche des éléments des corps était, alors du moins étroitement liée à l'idée que tout dépendait *uniquement* des éléments des corps. Autant qu'on pouvait en juger il y a un siècle, on pouvait croire que des substances « de composition chimique différente » offrent aussi à tout autre égard une différence essentielle ou tout au moins notable, et réciproquement, que *des substances essentiellement différentes ont aussi une « composition différente »*. La première thèse n'a pas été réfutée jusqu'ici, et sa ruine nous ramènerait à l'alchimie; mais la seconde ne peut plus subsister, depuis que l'on a découvert (notamment en Chimie organique) toute une série de corps qui ont sûrement la même composition, mais qui néanmoins sont tellement dissemblables qu'on ne peut pas les considérer comme identiques même par la plus grossière approximation.

Si l'on peut réaliser directement ou indirectement une équation chimique :

$$a_1 = b_1,$$

on ne peut plus guère en conclure que *a est b*.

Comme toujours dans la science, on n'a pas pour cela complètement abandonné l'ancienne théorie, on l'a seulement modifiée : on a d'abord imaginé d'autres éléments composés des premiers éléments, les *radicaux* ou *restes*, et on

faisait naître de leur combinaison les autres corps, qui alors, tout en ayant la même formule brute, pouvaient être différemment composés avec les éléments intermédiaires, et par suite avoir une « structure » différente. Par là on ramenait, au moins d'une manière *formelle*, la différence des propriétés à une différence de composition. On employait aussi fréquemment certaines diversités des propriétés physiques (par exemple : la densité de vapeur), pour attribuer à divers corps de même composition un « poids moléculaire » différent, mais cela ne changeait essentiellement rien au *principe* d'explication, tout en fournissant une plus grande variété d'interprétations disponibles pour les cas d'isomérisie donnés.

On sait qu'avec le temps ces hypothèses ne purent plus suffire, et qu'on recourut alors à l'idée d'un arrangement spatial différent des atomes identiques en nombre et en nature dans la « molécule ». On aboutit ainsi aux « isomérisies de position », qui ne paraissent guère intelligibles qu'au point de vue de l'hypothèse atomique.

La Chimie est partie de l'idée que, dans tous les cas où un corps *b* naît n'importe comment d'un corps *a*, *a* est identique à *b*; et comme, en formant ses concepts fondamentaux, et en particulier celui de *composition*, elle n'a pas *voulu* expliquer ces sortes de phénomènes, il s'ensuit naturellement qu'elle ne le *peut* plus, sans invoquer de nouveaux principes d'explication. Si l'idée clairement établie au début, à savoir que *seule* la composition des corps rend compte de leur action chimique, ne pouvait plus être soutenue, il fal-

lait, *outre* la composition, envisager d'*autres* données. Bien que nous n'ayons pas ici à expliquer comment on doit rendre compte des nouveaux phénomènes, il est permis de conclure avec assurance des explications critiques antérieures, que l'on peut atteindre ce but par d'autres voies que celle que la Chimie a prise en suivant l'hypothèse atomique.

Il en est exactement de même des phénomènes appelés *catalytiques*; là aussi, la Chimie a nié *a priori* (quoique tacitement) la possibilité de ces phénomènes, et a formé ses concepts fondamentaux dans l'hypothèse que de telles influences n'existaient pas. Lorsqu'ensuite cette vieille induction se trouve en défaut, il est naturel que la Chimie ne puisse plus aborder ces phénomènes avec ses anciennes théories, mais avec des hypothèses rajoutées après coup et de force. On peut accepter et supporter de semblables adaptations des idées traditionnelles aux faits nouveaux comme un pis-aller. Mais à présent s'accumulent les problèmes que la Chimie a auparavant refusé de traiter, et il n'est pas invraisemblable qu'une transformation des conceptions fondamentales devienne bientôt nécessaire. Elle devra assurément être précédée d'une discussion critique des principes dont étaient issues les théories antérieures, afin qu'on voie clairement quels sont les changements que l'état présent de la science rend possibles, désirables ou même indispensables. C'est à cette œuvre que j'espère collaborer par mes études, quand même je n'ai peut-être pas encore réussi à maîtriser mon sujet de telle sorte qu'il ne reste plus rien à faire aux autres.

On ne peut non plus chercher ici à effectuer une transformation complète des conceptions fondamentales. Nous conserverons toutes les hypothèses simplificatrices des conceptions usuelles, et nous contenterons d'embrasser les phénomènes chimiques dans leurs principaux traits; mais nous exposerons comment la Chimie s'est créé des difficultés bien inutilement sur ce terrain étroitement limité.

7. Si l'on met deux ou plusieurs corps en présence, et qu'ils éprouvent un changement considérable, celui-ci consiste, dans les cas que l'homme ordinaire observe le plus fréquemment dans la vie quotidienne, dans la formation d'un mélange homogène de ces corps. La vie ne présente pas beaucoup de processus semblables : les plus fréquents sont la dissolution du sel, le mélange du vin avec l'eau, et d'autres phénomènes qui (à l'exception de la combustion, qu'il faudrait citer ici) peuvent être regardés comme très inoffensifs. Leur principal caractère est la génération d'un *seul* produit, et, si singulier que cela soit, c'est précisément ces processus simples qui ont donné naissance au concept d'« éléments chimiques ». Tout profane aborde l'étude des phénomènes chimiques avec une notion grossière et tout à fait confuse de la composition, et, même quand il est devenu homme de science, il se donne pour but prétendu la recherche des éléments dans tous les processus, au lieu d'observer sans parti pris les corps naturels qui se présentent originairement et leurs transformations.

On ne se contente pas de ce qu'on voit, c'est-à-dire de

processus comme ceux-ci :

$$a_1 = b_1 \quad (1)$$

$$c_2 = d_2 + e_2 + \dots \quad (2)$$

$$f_3 + g_3 = h_3 + i_3 + j_3 + \dots \quad (3)$$

mais on se représente d'abord les processus de la forme (1) comme l'idéal de toute transformation (alchimie), et quand cette idée a échoué, on attribue une valeur particulière aux processus de la forme (2). Les équations de la forme (3) peuvent être regardées comme des sommes algébriques de processus de la forme (2), où naturellement toutes les masses sont positives, et par suite chaque équation est transformée de manière que les signes soient tous positifs dans chaque membre.

A cette préférence accordée aux réactions où un seul corps en engendre plusieurs, ou inversement, on pourrait opposer la remarque que les processus surprenants et insolites sont justement ceux où *plusieurs* corps naissent de plusieurs. Mais l'habitude est si forte que jusqu'ici ce cas n'a éveillé aucun scrupule. Le développement de la Chimie a sans doute forcé avec le temps les savants à calculer algébriquement, à concevoir, par exemple, dans les processus de substitution, un corps comme le produit de l'action réciproque de corps donnés, en même temps que se forme un second ou un troisième; mais cela n'a pas eu jusqu'ici d'influence profonde sur les conceptions fondamentales.

On ne trouvera pas aisément dans d'autres domaines de la science des exemples de ce fait, que l'on tient un phénomène pour plus important qu'un autre, par cela seul qu'il

peut se représenter par une équation qui n'a qu'un terme positif dans un membre; si l'autre membre doit contenir au moins deux termes, on ne peut guère trouver de raison pour ne pas admettre plusieurs termes dans les deux membres.

8. Avant de poursuivre ces considérations, il faut dire encore quelque chose sur la signification d'équations de transformation comme :

$$f_3 + g_3 + \dots = h_3 + i_3 + j_3 + \dots$$

Comme, dans l'extrême multiplicité des transformations possibles, il est d'abord nécessaire de s'orienter sur les phénomènes les plus marquants, la Chimie ne s'inquiète pas directement de tous les produits des actions réciproques des corps naturels; elle fait un choix particulier. Au commencement, ce n'était que des corps très remarquables (par exemple, les pierres lumineuses, les corps colorés ou fortement corrosifs, etc.), plus tard, les corps particulièrement stables, enfin les « individus chimiques » plus exactement définis. Or, presque toujours, une telle équation ne donne qu'une vue d'ensemble sur le résultat final d'une assez longue suite d'opérations chimiques, où tous les états intermédiaires passent inaperçus. Évidemment cela ne produit pas d'inexactitude notable, quand ces stades intermédiaires peuvent être reproduits exactement au moyen du résultat final; mais quand il y a transformation de corps « isomères », ils peuvent échapper longtemps à l'observation (par exemple, la transformation d'hyoscyamine en atropine).

Si, par exemple, n corps différents s'unissent en de rapports variables d'une manière continue pour former un produit homogène, on peut naturellement obtenir un nombre infini (∞^{n-1}) de corps différents qui pourtant ne se distinguent pas particulièrement, mais dont l'ensemble peut être enveloppé dans un concept (comme celui de solution ou de phase). Nous laissons complètement de côté ces sortes de corps (comme fait la Chimie), et n'envisagerons que les n corps primitifs, qui donnent naissance à des phases, et dans lesquels elles se décomposent.

Nous aurons bientôt à signaler une autre hypothèse simplificatrice (touchant la réversibilité des processus chimiques); mais en tout cas nous considérerons comme chimiquement identiques les corps qui peuvent se transformer directement ou indirectement l'un dans l'autre (c'est-à-dire qui peuvent vérifier une équation de la forme $a_i = b_i$), sans nous inquiéter s'ils sont identiques ou non dans leurs relations physiques ou même dans leur action chimique.

On fait tacitement ou expressément toutes ces hypothèses, quand on donne à la Chimie pour but la détermination des éléments des individus chimiques. Nous procéderons exactement comme la Chimie le fait quand elle cherche des éléments; seulement nous ne parlerons pas d'éléments tant que cela ne sera pas absolument nécessaire.

9. S'il se produit un processus comme :

$$a_1 + b_1 + c_1 + \dots = n_1 + m_1 + \dots$$

il est commode, au point de vue mathématique, de ramener

cette équation à 0, c'est-à-dire de transporter les termes du second membre dans le premier en changeant leur signe. Mais, pour ne pas avoir à tenir compte de la diversité des signes, qui n'a pas d'importance mathématique, nous n'emploierons que le signe positif et nous écrirons par exemple :

$$a_1 + b_1 + c_1 + \dots + z_1 = 0 \quad (1)$$

où les termes réellement positifs correspondent aux substances initiales et les négatifs aux produits (ou bien inversement).

Nous pouvons maintenant observer un autre processus auquel prend également part le corps a_1 , par exemple :

$$a_2 + b_2 + f_2 + \dots = 0 \quad (2)$$

On peut par un calcul élémentaire éliminer le corps a de ces équations; car, comme la quantité absolue des corps en réaction est indifférente, on peut, en changeant la proportion, faire $a_1 = a_2$ (de même signe par conséquent). Si l'on soustrait les équations l'une de l'autre, on obtient une équation où le corps a ne figure plus, et à laquelle nous pouvons attribuer un sens chimique moyennant une certaine hypothèse.

Il est commode pour le calcul de multiplier, dans cette transformation, l'équation (2) par un facteur λ choisi de telle sorte que la valeur primitive de a_1 et celle de a_2 vérifient l'équation :

$$a_1 + \lambda a_2 = 0.$$

On obtient alors en additionnant (1) et (2) :

$$(b_1 + \lambda b_2) + c_1 + \lambda f_2 + \dots + z_1 = 0.$$

Pour que cette équation ait un sens chimique, il faut supposer (a_1 et a_2 étant positifs) que l'une au moins de deux réactions (1) et (2) peut s'effectuer en sens *inverse*, de sorte que les produits de cette réaction, employés comme données, donnent naissance dans des conditions convenables aux corps donnés primitivement.

Nous pouvons alors imaginer que la quantité du corps fournie par la réaction (2) invertie est aussitôt introduit et consommée dans la réaction (1), de sorte qu'elle disparaît dans l'ensemble.

Comme les équations prises pour exemple contiennent aussi le corps b en commun, on peut de même imaginer une réaction où le corps b disparaisse complètement.

Une telle équation, trouvée par le calcul, ne représente proprement que le résultat de deux réactions connues exécutées *l'une après l'autre*. Mais il se trouve qu'une telle équation répond souvent à une réaction unique directement réalisable. Lors donc que nous avons déduit la réaction

$$(b_1 + \lambda b_2) + c_1 + \lambda f_2 + \dots + z_1 = 0,$$

nous nous attendons à ce qu'elle puisse s'effectuer réellement, et quand nous observons une réaction qui a lieu sans l'intervention du corps a , mais avec le concours de corps $b, c, f, \dots, z$, par exemple, suivant l'équation :

$$b_3 + c_3 + f_3 + \dots + z_3 = 0,$$

nous nous attendons à la proportionnalité :

$$\frac{b_1 + \lambda b_2}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{\lambda f_2}{f_3} = \dots = \frac{z_1}{z_3}$$

Si cette proportionnalité n'avait pas lieu, il faudrait regarder la dernière réaction comme une réaction particulière qu'on ne peut déduire des deux premières, et la considérer mathématiquement comme une réaction indépendante.

10. Nous avons déjà parlé de l'hypothèse qu'un certain nombre de réactions *sont réversibles*, sans qu'on y fasse intervenir d'autres corps que ceux qui figurent dans les équations données. Cette hypothèse de la réversibilité par des actions purement physiques doit être admise dans le même sens que quand on recherche les éléments par la voie ordinaire. Or elle se trouve si rarement vérifiée dans les processus chimiques, que la découverte de la réversibilité de la formation de l'eau au moyen d'hydrogène et d'oxygène par SAINTE-CLAIRE DEVILLE a produit chez ses contemporains un étonnement incroyable. De là ressort, d'une part, combien la Chimie se rend peu compte des hypothèses avec lesquelles elle aborde l'étude des phénomènes naturels; d'autre part, on comprend clairement combien les concepts formés dans l'hypothèse de la réversibilité des processus chimiques sont peu propres à fournir une description tant soit peu plus *précise* des phénomènes naturels. On se contente de ce qu'on peut concevoir la plupart des réactions chimiques comme réversibles, du moins quand on y ajoute des substances auxiliaires que l'on peut s'imaginer retirer sans changement, bien qu'on ne les retire pas dans leur état primitif, et qu'elles aient subi une altération chimique. En d'autres termes, on peut

dire que, vu la réversibilité physique très limitée des réactions chimiques, on ne peut souvent obtenir les « éléments » d'une série de substances données qu'en supposant déjà bien établie l'existence d'éléments dans toutes les autres substances qui doivent intervenir dans l'inversion des réactions des premières. En considérant ces phénomènes sans parti pris, on pourrait arriver à ce résultat, qu'une partie de nos réactions ne peut être inversée que moyennant l'usage constant de certains agents (peut-être du carbone). Au théorème physique de l'accroissement continu de l'entropie, on devrait peut-être adjoindre un théorème chimique sur le décroissement continu de la provision naturelle disponible de certains agents chimiques particulièrement actifs; mais quand même cette idée ne trouverait aucune confirmation, elle mérite d'être éprouvée parce que le résultat de l'épreuve ne peut pas du tout être encore aujourd'hui regardé d'avance comme certain, et lors même qu'elle devrait confirmer les vues acceptées jusqu'ici, on acquerrait nécessairement par là une nouvelle connaissance sur la connexion de l'ensemble des phénomènes chimiques avec les effets des forces physiques (chaleur, électricité, lumière). Il se peut fort bien que l'on ne puisse affirmer la possibilité de retirer chaque « élément » de ses combinaisons, dès que l'on ne pense pas à retirer dans chaque cas *un* élément quelconque, mais à retirer *tous* les éléments, ou plus généralement à rétablir l'état initial pour toutes les substances dont on était parti au début des opérations. Je pourrais affirmer presque avec certitude

qu'en ce dernier sens il n'y a pas de réversibilité déterminée des réactions chimiques, ou seulement dans des conditions très particulières auxquelles on ne pense pas d'ordinaire. Telles sont les raisons qui me font douter si à l'avenir, quand on s'efforcera d'aborder des problèmes plus profonds, on pourra compter sur des éléments constants ou sur des concepts analogues. Il me semble que dans tous les processus non réversibles physiquement on devra admettre une altération des éléments.

Ce n'est pas l'objet de ce travail de décrire les changements à prévoir dans la conception des phénomènes chimiques, mais simplement de faciliter et de préparer de tels changements par la critique des idées actuelles. Nous maintenons donc l'hypothèse de la réversibilité physique d'un nombre suffisant de réactions chimiques, sans nous dissimuler que par cette hypothèse nous n'atteindrons qu'une description très grossière des processus chimiques.

11. On peut maintenant se demander à combien de réactions peut donner lieu un nombre donné de substances; comme il y a des réactions qu'on peut déduire algébriquement, nous ne chercherons naturellement que celles dont la connaissance est nécessaire pour en déduire toutes les autres réactions éventuellement constatées. Mathématiquement parlant, nous désirons connaître le nombre des réactions *indépendantes*.

Une telle question était à peine possible, par exemple, il y a deux siècles, parce qu'alors la théorie des équations simultanées en Algèbre n'était pas suffisamment développée;

plus tard, quand cet obstacle n'existait plus, on avait étalé une voie déterminée pour les explications chimiques, depuis lors la question ne s'était plus posée, parce qu'on était trop prévenu par une manière de penser traditionnelle.

Or la Mathématique enseigne qu'il ne peut y avoir qu' $n-1$ équations indépendantes entre n substances différentes, et qu'alors on peut exprimer leurs quantités par celle d'une seule. Dans ce cas on obtient des équations telles que :

$$a_{\alpha} = b_{\alpha}$$

$$a_{\beta} = c_{\beta}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Chimiquement parlant, chacune des n substances peut se transformer en chacune des $n-1$ autres.

C'est évidemment là un résultat sans utilité pour nous car, d'abord, nous regardons comme chimiquement identiques les substances qui vérifient de telles équations, c'est-à-dire, qui peuvent se transformer les unes dans les autres directement ou indirectement; ensuite, c'est un fait fondamental que nous ne pouvons pas transformer chaque substance en chaque autre. On peut donc exprimer l'hypothèse capitale de l'Alchimie en disant que pour un système de n substances diverses elle admettait la possibilité de $n-1$ transformations indépendantes; on peut donc dire que, en Chimie, pour n substances différentes, on ne peut observer tout au plus que $n-2$ transformations indépendantes, si l'on ne considère pas les isomères comme des corps différents.

Supposons qu'entre n substances il y ait $n - 2$ équations de réaction différentes; on peut transformer ces équations de manière à exprimer en fonction des quantités de deux substances (a, b) la quantité de chacune des autres ($c, d, \dots n$); on peut donc en déduire des équations de la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} a_{\alpha} + b_{\alpha} + c_{\alpha} & & = 0. \\ a_{\beta} + b_{\beta} & + d_{\beta} & = 0. \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu} + b_{\nu} & & + n_{\nu} = 0. \end{array}$$

Ainsi la quantité de chaque substance $c, \dots n$ se trouve exprimée au moyen des quantités de deux autres qui sont communes (quoique en proportions différentes) à toutes les équations; mais on ne dit pas quelle est la suite des signes dans les équations; il faut remarquer tout particulièrement que les signes de a et de b n'ont pas besoin d'être semblables, et contraires à celui de la troisième substance.

Cette considération peut se continuer à volonté. Quand les n substances vérifient $n - g$ équations indépendantes, on peut représenter au moyen des quantités de g substances $a, b, \dots g$, la quantité de chacune des autres $h, i, \dots n$. On peut donc obtenir des équations de la forme :

$$(I) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{\alpha} + b_{\alpha} + c_{\alpha} + \dots + g_{\alpha} + h_{\alpha} & & = 0. \\ a_{\beta} + b_{\beta} + c_{\beta} + \dots + g_{\beta} & + i_{\beta} & = 0. \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu} + b_{\nu} + c_{\nu} + \dots + g_{\nu} & & + n_{\nu} = 0. \end{array} \right.$$

Ici encore, il n'y a aucune restriction imposée aux signes des diverses quantités.

Les équations (I) ne nous apprennent donc rien touchant la « composition » des substances $h, i, \dots n$, mais elles donnent une indication précise sur leur *formation* possible ou réelle au moyen des corps $a, b, \dots g$. La « composition » d'une « combinaison » chimique au moyen de ses « éléments » est un cas très spécial de la *formation* de certaines autres au moyen d'autres. Pour former la substance h , il faudra peut-être unir a et b (si leur signe dans la première équation I est opposé à celui de h) et alors se formeront *en même temps* que h , les autres substances $c, \dots g$ (si leurs signes sont semblables à celui de h).

Plusieurs substances en composent une autre, si celle-ci apparaît seule; mais on ne peut pas dire qu'elle soit composée; un corps peut être *formé* sans être *composé*. Il n'y a pas trace ici de l'idée de la persistance des « éléments » dans leurs « combinaisons ».

Pour le groupe des substances $a, b, \dots, g$, dont toutes les autres $h, i, \dots n$ peuvent être formées, nous adopterons un nom particulier, et nous les appellerons *radicaux*¹; les équations (I), d'où sont éliminées toutes les substances inutiles, se nommeront *équations radicales*; les substances $h, i, \dots n$ seront dites *dérivées*.

Nous devons encore faire la remarque suivante. Le choix des radicaux n'est pas nécessairement arbitraire; cel

1. Le mot *radical*, par lequel nous traduisons *Stammkörper*, est pris ici dans un sens différent de son sens habituel en Chimie. (Note du Traducteur.)

dépend entièrement de la forme des équations primitives, c'est-à-dire du fait que certains déterminants¹ ont ou n'ont pas toujours une valeur différente de zéro. Il y aura aussi une certaine liberté dans le choix des radicaux, mais elle ne va pas jusqu'à permettre d'obtenir au moyen de n corps *quelconques* de la série précédente *chacun* des autres. Les quantités des radicaux qui entrent dans nos équations seront souvent nulles, de sorte que, même avec g radicaux, il y aura des réactions où ils manqueront tous, sauf deux. Mais en vertu de nos hypothèses il ne peut jamais arriver que dans une équation radicale ne figure qu'un seul radical, c'est-à-dire que sur les g radicaux il ne peut y en avoir que $g - 2$ au plus qui figurent dans une équation radicale avec le coefficient 0, car autrement le radical restant seul serait identique au corps dérivé de cette équation. Les quantités de tous les radicaux ne peuvent pas non plus être proportionnelles dans deux équations radicales, car alors les dérivés correspondants seraient simplement transformables l'un dans l'autre. Au contraire, il se peut qu'il y ait d'autres relations de dépendance (que la proportionnalité) entre les quantités des radicaux qui entrent dans plusieurs équations radicales.

12. Nous sommes peu habitués, nous autres chimistes, à calculer avec $n - g$ équations indépendantes entre n corps, et moi-même je ne me suis occupé de cette étude que lorsque mon attention eut été attirée par accident sur l'utilité qu'elle peut avoir pour les théories chimiques. J'ai pu

1. Fonctions mathématiques des coefficients.

ainsi acquérir la certitude que mon exposé précède embrasse tout ce qui peut être déduit de l'impossibilité la transmutation d'un corps quelconque en un autre.

Or il n'est pas besoin de prouver que les conséquences que la Chimie a tirées de la ruine des doctrines alchimiques étaient autres que celles que fournit l'étude mathématique de la question. Il faut sans doute reconnaître que ces conséquences ne sont pas directement fausses, mais elles sont de telle nature, qu'elles rendent beaucoup plus difficile l'intelligence de relations ultérieurement découvertes. Pour décrire l'ensemble des processus chimiques connus, dans les hypothèses déjà énoncées, il est certainement nécessaire d'admettre autant de radicaux que la Chimie connaît d'éléments différents. Mais si l'on part du point de vue mathématique, on sera surpris de voir que *dans chaque réaction chimique il n'y a pas toujours autant de substances, plus une, qu'il y a de radicaux; et même qu'il y a très rarement des réactions comprenant plus de six substances primitives plus des substances nouvellement formées.*

Pour comprendre cette *simplicité* des réactions *radicales* il suffit sans doute d'admettre que la plupart des valeurs des quantités des radicaux ne figurent que pour la forme dans nos équations (I) et sont souvent nulles en réalité. Mais cela *ne suffit pas* à expliquer la simplicité des réactions qu'on peut déduire des équations radicales, car même avec des équations radicales très simples on arriverait bientôt à des réactions dérivées contenant un nombre incroyable de substances primitives et engendrées, si l'on ne devait tenir

compte d'un *fait particulier*. Si l'on réunit par exemple 10 équations radicales, où ne figurent en tout que 15 radicaux différents, en une équation dérivée, on pourra en éliminer 9 radicaux (correspondant à $10 - 1$ équations), de sorte que l'équation dérivée comprendra 5 radicaux avec 10 corps dérivés, soit en tout 15 substances. Les individus chimiques se comportent donc réellement d'une manière qui diffère notablement du schéma auquel conduisent les considérations mathématiques générales, et c'est là un indice sûr qu'à côté du fait de la transmutabilité limitée (déjà exprimé par les concepts de « composition », d'« éléments » et de « combinaison »), il reste encore à découvrir d'autres relations non moins importantes.

Autant que je puis juger, RICHTER fut le seul chimiste, avant et après DALTON, qui eut conscience que les réactions de substances composées sans règle de n éléments devaient se produire sous l'action de $n + 1$ substances, tant primitives que nouvellement formées. Il en est de même naturellement quand il s'agit de radicaux en quantités déterminées mais sans règle. Richter remarqua que la double décomposition de deux sels n'aboutit qu'à la formation de deux nouveaux corps (sels), bien que les sels aient quatre éléments; et il en déduisit la règle suivant laquelle ces corps sont composés. Mais cette règle n'est manifestement qu'un cas spécial d'une relation très générale, dont on ne peut pas deviner l'existence, quand on s'enferme en pensée dans le cercle traditionnel.

Nous rencontrons maintenant ce problème : trouver les

relations qui peuvent exister entre les quantités des radicaux (et éventuellement des éléments) dans les équations radicales, et qui sont compatibles avec le fait de la transmutabilité limitée de la matière, en même temps qu'elles assurent la plus grande simplicité à l'ensemble de toutes les équations de réaction concevables, tant celles que l'observation fournit que celles qu'on en peut déduire mathématiquement. *Il s'agit donc d'un maximum de réactions concevables pour un minimum de substances réagissantes.* Si l'on trouve une telle relation, il n'est nullement certain qu'elle soit observée par la nature; mais si elle se confirme, elle est facile à comprendre, tandis que dans le cas contraire elle pose un nouveau problème et donne lieu à des recherches ultérieures.

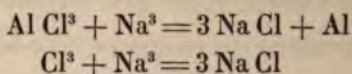
Maintenant il paraît superflu de démontrer que la loi des masses de Dalton, d'après laquelle, moyennant un choix convenable des unités de masse des radicaux (ou des éléments), la formation de chaque individu (ou la composition de chaque combinaison) peut s'exprimer par des formules contenant de petits nombres entiers, répond justement à cette exigence de la plus grande simplicité des réactions à l'égard du nombre des substances réagissantes; car il n'y a que des nombres entiers qui jouissent de cette propriété, que, ajoutés et retranchés de diverses manières, ils donnent une somme algébrique nulle. Si l'on emploie les éléments comme radicaux, les indices sont constamment positifs; mais si l'on emploie d'autres radicaux dans les formules, on trouvera des indices tantôt positifs, tantôt négatifs.

La loi des masses de Richter-Dalton réduit donc pour l'ensemble des réactions chimiques le nombre des substances réagissantes au strict minimum qui exclut précisément la transmutation d'un corps quelconque en un autre.

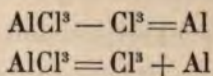
13. En suivant attentivement les développements précédents, chacun se convaincra qu'il serait impossible à un sceptique d'accepter nos concepts généralement usités de composition, d'éléments et de combinaison, de substances isomères, polymères, de structure chimique, etc., s'il ne veut pas les accepter *sans contrôle*, et s'il exige à *chaque* pas la preuve stricte que la suite des idées ne peut et ne doit avancer que dans la voie traditionnelle. Or il y a dans ces concepts beaucoup d'arbitraire; on ne les a pas fondés sur une critique soigneuse; on les pose en apparence comme des axiomes, et en réalité sans avoir clairement conscience des hypothèses qu'ils impliquent.

Il ne me paraît nullement téméraire d'affirmer que l'hypothèse atomique ne sert aujourd'hui en Chimie qu'à corriger les considérations superficielles qui servent d'introduction à tout enseignement et à tout manuel de Chimie. La première leçon de Chimie est l'origine de l'autorité inébranlable dont l'hypothèse atomique jouit dans la science. La partie la plus faible des déductions qui nous conduisent à admettre des éléments me paraît être celle qui contient l'hypothèse tacite de la *réversibilité* de toutes les réactions chimiques et rend par là possible la combinaison algébrique des équations de réaction

pour former de nouvelles équations. Le chlorure d'aluminium traité avec le sodium donne du chlorure de sodium et de l'aluminium ; comme le sodium et le chlore composent précisément le chlorure de sodium, on en conclut que le chlore et l'aluminium doivent produire le chlorure d'aluminium, comme cela a lieu effectivement. Mais si l'on analyse plus exactement cette déduction, on voit que nous concevons le chlorure de sodium comme *décomposé* en chlore et en sodium, et c'est là un phénomène qui n'a guère été observé que sous l'action du courant électrique. Nous observons les processus suivants :



Nous imaginons que le chlorure de sodium formé dans le premier se décompose dans le second, effectué en sens inverse, et nous retrouvons ainsi le sodium qui a été consommé dans la première réaction. Nous faisons ainsi entièrement abstraction de cette substance (nous éliminons Na) et nous posons :



Naturellement, nous pouvons aussi imaginer le chlorure d'aluminium comme décomposé en chlore et en aluminium, sans nous arrêter à la contradiction qui existe entre la réalité et le calcul ; mais l'expérience ne nous laisse pas choisir dans quel sens nous devons concevoir le processus ; elle ne nous présente, dans des conditions déterminées,

qu'un processus bien déterminé, et nullement le processus inverse. Mais nous sommes parfaitement habitués à ces sortes de déductions, et nous n'en apercevons plus l'insuffisance et l'invalidité, même pas quand elles nous conduisent à des conséquences tout à fait inutilisables. Il y a, par exemple, un nombre extraordinaire de substances différentes qui ne sont « composées » que d'hydrogène et de carbone, et l'on peut donner une équation de transformation pour chaque groupe de *trois* de ces corps. Si l'on considère de même l'ensemble de tous les corps « composés » de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, on peut aussi trouver une équation de transformation pour chaque groupe de *quatre* corps de ce genre ; mais il n'y a qu'une infime minorité de ces réactions calculées qui soit réalisable, et tous ces calculs n'ont aucune valeur pratique.

Une telle manière de voir, qui nous représente avec une égale facilité le chlorure d'azote ou l'acide picrique faisant explosion, ou bien renaissant sans aucune raison des produits de l'explosion, ne peut naturellement pas se soutenir même dans les explications chimiques les plus simples, et c'est pourquoi nous voyons depuis longtemps toutes sortes de tentatives pour corriger ce défaut flagrant. Pour rectifier ces conséquences, on a trouvé un seul moyen, qui est d'admettre des forces particulières, les affinités, qui décident du sens du processus réel ; on s'imagine que chaque réaction peut en principe s'effectuer dans les deux sens ; mais pour savoir si elle a lieu, et dans quel sens elle se réalise, on doit recourir à des conditions accessoires dont

on avait négligé l'existence quand on recherchait les éléments.

Comme l'hypothèse des affinités ne suffit pas partout à corriger les défauts de la conception fondamentale, il faut concevoir encore des obstacles passifs (analogues au frottement), qui ne peuvent empêcher une réaction que quand les forces actives sont disposées de manière à la favoriser. Mais, pour la Chimie organique, on a renoncé à tous ces expédients, parce qu'ils n'étaient pas encore suffisants. L'on a pressenti instinctivement que le vice radical et la source de toutes les difficultés résident dans l'interprétation des phénomènes en calcul algébrique; et sans en avoir expressément l'intention, on a employé un calcul essentiellement différent, une espèce de calcul géométrique, et par là on est parvenu aux formules de structure. Cependant on se sert encore de déductions algébriques, parce qu'on ne pourrait pas arriver à déterminer les éléments sans les employer, et l'on applique aux résultats de cette méthode de calcul l'autre forme de déduction toutes les fois que la première se trouve en contradiction avec l'expérience; mais là où n'apparaît pas de contradiction criante, on s'en tient à la méthode de calcul algébrique. Mais, en y regardant de près, elle est tout aussi insuffisante dans les exemples tirés ci-dessus de la Chimie inorganique qu'elle se montre inutilisable en Chimie organique.

14. Dans le cours de l'exposition j'ai exprimé plusieurs fois la conviction que la Chimie a besoin d'une réforme radicale de ses concepts fondamentaux, si elle veut être à

la hauteur de ses problèmes, et je crois avoir donné la preuve que la manière de voir conventionnelle rend impossible toute description exacte des phénomènes. Je me réjouis de pouvoir constater que je ne suis pas seul de cet avis, car le Professeur OSTWALD dans la dernière édition de son *Abrégé de Chimie générale*¹ est déjà arrivé à cette conclusion que pour décrire sans parti pris les phénomènes fondamentaux de la Chimie il faudra se servir à l'avenir d'une langue qui n'a jamais été employée jusqu'ici.

On assigne en première ligne à la Chimie la tâche de déterminer les éléments de toutes les substances naturelles, et on ne remarque pas que cette position de la question rend déjà nécessaire une *abstraction* très éloignée du cours *réel* des phénomènes naturels, *et est par cela même impropre à décrire ce cours réel*. On fait d'abord abstraction de la présence de tous les corps qui peuvent être retirés après la transformation en même quantité qu'avant; par suite, cette méthode ne peut donner aucune lumière sur le rôle des divers dissolvants et des agents catalytiques. En outre, on omet toutes les transformations intermédiaires par lesquelles les produits primitifs et variables donnent naissance aux individus qui forment le résultat définitif; on ne fait aucune distinction si l'on passe des données initiales au produit final par une seule réaction ou par toute une série de réactions. Enfin on ne s'inquiète nullement de savoir si une réaction ne s'effectue jamais expéri-

1. *Grundriss der allgemeinen Chemie*, trad. par Georges Charpy (Carré et Naud, Paris, 1893).

mentalement que dans un seul sens, ou si elle peut réaliser aussi dans le sens contraire, sans adjonction d'autres substances (partant par de simples actions physiques), et dans quelles conditions; on conçoit tacitement toute réaction comme réversible.

Sans doute, cette idéalisation excessive de la réalité des raisons historiques, et a beaucoup servi à embrasser rapidement les phénomènes chimiques dans leurs traits *essentiels*. Mais on n'a pas jusqu'ici fait attention qu'il s'agit justement d'une *idéalisation des phénomènes*, et que par cette voie on ne peut obtenir aucune ouverture sur les faces que l'on néglige volontairement ou inconsciemment. On est ainsi arrivé, par exemple, à cette opinion que deux substances de même « composition » sont « proprement » identiques, et doivent se transformer aisément l'une dans l'autre; et d'après ces conceptions schématiques il est impossible de comprendre pourquoi de telles transformations exigent souvent de longues séries de réactions intermédiaires.

Pour lever toutes ces difficultés, il a fallu s'accommoder des théories structurales; et quand on considère la nécessité de ces théories pour la Chimie comme le soutien inébranlable de l'hypothèse atomique, on ne se doute pas que par la méthode fondamentale des recherches chimiques, par la détermination des éléments au prix des abstractions énumérées, on s'est enlevé la possibilité de comprendre le monde des réalités, et que par les théories structurales on ne fait que chercher instinctivement à corriger les fautes

qu'on a commises, avant de pouvoir arriver à une opinion quelconque sur la composition des substances que la nature nous offre.

Les phénomènes chimiques se montrent, presque à chaque pas des recherches, plus compliqués qu'on ne le croyait auparavant. Si l'on veut à l'avenir essayer de maîtriser l'ensemble des phénomènes connus jusqu'ici par de nouvelles formations de concepts, il faudra probablement faire de nouveau certaines hypothèses, qui paraîtront plus tard n'être qu'imparfaitement exactes. Mais on peut exprimer l'espoir que les chercheurs de l'avenir resteront toujours conscients du *caractère arbitraire de leurs formations de concepts*, et qu'ils n'oublieront pas cette source d'erreurs et de contradictions en apparence insolubles entre la théorie et la réalité, du moins au même degré que l'ont fait les chimistes du xix^e siècle.

Kladno, 2 avril 1900.

LES THÉORIES ATOMIQUES EN BIOLOGIE

Par FRÉDÉRIC HOUSSAY,

Maître de Conférences à l'École Normale Supérieure.

Lorsque les données nouvelles, apportées par l'emploi plus fréquent du microscope, eurent fini par constituer dans la science une discipline nouvelle, l'Histologie, relative à la structure des êtres vivants, l'esprit humain leur appliqua ses méthodes usuelles de coordination et construisit une Histologie statique comme il avait aussi établi une Morphologie statique. La première expression en fut la *théorie cellulaire*, très justement dénommée *théorie*, bien que beaucoup la considèrent comme l'expression adéquate d'un fait exactement consigné. On a effectivement pu croire pendant longtemps qu'il en était bien ainsi; mais nous savons aujourd'hui que la théorie cellulaire est seulement l'expression d'un fait très fréquent, et c'est là un des traits caractéristiques par lesquels s'annonce en Biologie une théorie statique¹.

1. HOUSSAY, *La forme et la vie, Essai de la méthode mécanique en Zoologie*, p. 250. C. Reinwald (Schleicher frères), Paris, 1900.

Sans revenir sur des détails parfaitement connus, rappelons que la théorie cellulaire comporte différentes propositions essentielles : 1° les vivants sont constitués par une substance, d'ailleurs définie physiquement et chimiquement, que l'on nomme protoplasme ; 2° ce protoplasme existe sous forme de petites masses séparées les unes des autres, dites cellules ou plastides, qui sont en quelque sorte des *unités biologiques* d'un ordre inférieur à la forme spécifique.

Or, ainsi que l'a fait justement remarquer LE DANTEC, il n'y a pas un protoplasme, mais des protoplasmes, et par suite leurs propriétés pourraient être distinguées et sériées, ce qui serait une pénétration cinématique du sujet dont la théorie cellulaire est parfaitement indépendante. De plus, la cellule isolée n'a pas une existence objective nécessaire et constante, puisqu'en beaucoup de tissus (tissu conjonctif entre autres) les cellules communiquent les unes avec les autres, de façon à constituer un réseau continu.

Donc la théorie cellulaire est bien une réduction des phénomènes à la Statique, une manière de les grouper incomplètement et de les réduire à un schème abstrait.

L'unité de plan de composition, l'unité de structure sont des concepts qui procèdent « de cet effort qui n'aboutit jamais vers l'élément dernier et l'atome absolu, dans lequel on peut voir le signe d'une loi de l'entendement qui cherche l'unité plutôt qu'il ne la trouve, et qui mesure l'intelligibilité des choses à la manière dont elles subissent les distinctions et les relations de la pure quantité ».

Le sagace métaphysicien¹ auquel nous empruntons les lignes qui précèdent se demande d'ailleurs si l'atomisme n'est point une *analyse* et une *méthode* plutôt qu'il n'est une science et une philosophie de l'être. Il essaie de le démontrer en Mathématique et en Chimie; nous voulons indiquer en quelques lignes que cette proposition est vraie en sciences naturelles, et que les spéculations statiques, suivant la loi générale de l'entendement humain, ont abouti à une théorie atomique des vivants. Nous n'avons qu'à suivre l'ordre dans lequel les spéculations ont accompagné les découvertes de fait pour arriver à cette conclusion.

La Statique tout d'abord considérant la forme comme *donnée*, il en résulte que l'*hérédité* est aussi une donnée, à propos de laquelle il ne saurait y avoir de problèmes dont la solution comporterait des facteurs intrinsèques ou étrangers à l'être. L'*hérédité est*, plus même, elle *est nécessairement*, et tout au plus y a-t-il lieu de se préoccuper du mode suivant lequel elle se manifeste. Mieux encore que cela, elle est considérée comme un objet matériel; et l'on cherche quel peut être son agent vecteur pour passer d'un adulte à son germe. D'après BOVERI, c'est le noyau qui est le véhicule des propriétés héréditaires.

Si l'on considère sans parti pris les réalités mêmes, on voit que l'individu finit et recommence, et que, si l'hérédité est l'ensemble des propriétés qui font ressembler un être à celui dont il est né, elle ne saurait être conçue comme

1. HANNEQUIN, *Essai sur l'hypothèse des atomes*, p. 146 (*Annales de l'Université de Lyon*, Masson et Alcan, 1895).

un objet de grandeur constante. En passant d'une génération à l'autre, elle est d'abord *nulle*, car *l'œuf ne ressemble pas du tout* à son progéniteur, puis elle atteint un maximum, car l'être né de l'œuf finit par ressembler à son progéniteur. Cela c'est le concept cinématique d'hérédité qui pourrait être représenté par une courbe rythmique analogue par exemple à une *sinusoïde*.

Mais de nombreux théoriciens, aussi peu réalistes que possible, ayant laissé librement spéculer leur esprit sur ces phénomènes, ont produit tout naturellement des pensées statiques. Les plus anciens ont affirmé que, *sans en avoir l'air*, l'œuf ressemble parfaitement à l'organisme parent ayant les mêmes organes que celui-ci, non visibles à nos yeux parce que trop petits, mais complètement constitués et préformés.

Depuis que, par une nouvelle infusion de réalisme, le microscope a rejeté la préformation avec son aspect primitif et grossier dans le domaine des hypothèses impossibles, la doctrine a changé de nom, mais a reparu sous la plume de NÆGELI, de DARWIN, de WEISMANN, etc. Dans les théories atomiques nouvelles l'embryon n'est plus en effet *préformé* mais chaque partie est dans l'œuf représentée en puissance ou *prédéterminée*.

Nous disons que toutes ces hypothèses sont des théories atomiques et statiques, car « elles procèdent de la manière générale qui consiste à réduire le continu en discontinu, introduire les concepts de nombre ou plutôt d'*unités*, c'est-à-dire à introduire après coup dans l'être des détermin-

tions statiques qui veulent nous le faire saisir *dans son repos, dans sa nécessité*, sans chercher à remonter jusqu'à l'activité, ni à retrouver les déterminations dynamiques de l'être agissant et changeant, sans demander à la causalité le complément de l'œuvre de la quantité¹. »

Ces théories sont encore statiques parce que, d'après elles, il n'y a pas dans un embryon, en fonction du temps, des *changements véritables* et profonds, mais seulement la manifestation de changements prédéterminés. O. HERTWIG², ainsi que E. B. WILSON³ et d'autres, ont bien vu que ces hypothèses posaient à nouveau la question de la préformation et de l'épigenèse.

Au point de vue atomique, elles diffèrent entre elles par le choix de l'*unité* introduite. Pour les unes (théorie de la mosaïque) l'*unité* est l'organe ou la partie plus ou moins précise comme le quart d'embryon; pour les autres c'est l'atome véritable (micelle, bioblaste, etc.).

Ainsi que le reconnaît très bien E. B. WILSON, W. HIS (1874) remplace la préformation par la notion de prélocalisation des ébauches d'organes dans des régions données du blastoderme et même du protoplasme ovulaire. De même W. Roux (1888) en s'appuyant sur ses expériences relatives aux têtards de grenouilles et sur celles de CHABRY relatives aux têtards d'Ascidies, croit à la prédétermination au moins de quatre unités rassemblées en mosaïque de manière à former l'être total.

1. HANNEQUIN, *op. cit.*, p. 20.

2. O. HERTWIG, *Preformation oder Epigenese* ? 1894.

3. E. B. WILSON, *The cell in development and inheritance*, 1896.

Arrivons à l'atome véritable, dont le caractère par rapport à la donnée sensorielle est toujours d'être invisible. C'est un pur concept en tout cas. C'est l'*unité* introduite en laquelle se décompose la cellule (concept fondé sur la fréquence) et qui se perpétue identique à elle-même indéfiniment. On voit aisément voir comment ces doctrines négligent l'*assimilation* et l'extraction de la vie hors du non-vivant, c'est-à-dire toutes les manifestations dynamiques.

Beaucoup d'esprits sont arrivés à la conception de l'*atome biologique*, et au lieu de l'appeler simplement l'atome, on lui a donné des noms divers, pensant sans doute échapper à la Métaphysique en employant des termes qui n'y seraient pas encore connus. Voici au reste quelques échantillons de ces noms :

Physiological units (Spencer), *gemmules* (Darwin), *pan-gènes* (de Vries), *plasomes* (Wiesner), *micelles* (Nægeli), *plastidules* (Hæckel et Elssberg), *inotagmata* (Engelmann), *biophores* (Weismann), *bioblastes* (Beale), *somacules* (Foster), *idioblastes* (Hertwig), *idiosomes* (Whitman), *biogènes* (Verworn), *microzymas* (Béchamps et Estor), *gemmæ* (Haacke).

Les doctrines en question ont le même fond théorique, qui consiste à reporter sur l'atome toutes les qualités du corps qu'il est censé constituer et à échapper ainsi à toute recherche d'explication; elles sont seulement raccordées d'une façon plus ou moins ingénieuse à la technique contemporaine de chaque auteur. A titre d'exemple nous nous contenterons d'examiner celles de NÆGELI, de DARWIN et de WEISMANN.

D'après NÆGELI, le protoplasme d'un œuf est composé de deux parties, l'une, le *trophoplasme*, dont les propriétés sont générales et peu intéressantes, l'autre, l'*idioplasme*, caractéristique du germe de chaque espèce. L'œuf du lapin diffère de l'œuf du pigeon, parce que leurs idioplasmes diffèrent entre eux autant que le lapin et le pigeon. C'est le principe statique posé dès le début, il suffit, et point ne serait besoin d'ajouter autre chose. NÆGELI cependant suppose que l'idioplasme est composé d'atomes ou de micelles, unités communes à tous les idioplasmes mais diversement groupées; et ce sont les arrangements différents qui caractérisent chaque idioplasme.

DARWIN a donné à sa théorie atomique le nom de Pangenèse, parce qu'il pense qu'elle est nécessaire et suffisante pour expliquer les faits d'hérédité dans tous les cas de genèse : fissiparité, réparation des lésions, bourgeonnement, sporogenèse, conjugaison et reproduction sexuelle. Tous ces phénomènes devraient être étudiés d'une façon cinématique, et s'il restait après cela quelques obscurités, il faudrait, pour les faire disparaître, élargir le problème, augmenter la complexité des données et transporter le sujet dans le domaine dynamique. Au lieu de cela, DARWIN le restreint et cherche à lui faire subir la réduction statique qui consiste à introduire la discontinuité sous forme d'unités et d'atomes.

En effet, DARWIN émet l'hypothèse que les cellules, quand elles se divisent, engendrent de petits granules, ou *gemmules*, ou atomes, qui se dispersent dans l'organisme tout entier. Influencé par les idées contemporaines sur la nais-

sance des cellules, DARWIN admet que, suffisamment nourries, les gemmules se développent ultérieurement en cellules pareilles à celles dont elles sont issues. Les éléments sexuels sont formés par la réunion des gemmules issues de toutes les régions du corps.

Il est évidemment bien simple alors d'expliquer tous les phénomènes, puisqu'on doue l'atome, que l'on ne connaît pas, de toutes les propriétés des cellules, et le germe, de toutes les propriétés de toutes les cellules. Il suffirait de dire cela, attendu que le concept *gemme* n'introduit rien de plus que la notion d'unité et de quantité, pour la substituer à celle de qualité, d'une façon qui semble appropriée à l'essence même de la spéculation scientifique, et qui cependant ne l'est pas du tout, car la quantité introduite n'est en aucune façon mesurable et par suite ne transforme en rien la donnée accessible aux sens.

Il n'est pas utile de suivre DARWIN dans les applications qu'il fait de son arbitraire hypothèse et dans les explications qu'il en tire après les y avoir mises implicitement. Passons immédiatement aux théories de WEISMANN, qui au fond ressemblent beaucoup aux précédentes.

Les préoccupations initiales de cet auteur sont aussi relatives à l'hérédité des qualités. Un œuf, simple cellule, arrive par des divisions répétées à produire une masse de cellules différentes entre elles et différentes de lui-même. Ceci n'a pas lieu instantanément ni sans gradations, mais se réalise au contraire par des processus continus en fonction du temps. L'étude doit donc en être à tout le moins cinématique, et

pour résoudre les difficultés qui demeurent encore, il faudrait, nous le répétons, voir le sujet dans une complexité plus grande et saisir les actions réciproques du milieu et de l'œuf à mesure que croît celui-ci, *en empruntant des matériaux hors de lui*, en réalisant des acquisitions qui sont fonctions de la composition du milieu ainsi que de la composition propre de l'œuf et de sa structure. C'est la répétition rythmique des mêmes phénomènes et des réactions identiques des mêmes facteurs *internes* et *externes* que nous nommons hérédité; et le rythme même n'est absolument régulier que dans la mesure où tout demeure constant.

Loin de procéder ainsi, WEISMANN simplifie le problème, il supprime la conception du rôle des facteurs externes; il supprime le jeu régulier des introductions matérielles en fonction du temps, ou plutôt il lui fixe implicitement une règle arbitraire, comme nous allons le montrer; il ne croit pas que l'hétérogénéité consécutive à la différenciation puisse avoir été causée par la vie elle-même. Il suppose que si on voit *survenir* cette hétérogénéité à un moment donné, c'est qu'auparavant elle *était* déjà dans l'œuf, quoique non manifeste. N'est-ce pas là introduire volontairement des déterminations statiques qui n'ont rien d'objectif?

Une fois engagé dans cette voie, il ne reste qu'à la suivre jusqu'au bout. Le corps divisé en cellules hétérogènes constitue le *soma*, les cellules génitales ou le *germen* gardent sous un aspect homogène l'hétérogénéité latente. Les cellules somatiques forment un ensemble hétérogène, mais chacune

est homogène en ce sens que de divisions en divisions elle n'a plus gardé qu'une *détermination* : il faut bien dire le mot.

DELBOEUF, dans un article intéressant¹, émet la proposition suivante : soit un sac contenant 1000 boules blanches et 1000 boules noires ; divisons-le en deux moitiés, *complétons chaque moitié proportionnellement au nombre de blanches et de noires qu'elle contient*. Redivisons chaque sac et complétons-le de la même façon que précédemment. Au bout d'un nombre suffisant d'opérations, nous finirons par n'avoir que des sacs tout blancs et tout noirs. Le calcul le prouve.

Il a parfaitement raison, et la théorie de WEISMANN se ramène à prétendre que la naissance et la différenciation sont des opérations du genre de la précédente.

Si nous disions en effet que : 1° l'œuf est un sac rempli de boules rouges, blanches, bleues, noires, etc. ; 2° qu'il se divise en deux, que chaque nouveau sac se redivise en deux ; 3° que chaque sac après sa division est rempli *proportionnellement* au nombre de boules rouges, blanches, bleues, noires, etc., qu'il contient, on pourrait conclure qu'après un nombre de divisions suffisant, on n'aurait plus que des sacs tout bleus, tout rouges, tout blancs, tout noirs, etc.

Voyons le rapport avec la théorie de WEISMANN : il suffit d'écrire cellule à la place de sac et biophore à la place de

1. DELBOEUF, *Pourquoi mourons-nous?* ap. *Revue philosophique*, 1891, t. I, pp. 225, 409.

boule. L'œuf est une cellule remplie de biophores variés. Qu'est-ce qu'un biophore? Peu importe; il joue vis-à-vis de la cellule le même rôle que tout à l'heure la boule par rapport au sac, et, à la suite de divisions répétées, on n'aura plus que des cellules à une seule sorte de biophores : les unes nerveuses, les autres musculaires, les autres conjonctives, etc. Le biophore est en quelque manière la vision quantitative et unitaire de la *qualité*.

Reste la troisième condition, que nous avons négligée et que WEISMANN n'a pas formulée non plus; mais elle est implicitement nécessaire à sa doctrine. Puisque tout s'y passe en effet au commencement et à la fin comme dans l'exemple de Delbœuf, nous sommes amenés à faire aussi concorder les phénomènes intermédiaires, et si nous ne le faisons pas, nous demandons ce qu'il reste d'une théorie qui laisse en suspens ce point capital. Donc, puisqu'aussi bien toute cellule, entre la division qui l'a formée et celle qu'elle doit subir, se complète en empruntant au milieu extérieur des matériaux, il faut croire qu'elle *assimile* ceux-ci *proportionnellement aux déterminants qu'elle contient*. Ce qui revient à dire que c'est le *biophore qui assimile*. C'est l'atome vital doué de toutes les propriétés de la cellule.

La représentation est assez adéquate aux faits tant qu'il s'agit du soma, mais pour le germen? Pour les cellules germinales qui doivent conserver tous les biophores? Il suffit de mettre une détermination statique de plus; qui empêche d'en mettre autant qu'il en faudra? Donc il y a une petite

quantité du protoplasme dans l'œuf qui est mise comme à part et qui, de cellule en cellule, passe jusqu'aux cellules génitales. C'est comme si dans notre sac plein de boules variées, il y avait eu deux ou trois sacs plus petits, pleins de toutes petites boules rouges, blanches, bleues, noires, etc. : ils n'auraient pas été compris dans le jeu et seraient restés invariables et clos dans celui des sacs formés par division où le hasard les aurait mis. Mais à la fin, arrivés dans un sac homogène, ils auraient été prêts à grossir et à servir à leur tour, à la condition de contenir encore en eux d'autres petits sacs semblables prêts à fonctionner de la même façon quand leur moment sera venu.

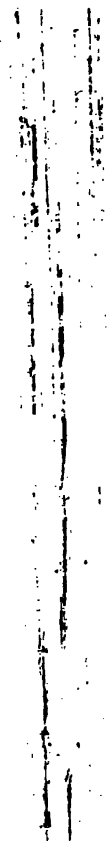
C'est à proprement parler la vieille théorie de l'emboîtement des germes; tant il est vrai qu'il n'y a qu'une seule façon statique d'arranger les phénomènes. Ce qui varie seulement, c'est le plus ou moins d'ingéniosité que l'on met à raccorder ce couronnement d'idées pour ainsi dire immuables aux connaissances techniques des diverses époques.

Il est à peine utile de signaler que, pour ce raccord, WEISMANN croit préciser en disant que les *biophores* sont arrangés en *déterminants*, ou si l'on veut les atomes en molécules; les déterminants ne diffèrent entre eux que par l'arrangement des biophores. Après cela les déterminants se groupent en *ides* qui sont visibles, et qui sont les microsomes dont est formée la chromatine du noyau; et les ides eux-mêmes s'arrangent en *idantes*, lesquels ont pour forme matérielle une anse chromatique.

Redescendons la série de réduction à l'unité :

- Unité cellulaire ou plutôt nucléaire,
— chromatique ou anse ou idante,
— matérielle ou chromosome ou ide,
— moléculaire ou déterminant,
— atomique ou biophore.

Cette construction théorique, qui semble calquée sur celles qui ont rendu à la Chimie d'indéniables services, est-elle acceptable pour cela ? Faut-il l'admettre, puisqu'elle renaît périodiquement comme une fatale production de la pensée humaine, ou faut-il à cause de cela s'en méfier comme d'une tare de notre esprit et la consigner dans le recueil des équations de correction ? C'est ce dernier parti qui nous semble le juste, d'autant mieux que la Chimie, arrivée au terme au-delà duquel la matière ne se laisse plus réduire et ne livre plus avec nos moyens actuels d'investigation aucune donnée sensorielle, entre, faute de pouvoir faire autrement, dans la Métaphysique et nous parle d'atomes matériels, tandis que la Biologie n'en est pas à subir cette contrainte. Le champ de ses recherches n'est pas épuisé ; elle ne peut parler d'*atomes de la matière vivante* avant d'avoir réduit la *vie* à la *non-vie* et la matière vivante à la matière tout simplement.



DES DIFFICULTÉS QUI S'OPPOSENT A UNE CLASSIFICATION RATIONNELLE DES SCIENCES

Par GIOVANNI VAILATI,
Professeur à l'Institut technique de Bari.

§ I

La tendance progressive à la division du travail et à ce qu'on appelle la spécialisation des fonctions doit peut-être être regardée comme le plus fondamental des caractères communs à tous les processus de développement de la coopération humaine dans les divers domaines où elle se manifeste.

De l'existence de cette tendance et de l'importance d'en rechercher les causes et les conséquences, nous trouvons déjà une conscience nette dans les écrits des penseurs les plus anciens qui se soient occupés de spéculer sur les conditions de stabilité et de développement des États et des Sociétés. PLATON, dans plusieurs passages remarquables de sa *République*, indique, comme condition nécessaire de la vitalité et de la durée de n'importe quelle forme d'association humaine, la répartition complète des divers

métiers et fonctions entre les classes sociales et les citoyens et décrit les avantages inhérents à une organisation politique qui permet à chaque membre de la société d'exercer son activité dans la direction et dans la mesure déterminée par ses aptitudes spéciales. Et il n'a pas même manqué, comme on sait, d'insister sur les analogies que cette organisation rencontre dans le domaine physiologique, et de donner pour exemple du profit que l'on peut tirer de la comparaison, en cet égard, de l'organisme social avec les organismes biologiquement dits pour l'étude de la composition et des rapports réciproques des diverses parties dont le premier est composé.

Dans la *Politique* d'ARISTOTE, les avantages et l'importance sociale de la division du travail font souvent l'objet de considérations, et il s'y manifeste une tendance à voir dans elle quelque chose de plus qu'une propriété caractéristique de toute société humaine ou animale, et à y reconnaître une loi générale qui embrasse tous les produits de la nature organique¹.

Mais, tandis que, en ce qui concerne la production matérielle, l'échange et la distribution des richesses, la recherche des conditions et des effets de la division du travail a donné lieu à la constitution d'une science spéciale et que, depuis ADAM SMITH, n'a pas cessé d'acquérir une importance tant théorique que pratique, les faits de nature analogue qui se rapportent à d'autres formes d'acti-

1. Cf., par exemple, *Polit.*, 1253 b : « οὐδὲν γὰρ ἡ φύσις ποιεῖ τοιοῦτον οἷον οἱ κοτύποι τὴν Δελφικὴν μάχαιραν πενιχρῶς, ἀλλ' ἐν πρὸς ἐν· οὕτω γὰρ ἂν ἀποτελοῖτο λίστα τῶν ὀργάνων ἕκαστον, μὴ πολλοῖς ἔργοις, ἀλλ' ἐνὶ δουλεύων. »

collective, comme la science, l'art, le langage, les institutions familiales, etc., n'ont commencé que depuis peu de temps à être examinés et analysés du même point de vue, surtout sous l'influence de la théorie de l'évolution. La cause en a été, sans doute, outre le moindre intérêt direct qu'offrent ces dernières études, la complexité plus grande des questions correspondantes, en comparaison des questions purement économiques, et la nécessité qui s'ensuit de faire précéder tout essai de synthèse ou de généralisation, dans ces autres domaines, d'une plus grande somme de recherches analytiques et descriptives destinées à choisir et à élaborer les matériaux, toujours croissants en quantité et en qualité, apportés par les progrès des sciences historiques et philologiques.

Parmi les nombreux sujets qui se prêtent actuellement à des études de ce genre, un des plus intéressants me paraît être celui du développement et de la différenciation graduelle des diverses branches de la recherche scientifique; c'est sur ce sujet que je me propose d'exposer quelques brèves observations, destinées à mettre en lumière ses rapports intimes avec les questions théoriques et pratiques relatives à la classification des sciences.

§ II

Ce qui précède était nécessaire pour justifier la méthode et la forme d'exposition que je veux employer dans cette étude, et pour faire comprendre que mon intention n'est

pas de proposer quelque nouveau schème de classification à joindre à tous ceux qui ont été proposés jusqu'ici, ni bien d'examiner et de caractériser quelques-unes des difficultés qui s'opposent à une solution satisfaisante du problème, et d'attirer l'attention sur les causes probables du fait que ces difficultés n'ont pas encore pu être complètement surmontées.

Une des principales de ces causes est celle que j'ai déjà indiquée, à savoir la croyance qu'on pouvait détacher des spéculations relatives au meilleur moyen d'ordonner et classer les connaissances humaines, de toute considération relative aux motifs d'ordre pratique qui ont déterminé la division du travail intellectuel, tels qu'ils existent effectivement, et tels qu'ils se sont développés, soit dans l'organisation des professions, soit dans la transformation des institutions d'éducation destinées à préparer les jeunes gens aux diverses fonctions de la vie sociale. En d'autres termes, dans cette question comme en d'autres analogues on ne s'est pas suffisamment aperçu que, pour que la recherche de *ce qui doit être* réussisse et aboutisse à des conclusions valables, elle doit être précédée d'une attentive de *ce qui est* et de *ce qui fut*, c'est-à-dire de la connaissance précise des facteurs qui ont contribué à déterminer le développement des phénomènes étudiés dans le sens où ils se sont développés en réalité. Dans notre cas il fallait s'attendre à ce que toute recherche d'un moyen parfait et idéal de répartir et de grouper les connaissances qui n'aurait pas égard aux répartitions effectives et his-

riques et aux causes de leur origine et de leurs vicissitudes, conduisit à des conclusions non moins fantastiques et utopiques que celles, plus nombreuses encore, relatives à la recherche d'un type imaginaire de société parfaite ou d'une forme idéale de gouvernement, construit indépendamment de toute étude des conditions positives et des lois qui dominent le développement et la vie des sociétés telles que l'histoire nous les montre avoir existé dans le passé.

§ III

Mais, bien que l'histoire de la civilisation dans ses diverses phases forme un préliminaire nécessaire pour guider l'étude de la question susdite, on ne peut pas espérer qu'elle suffise à elle seule pour écarter toutes les difficultés que rencontre celle-ci.

Parmi ces difficultés, en effet, il en est quelques-unes qui dépendent moins de la rareté des données de fait ou de la complexité du sujet que de défauts radicaux inhérents à la manière même de concevoir et de formuler le problème à résoudre, et de ce qu'on l'énonce sous une forme trop restrictive, et propre à suggérer des exigences irrationnelles ou des conditions disparates qu'il est impossible de satisfaire simultanément.

Contre cette seconde cause de difficultés et de malentendus, dont la principale origine est un ensemble de conceptions erronées ou vagues touchant la nature et le but des processus de « classification » en général, on ne

peut mieux réagir, ce me semble, qu'en soumettant celles ainsi que les opérations mentales qui s'y rattachent, à une analyse un peu plus précise et rigoureuse. Ce n'est qu'en appliquant les résultats de cette analyse au problème que l'on pourra réussir à séparer sûrement en leurs parties solubles des insolubles, les questions qui valent la peine qu'on cherche à y répondre, de celles qui ne peuvent admettre de réponse d'aucune sorte, et qu'on pourra ensuite procéder à des recherches spéciales parfaitement déterminées et capables de conduire à des conclusions de quelque valeur pratique.

§ IV

Pour ce qui regarde cette face pour ainsi dire préjudicielle de la question, ce n'est pas pour moi un mince avantage que de pouvoir appuyer les considérations qui suivent sur les vues générales exposées récemment par DURAND (de Gros) dans un ouvrage magistral sur la nature et les fins des classifications scientifiques¹. Ses recherches inspirées spécialement par le désir de préciser et d'approfondir le concept de classification naturelle qui a eu tant d'importance dans le développement des sciences biologiques, ont conduit DURAND (de Gros) à établir des distinctions fondamentales entre les divers types de classifications caractérisés par les divers critères employés dans chacun d'eux à déterminer la place et le mode de composition des groupes d'objets à classer.

1. *Aperçus de Taxinomie générale*, 1 vol. in-8° (Paris, Alcan, 1899).

Il y a d'abord ce qu'il appelle les « classifications par ordre de généralité », qui sont celles où les objets sont successivement distribués en groupes déterminés par le fait qu'ils possèdent ou non certains caractères de ressemblance ou des propriétés communes. Les classifications de ce type, les seules, peut-on dire, qui aient été suffisamment considérées par la Logique traditionnelle, sont caractérisées par le fait qu'à chacun des objets classés on peut appliquer autant de dénominations diverses, de plus en plus générales, qu'il y a d'opérations successives de subdivision à effectuer pour atteindre la plus petite des classes qui le contiennent; dénominations qui, appliquées à un objet, servent à exprimer qu'il possède certaines propriétés ou caractères en commun avec les autres objets auxquels s'applique la même dénomination.

Tout différent est le cas des classifications du second type étudié par DURAND, et qu'il appelle « classifications par ordre de composition ». Dans celles-ci, le placement et la distribution des objets en groupes sont régis, non par des considérations relatives à leur ressemblance plus ou moins grande, ou au nombre et à l'importance de leurs caractères communs, mais seulement par le fait qu'ils figurent ou non comme parties dans d'autres objets, qui à leur tour sont distribués en classes d'après le même critère, c'est-à-dire suivant la place qu'ils occupent dans la composition d'autres objets plus complexes; et ainsi de suite.

Ce cas se présente, par exemple, quand on compose par la pensée une machine de ses diverses parties, et que dans

chacune d'elles on distingue les divers organes qui la constituent, pour décomposer finalement ces derniers en leurs parties élémentaires.

Il n'est pas superflu de remarquer que dans les classifications de ce second type, à la différence de celles du premier, à toute dénomination adoptée pour désigner chaque groupe correspond un objet non moins « réel » et concret que ceux qui correspondent aux noms des diverses parties dont le groupe lui-même se compose, et toutefois on ne peut appliquer à aucune de ces parties le nom qui désigne le groupe qu'elles constituent ensemble, comme dans le cas du premier type.

Ainsi, pour éclairer la chose par un exemple tiré de notre sujet, si dans une classification des sciences « par ordre de généralité » figure la catégorie « sciences historiques » comprenant, par exemple, l'histoire des religions, la statistique comparée, la linguistique, etc., la dénomination de « science historique », s'appliquant aussi à chacune de celles-ci en particulier, devra être regardée simplement comme exprimant qu'elles possèdent un certain ensemble de caractères communs. Si au contraire, en adoptant une classification par ordre de composition nous avons été conduits à établir un groupe de recherches relatives aux phénomènes sociaux, en le désignant, par exemple, par le nom de sociologie, et à distinguer en lui comme parties intégrantes, les diverses disciplines qui ont pour objet quelque face spéciale de ces phénomènes, par exemple la face économique, ou la face politique, ou

face anthropologique, etc., alors, non seulement il ne serait pas permis d'appliquer à chacune des sciences qui s'occupent de ces diverses faces le nom de « sociologie », mais celui-ci devrait être regardé comme désignant une discipline non moins réelle et concrète que chacune de celles qui lui sont subordonnées, attendu qu'elle a une tâche spéciale qu'aucune d'elles ne pourrait assumer, et à laquelle chacune de ces sciences partielles doit contribuer dans la mesure qui lui incombe.

Outre l'espèce de « classifications par composition » que nous venons de considérer, et où les divers groupes subordonnés, correspondant aux divers rameaux de l'arbre qui figure la répartition des objets classés, représenteraient les diverses parties en lesquelles se décompose l'objet correspondant au tronc, il y en a une autre où l'on suit le processus inverse, c'est-à-dire où les rameaux représentent les objets composés, et le tronc ou les troncs correspondent aux éléments qui entrent dans leur composition. C'est le cas des classifications de la Chimie et de la Minéralogie, où, en prenant pour point de départ les corps simples, on subordonne à chacun d'eux ses composés, et à ceux-ci, à leur tour, les divers produits plus complexes qui en dérivent. Il est intéressant de remarquer, pour l'objet de notre étude, que l'analogie qui existe entre ce second type de classifications et les classifications par ordre de généralité est une des causes principales de cette manière de concevoir la nature des idées abstraites qui porte dans l'histoire de la philosophie le nom de « réalisme » (par opposition

au « nominalisme »). En effet, faute d'une notion claire des différences essentielles de ces deux types de classifications, on a cru pouvoir appliquer au premier toutes les propriétés du second, et on a été conduit en particulier à admettre que, même dans les classifications par ordre de généralité, les noms de plus en plus abstraits et généraux qui désignent les divers groupes doivent effectivement correspondre à quelque « entité » spécialement « inhérente » à chacun des objets auxquels s'applique le nom général lui-même, de la même manière que, par exemple, en Chimie le nom de « carbonate » exprime la présence d'un certain élément de composition dans tous les corps auxquels il s'applique.

Les autres types de classification, que DURAND appelle respectivement « classification par hiérarchie » et « classification par généalogie » sont bien plus analogues au type de classification par composition qu'au type de classification par ordre de généralité. La classification généalogique, comme son nom l'indique, n'est applicable que quand il s'agit d'objets qu'on peut considérer comme dérivés les uns des autres, soit par génération proprement dite, soit par transformation et différenciation progressive, comme c'est le cas, par exemple, pour les langues et les institutions sociales; il consiste à distribuer ces objets en groupes suivant leurs affinités génétiques.

La différence principale entre ce type de classification et les deux premiers consiste en ce qu'ici le nom qui se trouve pour ainsi dire en tête de chaque groupe d'individus

au lieu d'exprimer l'ensemble qu'ils constituent réunis, indique un autre individu ayant une existence à part et dont ils proviennent, de la même manière que d'eux-mêmes proviennent à leur tour d'autres individus constituant de nouveaux groupes, et ainsi de suite.

Il y a quelque chose d'analogue dans les classifications par hiérarchie, où en tête de chaque groupe figure pareillement un individu qui occupe par rapport à lui une position privilégiée; comme, par exemple, dans le cas d'une armée, le commandant par rapport à ses subordonnés, ou en Astronomie, le soleil par rapport aux planètes, et celles-ci par rapport à leurs satellites.

§ V

Ces quatre types de classifications sont certainement loin de comprendre et d'épuiser toutes les variétés de schèmes et de processus employés pour grouper et ordonner un ensemble donné d'objets. Mais ce qui a été dit de leurs caractères distinctifs peut suffire à donner une idée des variétés de critères qui peuvent et doivent nous guider dans le choix des classifications opportunes, lorsque les objets à classer sont de nature à être réunis entre eux, comme dans notre cas, sous une multitude de rapports hétérogènes et compliqués, dont chacun réclame sa part d'attention.

C'est justement dans cette circonstance qu'il faut chercher, à mon avis, une des principales raisons pour lesquelles, parmi les nombreuses tentatives (fréquentes à

toutes les époques de l'histoire de la civilisation) de construire un schème idéal de répartition des diverses branches du savoir, qui représente dans un tableau unique leurs affinités et leurs rapports fondamentaux, aucune n'a atteint son but d'une manière complète et exempte d'objections. Tous ceux qui se sont attaqués à cette entreprise ont été conduits à se débattre entre deux ordres d'exigences difficilement conciliables : à savoir, d'une part, le dessein de fonder leur classification sur des critères aussi simples et uniformes que possible, et, d'autre part, le désir de la construire de telle sorte que les multiples espèces de connexions et de rapports qui existent entre les sciences s'y réfléchissent et y fussent représentées de la manière la plus complète et adéquate.

§ VI

Il convient ici d'abandonner ces assertions générales et d'examiner quelque classification concrète, pour vérifier sur elle les conclusions auxquelles paraissent aboutir les considérations précédentes. La classification bien connue de COMTE semble appropriée à cette fin, car elle se distingue justement de toutes les précédentes par le fait que son auteur avait conscience et se préoccupait davantage de la nécessité de trouver, en quelque sorte, un *compromis* entre les deux exigences susdites, et par les efforts systématiques qu'il a faits pour arriver à tenir compte simultanément de l'une et de l'autre.

En effet, une grande partie des argumentations par lesquelles Comte essaie de prouver la plausibilité du classement des sciences suivant la « série hiérarchique » qu'il propose, visent précisément à montrer l'intime connexion et l'interdépendance des divers critères hétérogènes qu'il emploie séparément à déterminer ce classement, et à convaincre qu'il suffit de se laisser guider par un seul d'entre eux pour être conduit par là même à des solutions conformes aux exigences qu'imposerait l'application des autres critères. Ainsi, tout en observant que la hiérarchie établie par lui entre les sciences correspond en même temps à l'ordre de leur développement historique et à la « généralité décroissante » des propriétés et des lois qu'elles étudient, Comte s'attache à faire ressortir que, si ces deux critères aboutissent à justifier le même classement en série, ce fait est bien loin d'être dû à une simple coïncidence accidentelle. Il trouve, selon lui, sa raison d'être en ce que, plus les phénomènes étudiés par une science correspondent à des propriétés générales possédées en commun par les objets les plus hétérogènes ¹, plus les lois et les uniformités qui s'y rapportent, se rencontrant dans un domaine plus large de notre expérience, s'offrent spontanément à l'observation, et ont l'occasion d'être reconnues et remarquées plutôt que les autres plus cachées et moins fréquemment vérifiables.

1. Telles sont, par exemple, à un degré extrême, les propriétés étudiées par l'Arithmétique ou l'Algèbre, qui se trouvent vérifiées dans n'importe quel ordre de phénomènes, en tant du moins qu'ils sont susceptibles d'être comptés ou mesurés.

Conformément à cette observation, la raison pour laquelle la Géométrie s'est développée et constituée comme science avant la Biologie, par exemple, consisterait surtout selon Comte, en ce que les recherches dont la première s'occupe se rapportent à une propriété commune à tous les corps, celle d'être étendus et d'avoir une figure et des proportions déterminées, tandis que les recherches du biologiste ne portent que sur une catégorie spéciale de corps ceux qui, outre les propriétés qui font l'objet de la Géométrie, en possèdent encore d'autres spéciales, dont le géomètre, comme tel, peut et doit même faire abstraction c'est-à-dire les corps qui sont soumis, *non seulement* aux lois qui expriment les propriétés de l'espace ou celles de la matière inorganique, *mais encore* à d'autres lois plus compliquées que le biologiste a pour objet spécial de découvrir et de formuler.

Comte est encore obligé de recourir à des considérations analogues quand il veut montrer que les deux critères précités, savoir celui de l'ordre historique de développement et celui de la « généralité décroissante », ne sont pas les seuls qui servent de base à sa classification, mais qu'elle tient encore compte des affinités plus ou moins grandes que présentent les diverses sciences fondamentales, au point de vue de la *méthode* et de ce qu'on pourrait appeler leur *structure logique*.

C'est ainsi, par exemple, qu'il s'efforce de prouver que la prédominance qu'ont, dans la Mécanique proprement dite, les processus de déduction, en comparaison de l'importance

plus grande qu'acquiert la méthode inductive et expérimentale dans les diverses branches de la Physique, est simplement due à ce que les lois fondamentales de la première sont caractérisées par rapport à celles de la seconde par une moindre « complexité », attendu que, par le seul fait qu'elles s'étendent à un plus vaste ensemble de phénomènes, elles doivent correspondre à un degré supérieur d'abstraction des données concrètes et compliquées de l'expérience.

Dans cette même classe rentrent encore les considérations que Comte emploie pour mettre en lumière que son classement en série des sciences fondamentales concorde aussi avec l'ordre dans lequel on doit les ranger, quand on veut que chacune d'elles soit précédée de toutes celles dont elle présuppose la connaissance, c'est-à-dire de toutes celles dont l'étude constitue une partie intégrante de la préparation intellectuelle qu'elle exige.

§ VII

Or si l'on ne peut contester ni la profondeur ni la portée de ces observations, et d'autres du même genre, sur le sujet en question, il n'est pas difficile de reconnaître que l'application directe et simultanée que Comte en fait pour justifier son système de classification, équivaut à supposer résolues, pour ce qui regarde les relations des sciences entre elles, une foule de questions particulières et préliminaires dont l'examen suffisamment approfondi conduirait à des conclu-

sions assez différentes de celles où aboutissent les assertions vagues et générales que nous venons de rapporter.

Ainsi, par exemple, croire que l'ordre chronologique du développement des diverses sciences peut être principalement déterminé par l'extension plus ou moins grande du domaine soumis aux lois qu'elles étudient respectivement, équivaut à ne pas tenir compte de toute une classe de circonstances que l'histoire des sciences montre avoir exercé une influence décisive sur leur constitution et leur développement, c'est-à-dire les connexions plus ou moins directes qui relient ou ont relié, dans les phases successives du développement de la civilisation, chaque ordre de connaissances aux besoins pratiques et aux exigences de la vie économique et sociale. Et même en faisant abstraction de cela, il est un fait des plus constamment observés et remarqués par tous ceux qui se sont occupés de recherches comparatives sur le développement des facultés intellectuelles chez les races primitives, ou sur celui de la curiosité des enfants, à savoir que la fréquence avec laquelle un phénomène donné se présente comme objet d'expérience possible, loin d'être par elle-même une cause qui attire l'attention sur lui, est plutôt un obstacle au désir de connaître comment il se produit et à quelles lois il obéit.

Ainsi, tandis que les premières tentatives pour observer avec quelque précision et soumettre à la mesure un phénomène aussi commun et usuel que celui de la chute des poids, librement ou suivant une surface qui le retient, remontent pas à plus de trois siècles, on voit à quelle an-

quité reculée remontent les statistiques et les calculs destinés à déterminer empiriquement les périodes qui règlent la production de faits aussi rares et extraordinaires que les éclipses.

§ VIII

Une autre partie de la théorie de Comte qui prête à des objections encore plus graves est celle qui regarde les conditions dont dépend la plus ou moins grande applicabilité de la méthode déductive dans certains domaines de la recherche scientifique. La tendance à établir une connexion directe entre cette applicabilité et le degré de « généralité » (au sens expliqué ci-dessus) des propriétés et des lois qui font l'objet de chaque science, entraîna Comte à quelques-unes de ses conclusions les moins justifiées touchant le caractère logique et la méthode propre de chacune des sciences fondamentales. Il est difficile d'attribuer à une autre cause que celle-là la répugnance caractéristique qu'il éprouve à admettre que l'emploi de la déduction puisse en quelque mesure contribuer à résoudre les questions relatives aux phénomènes sociaux ; répugnance qui, outre qu'elle l'a induit à apprécier avec une injuste sévérité l'applicabilité du Calcul des probabilités aux recherches sociologiques, l'a porté à méconnaître entièrement le caractère logique de cette partie de la science économique qui a pour objet de déterminer les conséquences qu'engendrerait le libre jeu d'une classe déterminée des mobiles humains, si leur action

pouvait être isolée de celle des autres mobiles qui peuvent influencer sur l'action des hommes dans un milieu social donné. L'étroite affinité de méthode et la remarquable analogie de structure que cette importante branche des sciences sociales présente avec les parties de la Physique mathématique où les principes et les théories de la Mécanique trouvent leur application la plus simple et la plus directe ne lui auraient certainement pas échappé, s'il avait été moins dominé par le préjugé d'une connexion directe entre l'extension du domaine de validité des lois les plus générales d'une science, et le degré d'applicabilité de ses procédés déductifs à celle-ci. La persuasion qu'une telle applicabilité devait décroître sans exception de chaque science à la suivante, dans l'ordre hiérarchique établi par lui de la Mathématique à la Sociologie, l'a conduit à ne voir purement et simplement que, parmi les diverses branches spéciales dont cette dernière science se compose, il pût exister une qui fût propre (comme l'est en fait l'Économie politique) à remplir à l'égard des autres l'office que remplit la Mécanique parmi les sciences physiques, lequel consiste à calculer séparément les conséquences de celles des propriétés des objets et des phénomènes en question qui, par leur simplicité et mesurabilité plus grandes, sont plus facilement accessibles au traitement déductif, et plus aptes à servir de point de départ et d'appui à l'analyse et à la détermination successive des diverses causes qui dans chaque cas concret, concourent et superposent leurs effets de manière qu'il est difficile de reconnaître dire

tement par induction les lois qui régissent leur mode d'action.

§ IX

Un autre exemple des piètres conséquences auxquelles peut conduire la recherche abstraite d'un classement systématique des diverses sciences est fourni par la place et la partie qui sont accordées à la Psychologie dans le tableau de Comte. Le fait qu'elle figure comme un simple chapitre ou appendice de la Biologie ne me paraît pas devoir être attribué seulement à l'idée que Comte se faisait de l'importance des recherches relatives aux concomitants physiologiques des faits de conscience, ou au trop peu d'importance qu'il attribuait aux recherches psychologiques qui procèdent directement de l'introspection proprement dite, à l'interprétation et à l'analyse comparée des produits et des manifestations extérieures des activités intellectuelles et morales. Ce qui y a aussi certainement contribué en grande partie, c'est le désir d'éviter le trouble qu'aurait apporté, dans l'harmonie du système de classification adopté, l'introduction importune d'une nouvelle science fondamentale qui serait venue s'insérer entre la Biologie et la Sociologie, bien qu'elle eût avec chacune de ces sciences et avec les autres des rapports de nature hétérogène à ceux qu'on avait choisis au début comme critères ordonnateurs de la classification.

L'étroite connexion qui relie la partie de la Psychologie qui recherche la genèse et le mode de développement et

d'action des facultés intellectuelles avec tous les ordres d'études qui, sous un nom ou sous un autre, se rapportent à l'analyse des méthodes et des procédés de recherche scientifiques, ou à la détermination des diverses causes d'erreur ou d'illusion et des moyens de s'en prémunir, n'était pas de ces relations qu'on pouvait négliger comme insignifiantes dans un système qui, comme celui de Comte, tend à faire concevoir la Philosophie comme une Méthodologie générale des sciences, et qui se distingue des systèmes précédents surtout par ce qu'il prend pour base une généralisation historique et empirique de nature essentiellement psychologique, comme est la loi des trois états.

Une théorie de la connaissance et une Logique (comme du reste aussi une Éthique et une théorie des fins et des idéaux humains) auxquelles ne correspondrait pas un groupe organisé et indépendant de recherches scientifiques, ayant avec elles la même relation que la Biologie avec la Médecine, ou les sciences mécaniques et physiques avec les applications industrielles, auraient dû lui apparaître comme privées de la première condition nécessaire de leur constitution et de leur progrès.

Qu'une telle considération n'ait pas suffi à faire admettre par Comte la Psychologie dans la série des sciences fondamentales, cela ne peut s'expliquer, ce me semble, que par la crainte d'introduire avec elle un élément d'incohérence dans la hiérarchie des sciences qu'il avait construite : dans le sein de la Psychologie, comme dans celui du cheval de

Troie, pouvaient se cacher des embûches visant à bouleverser les fondements mêmes de son organisation des sciences, et à pratiquer en elle la brèche par où entrerait la « Métaphysique » tant redoutée.

Pour comprendre qu'une telle crainte ne fût pas tout à fait injustifiée, il suffit de penser à la compétence toujours plus grande qu'on tend à attribuer à la Psychologie, et spécialement à la Psychologie comparée, dans toutes les questions qui regardent la critique des notions et des principes qui sont à la base de chaque science, y compris la Mathématique et la Mécanique, et au besoin toujours croissant qu'elles éprouvent d'approfondir et de décomposer en leurs éléments les plus simples les concepts et les processus fondamentaux dont elles se servent. On s'aperçoit de plus en plus que les questions relatives à la légitimité de ceux-ci et aux limites de leur validité et de leur applicabilité, ne peuvent se séparer des recherches qui portent sur leur origine, sur les diverses formes sous lesquelles ils se sont présentés aux diverses époques de l'histoire, sur les causes ou les conditions qui en déterminèrent le développement et les modifications.

Il est naturel qu'à la fonction singulière et originale que la Psychologie assume ainsi à l'égard des autres sciences, comme intermédiaire indispensable entre elles et tout essai de s'élever à une conception synthétique du monde et de la vie, doit correspondre une position non moins singulière et caractéristique dans toute classification des sciences qui

aspire à tenir compte des liens les plus organiques fondamentaux qui les unissent¹.

§ X

Aux considérations en apparence purement critique négatives qui précèdent on ne peut pas, je crois, reprocher de ne conduire à aucune conclusion positive et pratique.

En premier lieu, elles tendent à montrer que la recherche d'une classification idéale et parfaite des sciences appartient à cette importante classe de recherches dont la valeur dépend pas tant du plus ou moins de probabilité d'atteindre le but qu'elles se proposent, que de l'importance des problèmes spéciaux qu'elles impliquent, des questions qu'elles soulèvent et dont elles provoquent et préparent la solution.

En second lieu, en admettant que les observations critiques exposées ci-dessus suffisent à faire considérer comme utopique et irréalisable la construction d'un schéma de distribution des sciences capable de représenter d'une manière adéquate leurs relations multiples, d'un autre côté, elles incitent, loin d'en détourner, à élaborer des schèmes d'une portée plus spéciale et déterminée, appropriés à l'une ou l'autre des fins particulières qu'une classification peut viser. Suivant que cette fin est celle de dresser

1. J'entends la Psychologie au sens le plus large, comme comprenant non seulement la Psychologie individuelle proprement dite, mais encore la Psychologie sociale, dans toutes leurs ramifications, de la psychologie de l'enfance à la psychiatrie, de l'histoire des religions à celle des inventions et découvertes, de l'étude des besoins et de la coopération économique aux recherches sur l'instinctivisme et aux phénomènes dits psychiques, de la philologie comparée à la « sémantique » et au « folk-lore », etc.

catalogue bibliographique, ou d'organiser un institut didactique, ou d'établir le plan d'un travail historique, ou de préparer la matière d'une étude comparative des méthodes, des procédés ou des attitudes mentales de chaque science, il est naturel que, les critères de répartition et de groupement étant différents, le résultat auquel ils conduisent soit aussi différent, et cette diversité de résultats n'a aucun inconvénient ni pratique ni théorique.

Enfin on peut tirer des considérations précédentes une dernière conséquence pour ce qui concerne les rapports des questions sur la classification des sciences avec celles relatives à l'organisation et à la division du travail entre les savants. On peut dire que, tandis que le but des classifications en général est de représenter simultanément, comme en un tableau, les relations qui existent, à un point de vue donné, entre chacun des objets à classer et *tous* les autres, dans le cas présent, au contraire, la chose la plus importante, pratiquement et théoriquement, est de préciser et de critiquer les critères qui peuvent amener à justifier et ratifier, ou bien à modifier ou supprimer, pour chaque science, les frontières qui en limitent le domaine par rapport à *deux ou trois* autres qui peuvent être considérées, sous un rapport ou sous un autre, comme limitrophes ou comme capables de lui disputer la possession de territoires contestés.

Entre la recherche d'un groupement parfait et idéal des diverses sciences suivant un critère uniforme et nécessairement unilatéral, et l'adhésion passive aux divisions tradi-

tionnelles entre les domaines des différentes sciences, des tentatives pour beaucoup desquelles ont disparu depuis longtemps les causes historiques qui leur donnèrent naissance. Il y a un large champ ouvert à des tentatives utiles et importantes; si elles ne réussiront pas à ordonner et à unifier d'après de nouveaux principes la variété multiple des connaissances humaines, elles n'en seront pas moins fécondes et moins efficaces pour faire avancer la science et pour améliorer l'économie des efforts qui tendent à l'accroître.

SUR UN ARGUMENT TIRÉ DU DÉTERMINISME PHYSIQUE EN FAVEUR DE LA LIBERTÉ HUMAINE

Par JOSEPH WILBOIS.

1. — *Position du problème.*

Le développement du déterminisme physique a suggéré de nouvelles objections à la thèse de la liberté humaine. Voici les principales :

1° Au morcelage du sens commun, la Physique a ajouté un morcelage plus rigoureux. Le sens commun distingue seulement les corps : dans chaque corps, la science distingue la masse, la quantité d'électricité, la quantité de magnétisme, la quantité de chaleur. Or tout morcelage prépare une conception associationniste, et, par là, déterministe, de l'univers.

2° Les êtres physiques agissent les uns sur les autres par influence immédiate. Influence immédiate dans l'espace : aux actions à distance on substitue aujourd'hui les actions de milieu ; pour calculer des distributions de chaleur, il suffit de supposer que l'état d'une particule ne dépend que de l'état des particules voisines. Influence immédiate

dans le temps : les lois de Kepler n'exprimaient la position d'une planète qu'en fonction de ses positions aux moments antérieurs ; la loi de Newton, qui les résume, concentre en un instant toutes les données du problème. Nous sommes trop habitués à juger des liens des corps d'après l'action du nôtre pour ne pas voir ici un commencement de déterminisme : nous dominons mal les objets et les événements éloignés ; mais ce que nous tenons dans la main ne nous échappe pas pendant la minute présente.

3° La Physique substitue partout la quantité à la qualité : les sons et les couleurs ne sont que du mouvement ; et cette tendance devient l'idéal de toutes les sciences : la Psychophysique n'est pas seule à avoir une loi de Fechner. Quelle trace de liberté restera dans le monde quand il ne sera plus qu'un jeu de nombres ?

4° Il y a en Physique des lois qui, chaque jour, mettent plus d'ordre dans les phénomènes attribués d'abord à des puissances capricieuses (tonnerre, éclipses, hypnotisme) ; et ces lois sont quantitatives, donc plus contraignantes que les lois biologiques, qui autorisent des monstres et modifient lentement les espèces.

5° Les lois physiques réduisent aux notions les plus matérielles, masse ou mouvement, des notions empruntées à notre vie psychique, force ou énergie.

6° Ces lois sont simples (loi de Mariotte), ou, si elles sont compliquées (lois de la lune), elles sont formées de lois simples (loi d'attraction). Mais des lois simples sont évidemment des lois primitives ; nous connaissons donc par

elles le fond des choses, et nous n'y voyons pas la liberté qu'on trouve dans les lois nuancées de l'esprit.

7° Enfin toutes ces lois s'ordonnent en une unité de plus en plus vaste : la loi de Newton, en s'étendant à toutes les attractions, les attractions des étoiles, les forces capillaires, les affinités chimiques, a fait l'unité du monde physique; le transformisme a fait l'unité du monde vivant; les tentatives de réduction de la vie à des phénomènes physico-chimiques auront demain fondu ces deux univers; et, comme il est prouvé que la Physique est une forme du mécanisme et probable que la pensée est un produit de la vie, nous ne mourrons pas sans avoir vu réalisé le vieil idéal déductif qui aurait reconstruit l'univers avec une chiquenaude donnée à un paquet d'atomes.

Voilà ce que disent contre la liberté beaucoup de personnes qui ont étudié les sciences dans des manuels élémentaires, pas très anciens et pas très inexacts. Certes, aucun de leurs arguments n'a la moindre valeur : la quantification, la simplicité ou l'unité sont plus des tendances que des faits accomplis; un physicien les renverrait à des mémoires mieux informés et leur enseignerait la modestie scientifique. Cependant les savants eux-mêmes se laissent prendre parfois à ces arguments; c'est que, ces arguments se fondant sur les tendances qui sont les conditions mêmes de la découverte, le savant les porte en lui comme une obsession permanente; il ne les professe pas, il les vit; et les croyances les plus profondes dérivent moins d'une démonstration définitive que d'une probabilité quotidienne.

Répondre aux adversaires de la liberté que le déterminisme universel respecte l'homme parce que l'homme peut bien être un monstre dans la nature, c'est une échappatoire qui ne convaincra personne. L'argument récent, fondé sur l'existence de solutions singulières dans les équations de la Mécanique, semble plus solide : on accepte le mécanisme intégral, et, les cas d'indétermination des problèmes ainsi posés, on les fait correspondre aux actes de la vie psychique. Mais en conciliant ainsi le déterminisme et la liberté n'a-t-on pas dénaturé à la fois la notion de la liberté et la notion de la science ? Les conditions de l'acte libre ne sont pas les conditions d'équilibre d'une balance folle, et les données de la science ne sont pas l'intangible expression de la réalité, mais plutôt les recettes de notre action sur elle. Nous renvoyons, pour le premier point, à l'admirable Chapitre III de l'*Essai sur les données immédiates de la conscience* de M. BERGSON ; et nous allons donner quelques indications pour l'étude du second point.

Nous reprendrons un à un les arguments des déterministes. Nous ferons voir d'abord ce que chacun d'eux a d'exagéré ou même d'inexact ; puis nous montrerons que, si on l'approfondit, il signifie précisément le contraire de ce qu'on croit y découvrir. Nous aboutirons à cette conclusion que la science n'a pas pour but la connaissance plus profonde, mais l'action plus large, dans un multiple sens que notre analyse précisera peu à peu : action corporelle vulgaire, action industrielle, facilité de calcul, commodité du

discours général, soulagement de la mémoire par le petit nombre des formules, domination générale du monde physique. Le déterminisme scientifique n'aura donc de sens que par rapport à cette spontanéité qui a créé la science, et il ne l'expliquera pas, puisqu'il s'explique par elle.

Qu'il y ait des travaux de Physique dont les auteurs aient sincèrement cherché le fond du réel, sans souci d'action d'aucune sorte, c'est le fait le plus certain du monde ; aussi ne prétendons-nous pas que l'action soit le but explicite de tous les savants, mais qu'on la rencontre dans l'allure générale des procédés et des postulats directeurs, qui sont le fondement inaperçu de toutes les recherches de détail. Que cette orientation générale soit masquée, à certaines époques, par le rêve particulier d'un homme de génie qui sera devenu la règle de tout un siècle, c'est incontestable encore : le développement de la science n'est pas un mouvement populaire où on puisse fondre en une moyenne les œuvres de tous les individus, mais une discontinuité d'efforts où il faudra faire la part de quelques grandes contingences. Que la science enfin renferme, sous le problème d'action, un problème métaphysique, nous le nions moins que personne ; la science ne moule pas le réel, mais elle s'appuie sur lui ; ses données ne sont pas des résultats définitifs, mais des points de départ d'où l'on peut aller vers une connaissance plus approfondie, par une méthode analogue à la méthode régressive de M. BERGSON. Ce problème métaphysique a été traité par M. LE ROY dans son

mémoire *Science et Philosophie*¹. Nous le laisserons complètement de côté, pour n'examiner qu'un problème psychologique. Encore ne l'aborderons-nous que de biais. Il y a deux manières d'étudier la spontanéité du savant : la première, et la meilleure, consiste à en saisir l'épanouissement dans l'acte de la découverte, la seconde à en chercher quelques traces dans la science déjà formulée. Nous n'appliquerons ici que la dernière méthode, renvoyant pour la première, à notre travail sur l'*Esprit positif*².

Une comparaison éclaircira notre conception de la science. La Physique nous renseigne sur le réel comme un indicateur des chemins de fer sur la Géographie. Les chemins de fer ont un rôle pratique. On a cependant greffé sur le réseau principal des lignes de touristes ou des voies stratégiques, que nous comparerons à ces travaux scientifiques qui ne sont qu'accessoirement rattachés à l'action. Certain détail de la voie, comme une tête de ligne à Orléans, ne signifie pas qu'Orléans fait un très important commerce, mais que l'un des premiers chemins de fer s'y terminait : le rôle des Mathématiques dans l'Électrostatique de Poisson est un accident du même genre. Enfin une carte des chemins de fer représente à peu près les mouvements du terrain : les grandes lignes suivent généralement les vallées : de même ces formules artificielles que nous nommons les lois physiques expriment souvent, en gros, des rapports véritables des choses. Cependant c'est par un

1. *Revue de Métaphysique et de Morale*, juillet, septembre, novembre 1899 et janvier 1900, notamment les deux derniers articles.

2. *Revue de Métaphysique et de Morale*, mars 1901 et numéros suivants.

travail plus compliqué que nous pénétrons le plus souvent la réalité : ainsi des calculs sur l'horaire des trains et le prix des places nous indiqueront la pente du terrain, et, par là, la place des collines. Mais qu'on se garde avant tout de voir dans le réseau de chemins de fer quelque chose qui existerait avant l'industrie humaine ; qu'on ne dise pas qu'on a bâti une ville au centre du bassin de la Seine parce que beaucoup de lignes y convergeaient : ce serait la même erreur que de regarder l'homme comme le produit d'un faisceau de lois déterminantes : comme Paris a créé ses chemins de fer, l'homme a forgé ces lois.

II. — *Principes fondamentaux de l'étude critique des sciences physiques.*

Voici trois remarques qui sont le fondement de tout examen des méthodes de la Physique, et que démontrent surabondamment, pour celui qui n'en a pas trouvé l'intuition dans la pratique d'un laboratoire, les nombreux articles de M. POINCARÉ ¹, de M. DUHEM ² ou de M. MILHAUD ³.

1° *Tous les faits physiques sont symboliques.* — Dans

1. Plusieurs articles, chaque année, dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, particulièrement : *Le mécanisme et l'expérience* (novembre 1893), et : *La mesure du temps* (janvier 1898) ; plusieurs articles dans la *Revue générale des Sciences*, particulièrement : *Les idées de Hertz sur la Mécanique* (30 septembre 1897) ; et les préfaces de : *Théorie mathématique de la Lumière*, de : *Électricité et Optique*, et de : *Thermodynamique* (Paris, Carré, 1889, 1890 et 1892).

2. Une dizaine d'articles, depuis 1892, dans la *Revue des Questions scientifiques de Bruxelles*, notamment : *Quelques réflexions au sujet de la Physique expérimentale* (juillet 1894) ; et deux articles de la *Revue des Deux Mondes* : *Les théories de l'Optique* (1^{er} mai 1894), et : *Les théories de la chaleur* (15 juin, 15 juillet, 15 août 1895).

3. *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique* (Paris, Alcan, 2^e édition, 1898), et *Le Rationnel* (Paris, Alcan, 1898).

toute expérience, il y a un donné indépendant de nous pour le noter parfaitement, il faudrait cinématographier tous les mouvements du mercure thermométrique, toutes les oscillations des aiguilles aimantées, tous les déplacements des franges lumineuses. Une telle notation serait très longue. Il faut la condenser en un nombre. Pour cela faut substituer à la perception même des notions artificielles comme l'émission de la lumière, le déplacement électrique ou les tétraèdres de carbone. Le fait physique symbolise le donné. Symbolisme d'origine multiple, inspiré par certaines habitudes, par certaines analogies, par la prévision de certaines commodités, et toujours arbitraire dans une certaine mesure ¹. Pour mettre cet arbitraire en évidence j'ai tenté, dans un précédent travail, la séparation du symbolique et du réel, dans le cas des trois théories de la lumière ². La même méthode s'applique à l'Électrostatique ou à la Stéréochimie.

2° *Toutes nos mesures sont approximatives.* — Par exemple, le sinus d'un angle d'incidence, dans une expérience de réfraction, n'est mesuré qu'au $\frac{1}{1000}$. Si ces mesures vérifient la loi :

$$\sin i = n \sin r$$

elles vérifient aussi la loi :

$$\sin i = n \sin r + \frac{1}{1000} \cos^3 r$$

1. *La méthode des Sciences physiques*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VII, p. 602-603 (sept. 1899).

2. *Ibid.*, p. 605-612.

(puisqu'un cosinus est toujours inférieur à 1), et une infinité d'autres. Entre certaines limites, nous pouvons choisir arbitrairement les formules des lois physiques; elles ne nous sont pas plus imposées que la route d'un bateau dans une rivière.

3° *Toute expérience suppose toute la Physique.* — La théorie des instruments d'optique exige la connaissance des lois de la réfraction, et celles-ci ne sont vérifiables qu'avec des instruments d'optique. La mesure précise d'une longueur exige la méthode interférentielle de M. Michelson, qui s'appuie sur des lois optiques qui exigent des mesures de longueur. La simple visée d'une étoile est impossible sans les postulats fondamentaux de l'Hydrostatique, de l'Optique et de la Théorie de la chaleur. Il n'y a pas en Physique d'expérience isolée. Chaque fait est solidaire de tous les autres. Aucun résultat n'est définitif. On peut le changer sans erreur, à la condition de changer tout le reste. La science est un cercle vicieux qui ne tient que par une cohérence intérieure.

Aussi bien que la critique des méthodes, l'histoire des découvertes suggère ces trois remarques. Quels tâtonnements, après une expérience, pour arriver à l'interprétation reçue! Qu'on se rappelle seulement les arguments opiniâtres de Linus contre la pression atmosphérique, les objections faites aux expériences de dispersion de Newton, l'embarras de Newton lui-même à débrouiller la complexité de ses recherches qui auraient dû le conduire à découvrir l'achromatisme; la peine qu'on a eue, non seu-

lement à conclure, mais à voir, soit l'anneau de Saturne, soit les canaux doubles de Mars; l'interprétation Desormes et Clément donnaient de leur expérience, disaient-ils, ils tiraient la valeur du calorique absolu de l'espace; plus récemment, la confusion des idées sur les propriétés du point critique avant les expériences de M. Villard, les discussions soulevées par M. Quincke à propos des travaux de capillarité de M. Vincent, ou les critiques des recherches de M. Otto Wiener sur la direction des vibrations dans la lumière polarisée.

Concluons donc : le fait, tel qu'il est consigné dans les manuels, n'est qu'une des multiples interprétations de la perception primitive; si on l'a choisie, c'est pour des raisons qui tiennent à l'esprit; entre le donné et la science, il y a un triple jeu où se place toute une psychologie que nous allons maintenant étudier.

III. — *Première objection : morcelage rigoureux.*

Avant de posséder ce donné ondoyant, chaud, magnétique, coloré, il faut le figer et le casser : trois états de matière, des substances chimiques définies, des fluides impondérables qui coexistent sans se mêler, et des atomes voilà quelques éléments de ce morcelage, premier aspect du symbolisme, points d'attache des mesures, conditions des faits et des lois.

Ce morcelage ne nous est pas imposé. Si les critiques qu'adresse M. Bergson au morcelage des états de conscience ne peuvent convaincre que ceux qui ont vécu une dur

antérieure à cet artifice, tout le monde, en ce qui concerne la Physique, peut revivre une critique analogue, puisque c'est sur les morceaux du sens commun que la science fait ses découpures. Résumons les résultats de cette enquête.

Quand on a commencé à considérer des propriétés distinctes, on les a matérialisées en fluides impondérables, calorique, électricité, magnétisme, lumière, analogues aux fluides matériels que nous offre l'expérience commune : leur ressemblance avec un modèle les présentait déjà comme des copies. Puis, peu à peu, on a abandonné ces images grossières; les propriétés optiques sont devenues des vibrations; et déjà on pouvait prévoir qu'on détruirait un jour l'individualité de la lumière elle-même, comme on avait détruit celle de son premier symbole. Voici, en effet, que l'on trouve entre les propriétés des corps des liens insoupçonnés; il y a continuité entre l'état liquide et l'état gazeux, et M. Van der Waals les réunit dans une seule formule; la chaleur n'est qu'un équivalent du travail; le magnétisme est une manifestation de courants électriques; l'Optique se rattache à l'Électricité; les espèces chimiques ne sont peut-être pas plus définies que les espèces vivantes; et l'étude des parois semi-perméables, en permettant de réaliser réversiblement des combinaisons autrefois irréversibles, a détruit la vieille distinction de phénomène physique et de phénomène chimique. Le morcelage était nécessaire à l'expérience, mais l'expérience a rétabli partout la continuité. Cependant le morcelage a persisté; mais il est devenu, en quelque sorte, subjectif; au lieu de séparer

les phénomènes, on a séparé les points de vue; il n'y a plus, dans la Physique, le chapitre de l'énergie et le chapitre de la constitution moléculaire; mais il y a, dans chaque chapitre, la méthode moléculaire et la méthode énergétique. Avec les phénomènes physiques et les phénomènes chimiques, on a construit la Chimie physique, qui n'étudie pas un agent inconnu, mais qui reprend des faits anciens par une méthode qui trouve entre eux un lien nouveau. On découpe moins les choses que notre action sur elles : on respecte ainsi ce que le morcelage a de fécond et ce que la continuité a de vrai. Pour isoler les couleurs d'un tableau, on pourrait, avec des ciseaux, les découper dans la toile; mieux vaut les regarder à travers des verres de couleurs : plus ces verres sont variés, plus ce morcelage est riche, et le grand nombre des spectacles que nous avons le pouvoir de fabriquer ainsi nous ôte l'illusion de leur objectivité.

Au problème du morcelage se rattache le problème de l'atome : cas extrême du premier, pour ceux qui regardent le morcellement comme donné, et le meilleur exemple qu'ils croient trouver à l'appui de leur opinion.

Quelles sont les expériences qui nous font affirmer l'atome?

Frappons un cristal : il se clive, il se fend suivant des plans parallèles, et nous obtenons ainsi une foule de cristaux plus petits, dont tous les angles ont la même valeur. On dit parfois qu'en cassant indéfiniment ces parcelles, on arriverait à des cristaux insécables, de vraies maquettes du grand cristal qu'ils reproduiraient en se

juxtaposant. Une telle interprétation est arbitraire. La géométrie cristalline n'étant qu'une géométrie de position, l'insécable obtenu par ce mode de sectionnement n'est pas un corpuscule, mais un angle. L'atome cristallin n'est pas un atome absolu : il est relatif à l'action du marteau ; et s'il a une forme, il n'a pas de grandeur.

Employons maintenant comme moyen de morcelage la chaleur : 12 grammes de charbon étaient unis à 32 grammes d'oxygène ; ils ne sont plus combinés qu'à la moitié, 16 grammes ; mettons dans la cornue toutes les combinaisons possibles où entrent ces 12 grammes de charbon ; les poids d'oxygène qui vont s'y introduire seront toujours multiples de 16 : 16 est donc l'insécable dont ces poids d'oxygène sont formés ; insécable grand ou petit ? cette expérience ne nous l'apprend pas ; l'atome chimique, l'atome des coupures par la chaleur, a une masse relative, mais ni masse absolue, ni forme.

Il peut être commode, dans divers problèmes d'élasticité, de supposer les corps formés de points matériels dont les attractions sont centrales et fonctions de la seule distance ; ces atomes sont relatifs au calcul qui les a créés ; on pourrait les appeler des atomes algébriques ; ils n'ont pas non plus de forme, mais ils ont une masse absolue et des distances absolues.

Bien d'autres points de vue ont fait découvrir bien d'autres atomes : l'électricité coupe les corps en ions ; les lois de la dispersion supposent un atome optique ; et, si le morcelage des corps se faisait au couteau, on arriverait

à l'atome vulgaire, à l'espèce de grain de sable qui est le type sous lequel beaucoup de personnes confondent tous les autres atomes.

Or, si l'on ne fait dire à l'expérience que ce qu'elle peut nous répondre, il est clair que tous ces atomes sont différents : l'atome chimique et l'atome cristallin n'ont pas plus de rapport que n'en ont ces deux atomes d'une bibliothèque, un volume relié et l'œuvre d'un même auteur; ce ne sont pas des atomes réels, ce sont des atomes de méthode.

Cependant, l'on s'imagine le plus souvent que c'est le même atome absolu qui apparaît sous des formes différentes, tantôt chimique, tantôt physique, tantôt cristallin : supposition toute gratuite; l'insécabilité d'un angle et l'insécabilité d'une masse sont deux propriétés en quelque sorte incommensurables; l'une ne peut affirmer ni infirmer l'autre; cet atome absolu est purement représentatif; ce qui porte à l'imaginer, c'est un besoin d'unification; mais on touche ici la contradiction d'un tel symbole, car, après l'avoir créé pour pousser le morcelage à l'extrême, voici qu'on renie son premier postulat par cette recherche de l'unité.

Ce n'est pas la seule contradiction de cette idée réaliste. Si l'atome est un morceau de corps qu'un couteau ne peut plus couper, on ne pourra jamais le rencontrer, faute d'un couteau qui ne soit pas formé d'atomes; si l'on parle de l'atome optique, il ne sera visible dans aucun microscope, car les lois de l'optique qui l'ont fait concevoir supposent

invisible un atome isolé. La première propriété de l'atome réel, c'est d'être irréalisable.

Au contraire, plusieurs faits ne s'expliquent que par la seconde conception. Avec les progrès des méthodes, certains atomes ont été abandonnés ou modifiés. On ne se sert plus guère de l'atome algébrique; il n'entre dans les calculs que par deux propriétés, la forme linéaire des équations des petits mouvements, et le principe de la conservation de l'énergie; on peut poser directement ces deux principes, comme de nouveaux atomes de pensée, et se passer de la structure moléculaire de la matière. En Chimie, les groupements fonctionnels jouent le rôle des atomes, et ce sont pourtant des composés. La notion d'atome se modifie donc avec le progrès des méthodes; et ce progrès révèle déjà une plus puissante possession des choses par l'homme : simplicité de calcul dans l'évolution de l'atome algébrique, prévision des synthèses dans l'évolution de l'atome chimique.

Mais contentons-nous de conclure à l'artificiel de tout morcelage. L'objection que nous venons d'examiner, à la vérité, n'était pas décisive; la vue du fractionnement des choses préparait simplement l'esprit à y reconnaître le déterminisme à la première occasion; voici que ce fractionnement suppose une activité à laquelle le déterminisme lui-même sera désormais soumis.

IV. — *Seconde objection : influences immédiates.*

La seconde objection des déterministes n'est pas, dans leur pensée, plus décisive; elle suggère, plus qu'elle ne prouve : comme tout à l'heure, on peut voir qu'à l'analyse cette suggestion se retourne contre eux.

M. POINCARÉ l'a montré en quelques lignes décisives auxquelles le lecteur ajoutera lui-même de nombreux exemples en feuilletant un traité de Physique. Si nous exprimons que les corps n'agissent pas à distance, c'est pour pouvoir écrire des équations différentielles dont l'élément sera un petit volume; exemples : mesure d'une hauteur par le baromètre, équilibre thermique de l'atmosphère, électrostatique de Maxwell. Si nous exprimons que l'état actuel d'un corps ne dépend pas de la succession de états antérieurs, c'est pour pouvoir écrire des équations différentielles dont l'élément sera un petit temps; exemples : la loi des courants induits de rupture et de fermeture, ou la théorie de l'éthérification de M. Berthelot.

Du reste, cette influence immédiate ne pourrait être comparée à celle de notre esprit, et, par suite, être retournée contre notre liberté, que si elle était immédiate seulement dans le temps ou dans l'espace, c'est-à-dire si l'infiniment petit des équations différentielles était toujours un espace ou un temps, car ce n'est que par rapport à l'espace ou au temps que l'on peut dire notre action immédiate ou lointaine.

1. Relations entre la Physique expérimentale et la Physique mathématique. *Rapports présentés au Congrès International de Physique*, t. I, p. 10-14 (Paris : Gauthier-Villars, 1900).

taine. Or, lorsque nous appliquons les deux principes de la Thermodynamique, nous ne différencions pas seulement par rapport au temps et à l'espace, mais encore par rapport à la pression, à la température, à la masse d'un gaz; dans tous les cas, les équations sont exactement les mêmes : on écrit toujours que $dW - EdU$ et $\frac{dQ}{T}$ sont des différentielles exactes. Ce n'est donc pas l'idée de temps ou de volume qui importe ici, mais l'idée de Calcul différentiel.

L'histoire achèvera la preuve. On a commencé l'étude de l'électricité par la loi de Coulomb : c'était admettre des actions à distance; cette formule conduisait à des calculs compliqués quand le pouvoir inducteur du milieu était variable; on a dû introduire dans l'expression des phénomènes des notions nouvelles, formées peu à peu avec l'idée de force à distance, comme la notion de flux; on en a déduit la formule de Green, et enfin la formule de Laplace-Poisson :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

Mais cette formule, tout en conservant dans le langage l'idée de Coulomb, exprimait par le calcul l'idée d'action de contact; en traduisant cette dernière intuition, Maxwell a posé immédiatement l'équation de Laplace; cette équation n'est sortie de la loi de Coulomb que par d'assez longues transformations de formules; elle en est sortie sous la poussée impérieuse du calcul; c'est donc le Calcul intégral qui est ici primitif, et non pas l'idée métaphysique ou psycholo-

gique d'action de milieu : là où l'on croyait découvrir la trace d'un déterminisme plus étroit, on ne voit que l'ingénieuse activité d'un esprit.

V. — *Troisième objection : quantification de la qualité.*

La qualité, disent ensuite les déterministes, se réduit partout à la quantité.

Partout, non. Tout le monde connaît les critiques définitives adressées à la loi de Fechner par M. Jules Tannery et par M. Bergson. Même en Physique, il y a un retour vers la qualité. L'énergie ne vaut pas par sa quantité seule. L'énergie calorifique est de qualité inférieure à l'énergie mécanique qui lui est quantitativement équivalente.

Cependant la Physique tend généralement à transformer l'inétendu en étendu. Voyons à quelles conditions elle y réussit.

Souvent la quantification d'une qualité n'est qu'apparente. Dans les phénomènes de polarisation chromatique en lumière parallèle, l'intensité ω^2 du rayon ordinaire sortant de l'appareil polariseur est donnée par la formule :

$$\omega^2 = \cos^2 s - \sin 2i \sin 2(i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E}{\lambda}$$

(λ étant la longueur d'ondulation du rayon incident supposé monochromatique, i et s les angles que font avec le plan primitif de polarisation les sections principales de la lame cristalline et de l'analyseur, $O - E$ la différence de marche du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire.) Le premier terme ne contient pas λ , c'est-à-dire ne

dépend pas de la coloration du rayon incident; le second terme en dépend et est appelé terme coloré. Quand la lumière incidente est blanche, chaque rayon composant n'a pas, à la sortie de l'appareil, la même intensité qu'à l'entrée; la lumière émergente se colore. Pour calculer sa teinte, il faudrait avoir donné un sens à l'addition des intensités de deux couleurs différentes; nous verrons tout à l'heure que de telles notions ne sont pas, à proprement parler, additives; ce que nous pouvons dès maintenant affirmer, c'est que si : $\sin 2i = 0$, ou si : $\sin 2(i-s) = 0$, les termes colorés sont nuls pour tous les rayons monochromatiques, donc le champ du microscope est blanc. Voilà ce que l'Analyse nous apprend, et rien de plus. Le calcul des colorations n'est valable que si le phénomène est incolore.

Cependant, lorsqu'on reproduit une couleur quelconque par le mélange de trois couleurs fondamentales, prises en de certaines proportions, il semble bien qu'on ait ramené la qualité à des nombres, les trois coefficients des teintes primitives. Examinons cette expérience de plus près. La moitié du champ d'une lunette est éclairée par la couleur que je veux mesurer. A côté un prisme étale horizontalement un spectre. Devant les trois couleurs de ce spectre que j'ai choisies comme étalons, j'ai placé trois fentes verticales de même largeur, un millimètre par exemple; un jeu de miroirs superpose ces trois couleurs dans la seconde moitié du champ de la lunette. En faisant varier les largeurs des trois fentes, je modifie la couleur ainsi produite, jusqu'à ce

qu'elle soit pareille à la couleur donnée. Ces largeurs sont alors trois nombres qui définissent cette couleur. Nous remarquons que si je change de prisme, le spectre nouveau est étalé d'une autre manière que le premier; le rouge peut y être plus large, le bleu plus étroit; la quantité de rouge (si l'on peut parler de quantité) qui traverse une fente d'un millimètre n'est pas la même dans les deux spectres, si l'on veut que les trois coefficients qui définissent une couleur varient avec la nature du prisme. Je n'ai pu introduire des nombres sans choisir un prisme particulier, c'est-à-dire sans introduire une qualité immesurable; ma quantification apparente n'est qu'une transposition de qualité.

La mesure des températures est analogue. La température est d'abord une sensation. On a ensuite construit des thermomètres, par exemple en enfermant du mercure dans une ampoule de verre et en gravant sur la tige une graduation quelconque. En parlant de 50° et de 100° , a-t-on vraiment institué une mesure de la sensation? Pas du tout. Comparé avec un autre thermomètre, les mêmes sensations seraient représentées par les nombres 53 et 270. Le premier thermomètre est arbitraire, et triplement arbitraire : 1 $^{\circ}$ par le choix d'un phénomène physique : on a pris la dilatation d'un liquide, on aurait pu prendre la variation de pression d'un gaz, la variation d'une tension de dissociation, la variation d'une résistance électrique ou de la force électromotrice d'une pile ; 2 $^{\circ}$ par le choix d'une substance chimique : alcool, hydrogène, carbonate de calcium, fil de cuivre, substance dure antimoine-bismuth ; 3 $^{\circ}$ par le choix de l'échelle :

lieu de déclarer la température fonction linéaire du volume, on aurait pu prendre une fonction exponentielle ou trigonométrique. Ici encore, si l'on a l'air d'éliminer la qualité, c'est en introduisant une triple qualité, si bien que les températures ne peuvent pas s'ajouter ; ce ne sont pas des grandeurs, ce sont des numéros d'ordre ; elles ne mesurent pas des sensations, elles y correspondent, comme des notes d'examen correspondent à l'intelligence d'un élève. On a cependant tenté ici une quantification plus complète. Une machine de Carnot a pour chaudière une cuvette de mercure bouillant, pour réfrigérant un bassin de glace fondante : d'après le postulat de Carnot, le rendement de cette machine ne dépend que de la chaudière et du condenseur, et non de la substance chimique qui meut le piston (vapeur d'eau, air chaud, acide sulfureux liquide) ; ce rendement peut définir la température de la chaudière et du condenseur, ou plutôt leur rapport : le rapport de deux températures se mesure alors par celui de deux travaux : donc, si l'on prend une machine de Carnot pour thermomètre, la température est une grandeur additive, et elle n'est plus relative au choix d'une substance chimique. Seulement, nous n'avons réalisé ce progrès vers la quantité qu'en admettant le principe de Carnot, qui est un véritable postulat définissant un point de vue particulier.

Enfin, lorsque la quantification n'est pas du pur artificiel (et c'est le cas des vibrations acoustiques et optiques), sa découverte n'a pas simplifié le problème, au contraire ; elle a montré que là où le sens commun ne voyait que de la

qualité, là où quelques-uns n'ont plus vu que de la quantité, il y a l'une et l'autre : mais, en posant le problème de leur lien, elle a indiqué une méthode pour le résoudre ; c'est l'étude, dans la perception, de l'apport de la mémoire : c'est l'étude de M. Bergson¹.

Dans tous les cas, on se tromperait en regardant la quantité comme primitive ; elle n'est pas le canevas qui retrouverait intact en effilant la broderie colorée qui la couvre ; la laine colorée a été donnée d'abord, et le canevas n'est qu'une apparence que l'homme a faite en la tissant.

Ce qui se dégage de ces exemples, c'est l'effort de l'homme pour quantifier ; cet effort est la trace d'un acte d'action ; il reste à le faire voir.

Un peintre a rencontré par hasard une couleur qui ne lui plaît ; il essaie de la reproduire ; il tâtonne ; il aurait réussi plus vite avec une recette numérique. On a reconnu un jour que l'eau, bouillant dans une marmite, soulevait tellement le couvercle, et on a transformé la marmite en machine : construction de sentiment : la machine aurait été plus économique et plus puissante si on avait connu numériquement les lois de la vapeur. On n'agit donc pleinement sur les choses qu'en les connaissant quantitativement. Or ces trois sensations, odeur, couleur, chaleur, toutes très aussi communes, ne sont pas toutes aussi utiles : les odeurs sont pour nous de simples jouissances, les couleurs servent aux décorateurs, aux tapissiers, aux photographes, la chaleur enfin fournit, de la manière la plus commode, le t

1. *Matière et mémoire* (Paris, Alcan, 1896), p. 223-233.

vail des grandes usines. Il est remarquable qu'on n'a jamais tenté une théorie numérique des odeurs et qu'on a poussé très loin la mathématique de la couleur et de la température. L'effort vers le nombre a accompagné l'effort vers l'action.

L'action industrielle n'est pas la seule. Combiner des équations pour prévoir et, en même temps, pour interpréter diverses expériences, c'est là une action rationnelle, quelquefois une action esthétique : la science est pleine d'actions de cette sorte, et la quantification en est la condition indispensable. On n'aurait jamais écrit l'équation de Clapeyron sans un thermomètre; on ne l'aurait jamais écrite aussi simplement sans le thermomètre de Carnot.

C'est donc bien plus pour agir que pour savoir que l'on a introduit l'étendue dans la science; il est même des cas où l'on a implicitement recherché l'ignorance : c'est, par exemple, la théorie de la capillarité de Laplace, ou la théorie de la chaleur de Fourier : dans la théorie de Laplace, on suppose que la force moléculaire n'est sensible qu'à une petite distance, mais on ne précise pas la formule de cette force; tout ce que peut avoir de qualitatif l'influence des particules matérielles de positions et de grandeurs diverses, on l'élimine en une moyenne; on se moque des vrais détails; on veut un calcul facile.

VI. — *Quatrième objection : les lois quantitatives.*

L'objectivité des lois, et des lois numériques, est l'argument central des déterministes. Cette objectivité, au moins

en ce qui touche la forme mathématique, doit être singulièrement restreinte.

L'établissement d'une loi physique comprend trois phases :

1° Avant l'expérience, le physicien désire une loi numérique ;

2° L'expérience répond à ce désir dans une certaine mesure ;

3° La loi, que l'expérience a montrée à peu près exacte et assez générale, est posée par décret rigoureuse et universelle et devient alors une définition.

Nous allons citer quelques faits à l'appui.

1° *Avant l'expérience, le physicien désire une loi numérique.*

Entre quelques grandeurs grossièrement mesurées, il y a une tendance à hâter d'établir un rapport simple. C'est l'origine de la loi de Prout, de la loi de Bode, de la gamme des couleurs de Newton, des harmonies des planètes de Kepler. Les critiques que nous faisons à l'artificialité de tels essais, ne devrions-nous pas les étendre un peu à certaines lois que nous acceptons encore, par exemple, la loi de Dulong et Petit ; les produits pc du poids atomique par la chaleur spécifique des corps simples ne varient que de 5 à 6 ; pourquoi les déclarer constants, quand nous tenons compte de leurs variations, beaucoup plus faibles, de l'intensité de la pesanteur¹ ?

1. Cf. *La méthode des Sciences physiques*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, p. 291-295 (mai 1900).

Un exemple détaillé fera mieux pénétrer le dynamisme de ces artifices. Lecoq de Boisbaudran a remarqué entre les spectres des métaux analogues des rapports intéressants. Nous donnons dans un tableau les spectres du calcium et du strontium.

Calcium.	Longueur d'onde en millièmes de millimètre.	Strontium.
Milieu de deux raies rouges rapprochées :	$633,2 \times 1,063 = 673,0$	Milieu d'une bande rouge nébuleuse
différence : 14,1		différence : 14,4
Milieu d'une raie orangée :	$619,1 \times 1,063 = 659,6$	Milieu d'une bande rouge nébuleuse
différence : 13,0		différence : 13,3
Milieu d'une raie orangée :	$606,1 \times 1,066 = 646,3$	Milieu d'une bande rouge nébuleuse
différence : 12,6		différence : 11,3
Milieu d'une raie nébuleuse jaune :	$593,5 \times 1,070 = 635,0$	Milieu d'une raie rouge orangée
différence : 11,6		différence : 11,9
Milieu d'une raie jaune verdâtre :	$581,9 \times 1,071 = 623,1$	Milieu d'une raie orangée

Nous y voyons qu'en prenant dans le spectre du calcium des raies dont les longueurs d'onde décroissent régulièrement (de 633,2 à 581,9) et situées à des intervalles à peu près constants (14,1 à 11,6) et en multipliant leurs longueurs d'onde par un coefficient variant régulièrement et très peu (1,063 à 1,071) nous obtenons les longueurs d'onde de raies du strontium ayant à peu près le même écartement (14,4 à 11,9) que celles du calcium. Mais, ce que nous avons appelé raie, c'est le plus souvent le milieu d'une bande nébuleuse, c'est-à-dire un point difficile à viser, pour ne pas dire impossible à définir, si bien que nous avons pu le prendre tel que notre remarque soit vérifiée; plu-

sieurs précautions ont encore été nécessaires : par exemple, ajouter au sel beaucoup d'acide chlorhydrique, ou, si l'on opère sans acide, employer comme source de chaleur l'étincelle d'induction éclatant à la surface de la solution saline ; et la loi qu'on obtient alors n'est pas tout à fait la même... Et je ne décris pas tous les trucs.

Mêmes remarques pour certaines grandes lois. Pour établir la formule des répulsions électrostatiques, Coulomb n'a fait que trois mesures, exactes au $\frac{1}{20}$ (l'intensité de la pesanteur est mesurée au $\frac{1}{200.000}$), et c'est en supposant rigoureusement exacte la loi de l'inverse carré que Laplace, Green et Poisson ont établi toutes leurs analyses. La loi de Coulomb, à cette époque, était plus un désir de loi qu'une loi.

L'artificiel apparaît encore mieux quand on opère dans certains cas d'indétermination. La pression maximum de la vapeur d'eau est liée à sa température ; on peut représenter cette relation par une courbe qui aurait les températures pour abscisses et les pressions pour ordonnées. Au-dessus du point critique, 365° ou 200 atmosphères, MM. Cailletet et Collardeau ont constaté qu'il n'y a pas une courbe unique, mais une aigrette de courbes ; la pression ne dépend pas seulement de la température, mais encore du volume du tube qui renferme l'unité de masse. Si ce volume n'avait pas été fixe dans une série de mesures, on aurait pu, au-dessus du point critique, trouver n'importe quelle loi.

L'accident ne s'est pas produit. Il s'est produit dans

l'étude des hydrates de gaz. Les travaux de M. Villard ont récemment établi que la plupart des molécules de gaz cristallisent avec 6 molécules d'eau. Mais, si le gaz n'est pas très sec, on analyse des composés hydratés à 6,8, à 7,3, à 8,6 molécules d'eau; or plusieurs observateurs, qui ne savaient pas dessécher, ont trouvé des nombres entiers, 7, 8, 9. Pourquoi ont-ils choisi, dans les données confuses de leurs pesées, précisément ces nombres, ou pourquoi ont-ils poussé le desséchement juste au point nécessaire pour voir sortir des choses ce qu'ils étaient secrètement décidés à y mettre?

Enfin pourquoi, lorsque nous mesurons une grandeur par trois méthodes, et que nous obtenons des nombres un peu différents, prenons-nous instinctivement la moyenne comme valeur définitive? Il y a quelques années à peine, ce qu'on appelait densité de l'azote, c'était la moyenne entre les densités de l'azote extrait de l'air et les densités de l'azote extrait de composés chimiques : nous savons aujourd'hui que le premier azote était mêlé d'argon, et que les deux sortes de mesures correspondent à deux grandeurs très différentes.

Bien plus, certaines lois échappent à toute vérification rigoureuse. L'éclairement d'un écran diminue comme l'inverse carré de la distance de la lumière. On le montre avec un photomètre : mais c'est l'œil qui y juge les éclaircissements, et la sensibilité de l'œil ne dépasse pas $\frac{1}{100}$; c'est à cette approximation qu'on vérifie la loi. Proposera-t-on une

autre méthode? Dira-t-on qu'en assimilant la lumière à un mouvement vibratoire dont l'énergie se conserve, on prouve la loi des distances avec une rigueur mathématique? Mais cette assimilation résulte d'une expérience : deux sources lumineuses interférentes produisent des franges sur un écran : l'éclat des franges brillantes est quadruple de l'éclat de l'écran éclairé par une seule source; mais l'amplitude de la vibration y est double; l'éclairement, proportionnel au carré de l'amplitude, varie donc comme sa force vive. Mais cette expérience est une mesure photométrique; elle n'est exacte qu'au $\frac{1}{100}$: et la méthode mathématique, malgré son apparente précision, ne vérifie pas mieux que l'expérience directe la loi de l'inverse carré.

Pour d'autres raisons, la loi de Maxwell : $k=n^2$, n'est pas plus objective; n , l'indice de réfraction, n'est pas une constante d'un corps; il y a, pour chaque corps, une infinité de n qui varient avec la longueur d'onde de la lumière qui le traverse; dire que k , le pouvoir inducteur électrique, est égal au carré de n , revient à choisir une lumière qui satisfasse à cette relation : la loi de Maxwell n'est pas un rapport des choses, c'est le choix d'un nombre.

De même, en Chimie, les lois de Gay-Lussac. L'hydrogène et l'oxygène se combinent-ils exactement dans le rapport de 2 volumes à 1 volume? Généralement, à chaque température, il existe une pression telle que le rapport soit rigoureux; et, comme on peut opérer à toute température, il existe une infinité d'états, caractérisés par une tempéra-

ture et une pression correspondantes, pour lesquels la loi est exacte; les lois de Gay-Lussac, sous leur forme mathématique, ne sont pas la solution d'un problème, mais ses conditions.

Enfin une loi élémentaire, comme la loi des courants électriques d'Ampère, est invérifiable, parce qu'un élément de courant n'a pas de réalité physique.

Ces quelques exemples ont mis en lumière un besoin hâtif d'imposer des lois à la nature, même si la nature ne les acceptait pas : réseau provisoire comme ces polygones que les enfants dessinent, avant de copier une ronde-bosse.

Des lois précises sont d'ailleurs la condition de la Physique mathématique. Nous posons : $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, n étant une constante; mais l'expérience nous apprend simplement que n ne varie pas d'un millième; ce qui est objectif, c'est la double inégalité :

$$n\left(1 - \frac{1}{1000}\right) < \frac{\sin i}{\sin r} < n\left(1 + \frac{1}{1000}\right)$$

Or aucune expérience, en Physique, n'est isolée; quand je vise une étoile, la position indiquée par le théodolite doit être corrigée de la réfraction atmosphérique, du mouvement de la terre, de la vitesse de la lumière, etc.; d'où des calculs où doivent entrer la grandeur de l'orbite terrestre, la vitesse de la lumière, la loi du sinus, etc.; si elles entrent sous forme d'égalités, les corrections sont relativement simples; si elles entrent sous forme de doubles inégalités, les calculs seront inextricables, et peut-être, au bout

d'un certain nombre d'opérations, arrivera-t-on à des inégalités contradictoires.

2° *L'expérience répond, dans une certaine mesure, au désir du physicien.* — J'ai montré, dans un autre mémoire¹, comment les lois, en se généralisant, s'affranchissaient de plus en plus de l'arbitraire qui les avait créées; j'ai donné comme exemples l'attraction universelle et la conservation de l'énergie. On pourrait en ajouter plusieurs autres, par exemple la loi de réfraction : Maurolycus, au xvi^e siècle, pose $r = mi$; et, dans le cas des petits angles, et à l'approximation des expériences, cette loi n'est pas plus conventionnelle que la loi : $\sin i = n \sin r$; Kepler essaie d'étendre à des angles plus grands la formule de Maurolycus, et il est conduit à la remplacer par :

$$r = mi + p \sec i$$

qui est encore aussi vraie que la loi du sinus; enfin Descartes, en étudiant les grandes incidences des rayons de l'arc-en-ciel, trouve que la loi du sinus est la seule acceptable; et c'est cette généralité qui lui confère une plus grande objectivité.

Le lien entre la généralité et l'objectivité des lois soulève un problème de Métaphysique que nous avons systématiquement écarté de cette étude.

3° *La loi numérique, que l'expérience a montrée à peu près exacte et assez générale, est posée par décret rigoureuse et universelle, et devient alors une définition.* —

1. *La méthode des Sciences physiques*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, p. 295-299 (mai 1900).

Tantôt elle sert à former une notion nouvelle. Des brins de paille se soulèvent au-dessous d'un morceau d'ambre; nous n'en concluons pas que les lois de la chute des corps sont en défaut, mais que les brins de paille sont soumis à la fois à la pesanteur et à un nouvel agent dont les propriétés expliquent précisément cette dérogation.

Tantôt elle nous fait choisir une nouvelle unité pour une grandeur déjà en usage. La conservation de l'énergie ne s'appliquerait pas au frottement des marées sur la terre si l'unité de temps était donnée par les battements d'un pendule; on modifie l'unité de temps de manière à respecter la conservation de l'énergie.

Tantôt elle modifie la formule d'une loi connue. Les expériences de Regnault sur la compressibilité des gaz renversent ou la loi de Mariotte (si l'on conserve la notion ancienne de pression dans le mercure manométrique) ou le principe de Pascal (si on veut conserver la formule simple de Mariotte et modifier la définition de la pression); il y a conflit entre la loi et le principe; c'est le principe que nous déclarons immuable et la loi que nous abrogeons.

Est-il nécessaire d'ajouter que cette analyse, que nous avons voulu rendre claire, est beaucoup trop simpliste, et que l'hésitation du physicien ne prend jamais la forme d'un dilemme?

Du reste, dans la plupart des cas, nous ne balançons pas un instant pour reconnaître la loi intangible : certaines lois nous tiennent tant à l'esprit que nous ne les discutons jamais. Lorsque M. Schutzenberger a trouvé que le poids

du composé n'est pas égal à la somme des poids des composants, il n'a pas cru avoir infirmé la loi de Lavoisier, il a cru que les poids atomiques n'étaient pas constants. Mais on voit cette hésitation dans le conflit de deux lois peu importantes. Pour connaître la température critique de l'hydrogène, température qui est très basse, on peut appliquer la loi des états correspondants, ou faire une mesure directe avec un thermomètre à résistance électrique : la loi des états correspondants est, dans le premier cas, la définition de la température ; dans le second cas, c'est la variation linéaire de la résistance. Les deux températures ne sont pas les mêmes ; avec la première définition, la résistance d'un fil métallique ne varie pas linéairement avec la température : avec la seconde, la loi des états correspondants est inexacte. Laquelle des deux lois nous intéresse le plus ? Aucune, pour le moment. Aussi n'a-t-on pas encore fait de choix unanime : on prend pour température critique de l'hydrogène un nombre rond qui satisfait en gros aux deux définitions.

Je n'insiste pas sur cet emploi des lois comme définitions. M. LE ROY l'a élucidé assez clairement¹.

J'ajouterai seulement une remarque trop souvent méconnue. Lorsqu'on corrige une formule, comme celle de Mariotte, ce n'est pas pour atteindre, par approximations successives, la loi véritable ; cette loi n'existe pas. Nous venons d'en donner les raisons. L'histoire les confirme. Il

1. *Les sciences positives et les philosophies de la liberté*, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. I.

y a deux espèces de corrections : celles qui n'offrent aucun intérêt en dehors de la décimale qu'elles ajoutent : telles sont la plupart des corrections de Regnault; et celles qui bouleversent toute la science : par exemple si l'intensité de la pesanteur n'était connue qu'au $\frac{1}{100}$, on la regarderait comme constante sur toute la surface du globe : il n'y aurait pas de force centrifuge; et, si l'on n'avait pas d'autre preuve de la rotation de la terre, on la déclarerait immobile : il suffit de connaître g au $\frac{1}{1000}$ pour changer cette conception. De même une erreur de 1 seconde sur le temps que met la lumière pour aller de la lune à la terre faisait croire à Descartes que le monde était plein, et une frange fine dans une ombre géométrique nous a révélé l'éther. Eh bien, tant qu'une correction n'a pas abouti à un changement de point de vue, la science n'en a pas tenu compte : Kepler avait beau savoir que la bonne loi de réfraction était : $r = mi + p \sec i$, il employait dans ses lunettes la vieille forme : $r = mi$. Avant la découverte de l'argon, on ne faisait pas attention aux différences de densité des azotes, et, en Chimie physique, on conserve pour la loi de compressibilité des gaz la formule même de Mariotte. On ne respecte donc pas l'exactitude à titre de connaissance plus parfaite, mais seulement comme source d'activité nouvelle.

Les lois, en un mot, n'existent pas telles quelles dans les choses. On ne les découvre pas comme on découvrirait les règles du tric-trac en le regardant jouer. Elles sont

comme le lit d'un fleuve dans une plage de sable, enchevêtrement de canaux mouvants à chaque marée; nous le supposons fixe dans le tracé de nos cartes, et il y a bien en lui une stabilité réelle : direction générale, volume de l'eau, vitesse du courant; mais tout cela serait inexprimable par le dessin si notre industrie ne le fixait définitivement en y creusant un canal et en l'endiguant.

VII. — *Cinquième objection : anthropomorphisme des notions physiques.*

La force mécanique se définit par la masse, et l'énergie physique se conserve; donc notre force est matérielle et notre énergie déterminée. Voilà un argument qu'on peut réfuter d'un mot en montrant le calembour qui le fonde. Mais nous allons approfondir l'origine de ce calembour, et montrer que l'argument ne porte en réalité que contre le déterminisme.

Comme l'a fait voir M. POINCARÉ¹, les notions mécaniques, force ou énergie, sont construites *a priori*, quoique cette construction soit suggérée par l'expérience. En ne considérant que le cas d'un seul point matériel, nous pouvons appeler *force* le produit de sa masse par son accélération, *énergie* le produit de sa masse par le carré de sa vitesse, sa masse étant un coefficient constant proportionnel à son poids. Mais l'expérience nous apprend que la force et l'énergie ainsi définies ont un sens physique; c'est cette

1. Sur les principes de la Mécanique (dans ce volume).

partie obscure de la constitution des êtres mécaniques que M. Poincaré a volontairement laissée dans l'ombre et qui est le nœud de la discussion présente.

Eh bien, si, en chaque point de la trajectoire d'un corps, nous mesurons l'allongement d'un fil tendu qui serait nécessaire pour le soutenir, nous constatons que cet allongement est proportionnel à l'accélération; comme l'allongement représente, en gros, un effort musculaire qui remplacerait la tension du fil, nous pouvons dire qu'il y a un lien de correspondance, une sorte de proportionnalité entre la force définie par l'accélération et l'effort perçu dans notre bras : c'est sous cette forme que la force mécanique est indiquée par l'expérience. Mais la force mécanique a un autre caractère que notre définition *a priori* n'implique pas et qui n'est pas non plus emprunté à l'expérience. Nous voulons que la force représente l'action d'un corps sur un autre¹, que le corps agissant soit considéré comme une personne, que son effet soit indépendant de l'effet des corps voisins; ce sera la seule manière pour nous d'intervenir, soit en pensée, soit réellement, dans le jeu des attractions, par l'intermédiaire de ces agents dont nous tiendrons les fils; ce sera la seule manière de soumettre la force mécanique au caprice de notre force psychique. Pour cela nous modifions la définition première en y joignant le principe de l'indépendance des effets des forces, principe qui semblait absurde à Descartes, principe que l'observation

1. Remarque de M. HADAMARD dans une discussion du Congrès de Philosophie, *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, p. 559 (sept. 1900).

infirmes, au moins dans le cas des forces magnétiques, mais le principe de morcelage essentiel; et nous obtenons ainsi une définition complète qui réunit trois éléments : quelque chose *a priori*, une certaine suggestion de l'expérience, une soumission des choses à notre volonté. Tandis que la deuxième marque une ressemblance entre la force mécanique et la nôtre, le troisième montre une antithèse : il fallait cette ressemblance pour établir le point de contact, il fallait cette antithèse pour établir la hiérarchie que cette action exige; si les forces mécaniques sont soumises au déterminisme, ce déterminisme est soumis lui-même à notre spontanéité.

On pourrait en dire autant de la notion d'énergie mécanique. La définir comme le produit de la masse par le carré de la vitesse, c'est la constituer *a priori*. Mais l'expérience a en partie suggéré cette définition : lorsqu'un corps dur comme une bille de métal, tombe dans un corps mou comme le beurre, il s'enfonce à une profondeur à peu près proportionnelle au carré de sa vitesse; or cette profondeur peut mesurer notre énergie quand notre doigt pèse sur le beurre. Lorsqu'un corps tombe, la quantité de travail s'accroît mv^2 mesure la diminution du travail qu'il aurait pu produire, en élevant un poids par le moyen d'un fil jevissant sur une poulie; ainsi notre énergie musculaire, lorsqu'elle nous montons un poids au haut d'un escalier, s'épuise en se communiquant à lui. Mais le produit mv^2 n'est comparable à notre énergie qu'à la condition de ne la regarder que sous un de ses multiples aspects; en la considéra-

autrement, nous arriverions à la trouver analogue à une tout autre fonction, par exemple au produit mv . En effet, si notre énergie peut être mesurée par la profondeur du trou qu'elle creuse dans une substance molle, elle peut être également mesurée par l'impulsion qu'elle communique à un mobile qu'elle lance; c'est précisément mv qui représente cette impulsion. Dans le choc des corps, mv se conserve en projection, comme mv^2 se conserve dans l'espace. Ainsi, à ne consulter que l'expérience, mv et mv^2 peuvent aussi bien représenter l'énergie. Mais ici intervient l'usage que nous pouvons faire de l'une et de l'autre notion. L'énergie mv ne se conserve qu'en projection, et, pour l'écrire analytiquement, il faut introduire trois axes de coordonnées; quand les forces ont un potentiel, on n'a d'intégrale première qu'en prenant le moment de cette quantité, ce qui oblige à connaître sa direction, c'est-à-dire à faire, dans le cas des mouvements moléculaires, des hypothèses accessoires : au contraire, l'énergie constante mv^2 n'est pas dirigée, et, dans le cas des forces à potentiel, elle fournit immédiatement une intégrale première; plus besoin de compliquer le problème par trois axes arbitraires, ni de connaître, dans les mouvements moléculaires, la direction des vibrations. C'est mv^2 que nous prendrons pour définir l'énergie, parce que notre énergie intellectuelle la maniera plus puissamment dans des calculs plus faciles. Ainsi, l'énergie humaine entre dans la définition de l'énergie mécanique de deux manières : par la suggestion de l'expérience qui nous fait construire la notion mécanique à

l'image de l'intuition psychique, et par l'action qu'elle exerce sur cette énergie au moyen de calculs simples. La première manière a fait croire au déterministe inattentif que c'était notre énergie qui avait eu mv^2 pour modèle. La seconde nous montre au contraire qu'elle a créé et qu'elle domine l'énergie mécanique et, avec elle, tout le déterminisme auquel elle semble assujettie.

VIII. — *Sixième objection : simplicité des lois.*

Je reprends les deux parties de la sixième objection :

1° Si un phénomène est exprimé par une loi simple, comme une loi simple est primitive, nous avons isolé par là les vrais éléments du fait : donc déterminisme indéniable.

2° Si une loi compliquée se réduit à un système de lois simples, nous pouvons penser que les phénomènes que nous attribuons encore à la liberté de quelque *angelus rectus* sont des phénomènes trop complexes pour qu'on ait pu les dissocier en leurs lois élémentaires : donc déterminisme universel.

Et d'abord, pourquoi ce postulat : une loi simple est primitive? Peut-être parce qu'on nous a appris que Dieu est simple. Et pourquoi cette erreur de la simplicité de la nature? Sans doute parce que nous ne sommes jamais entrés dans un laboratoire et que nous n'avons jamais ouvert ces mémoires d'Astronomie où une formule tient un volume.

Deux remarques achèveront de répondre à chacune de ces objections.

1° Si les lois de la Physique sont simples, c'est le plus souvent que nous ne connaissons pas les phénomènes avec assez de précision. C'est le cas des lois exponentielles qu'on s'émerveille de rencontrer si fréquemment dans la nature. Si l'on veut mesurer la hauteur d'une montagne à l'aide du baromètre, on écrit qu'à la hauteur z où la pression est H , la diminution dH de pression, pour une augmentation de hauteur dz , est proportionnelle au poids d'une colonne d'air comprise entre les plans horizontaux z et $z + dz$; or le poids de l'air est proportionnel à H : donc :

$$dH = -aH dz$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dH}{H} = -adz$$

ou, en intégrant :

$$\log H - \log H_0 = -az$$

ou, en passant des logarithmes aux nombres :

$$H = H_0 e^{-az}$$

De même, dans l'induction électrique, l'intensité I d'un extra-courant de rupture est donnée, en fonction du temps, par l'équation différentielle :

$$RI = -L \frac{dI}{dt}$$

(R résistance, L induction propre du circuit); d'où, en intégrant de la même façon :

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

De même, la vitesse de refroidissement d'un corps rayonne, $-\frac{d\theta}{dt}$, est proportionnelle à l'excès θ de sa température sur celle du milieu ambiant; ce qu'on écrit :

$$\frac{d\theta}{dt} = -K\theta$$

ou :

$$\theta = \theta_0 e^{-Kt}$$

Mais les équations différentielles n'expriment la proportionnalité de la dérivée à la fonction que parce que nous ignorons ou voulons ignorer une relation plus exacte. La formule de refroidissement est en réalité :

$$-\frac{d\theta}{dt} = K\theta + K'\theta^2 + K''\theta^3 + \dots$$

et ce n'est que lorsque θ est petit que nous pouvons négliger, dans le second membre, les termes qui suivent le premier. Dans les phénomènes d'induction, L varie avec θ . Dans la mesure d'une hauteur de montagne, le poids d'un litre d'air n'est pas proportionnel à H , mais dépend de beaucoup d'autres conditions qui ont conduit Laplace à remplacer la formule exponentielle précédente par la formule plus compliquée que donne l'Annuaire du Bureau des Longitudes. Un phénomène a donc une formule simple que nous le connaissons mal, et non pas, comme on disait autrefois à l'heure, quand nous le connaissons à fond : la simplicité d'une loi est la marque de l'artificiel.

2° A propos de la seconde objection, nous ferons seulement remarquer qu'on n'a pas simplifié une loi compliquée.

quand on l'a réduite à une infinité de lois simples : c'est le cas des phénomènes exprimables par une série de Fourier; chaque terme est simple, c'est vrai; leur infinité ne l'est pas.

En approfondissant l'idée de simplicité, nous arriverons au contraire à y trouver la spontanéité de l'esprit.

D'abord il n'y a pas de simplicité absolue; toute simplicité est relative à notre usage; quelle est la formule la plus simple : $a + bx + cx^2 + dx^3$ ou $\sin x$? Algébriquement, c'est la première; mais nous calculons plus vite la seconde, parce que nous possédons des tables de sinus. Pour la même raison, la série de Fourier est simple, bien qu'à première vue elle semble compliquée. Dans le problème de l'armille, Fourier a introduit la fonction Θ de Jacobi¹, dont on se trouvait avoir des tables; la fonction Θ de Jacobi était simple pour Fourier. Les séries que Cauchy a introduites dans l'étude de la diffraction sont des séries qui commencent par converger, et qui divergent à partir d'un certain terme; à une époque où les travaux de M. Borel et de M. Le Roy n'avaient pas encore donné un sens aux séries divergentes, la série de Cauchy était la plus compliquée qu'on pût écrire; cependant la rapide convergence des premiers termes la rendait commode pour le calcul : on s'en est servi.

Lorsque, dans l'interprétation d'une expérience, on peut donner à la formule d'une loi une expression simple ou

1. Cette fonction est, à un changement de variable près, la même que $\mathfrak{F}$, dans les notations d'Halphen (HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, p. 232).

compliquée, on prend l'expression simple si la loi est usuelle. Dans les expériences de Regnault que nous citons tout à l'heure, on ne conserve pas l'équation de la loi de Mariotte $VH = C^e$, parce que le principe de Pascal est plus utile : au contraire, dans la théorie des gaz, où la loi de Mariotte est appliquée dans chaque problème, on reprend la formule ancienne.

Généralement, quand un même fait peut être traduit par une loi élémentaire et par une loi finie, c'est la loi élémentaire qu'on prend simple, parce que c'est elle qui entre dans les calculs de la manière la plus souple. Nous verrons à l'heure que nous définissons l'intensité d'un courant électrique de manière à vérifier la loi simple de Laplace, qui exprime l'action d'un pôle magnétique sur un élément de courant, bien qu'un élément de courant isolé n'ait aucune réalité.

Enfin, on rend souvent une loi simple, non pas en dépens d'une autre loi que l'on compliquerait, mais en changeant la définition d'une grandeur : la complication porte alors uniquement sur le choix de l'unité : elle est faite, une fois pour toutes, à l'origine des calculs, et elle gêne plus notre activité intellectuelle¹. On peut en donner une foule d'exemples : ainsi on tend à définir la température par le théorème de Carnot, qui prend alors la forme simple :

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

1. Bien entendu, ce changement ne consiste pas à multiplier l'unité par un nombre, ce qui ne changerait aucune loi.

Mais le fait est surtout frappant en Electricité. L'ordre didactique le plus généralement suivi est celui-ci : On mesure d'abord une force électromotrice par le nombre d'éléments de pile d'un certain modèle qui, associés en tension, suffisent à l'équilibrer. On mesure ensuite l'intensité d'un courant par la déviation d'un galvanomètre gradué ; on aura gradué ce galvanomètre en faisant passer deux courants identiques dans deux fils semblables et voisins, et en convenant que l'effet sur l'aiguille est double de ce qu'il serait si un seul des courants passait. Puis on a trouvé que, dans un même fil, la force électromotrice aux deux bouts est à peu près proportionnelle à l'intensité : on a appelé le quotient *résistance* du fil : c'est la loi d'Ohm. On a ensuite grossièrement établi la loi de Laplace : l'action d'un élément de courant sur un pôle magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant, à la longueur de l'élément, à l'inverse carré de la distance et au sinus de l'angle de cette distance et du courant. On peut se demander si, avec des mesures plus précises, la loi d'Ohm et la loi de Laplace ne risquent pas d'être modifiées. Non, car, dans la pratique des mesures, on ne définit pas comme nous l'avons dit les grandeurs électriques. On commence par se donner une unité de résistance, colonne de mercure de dimensions déterminées, dans des conditions de température faciles à reproduire, étalon maniable comme il en faut au début de toute branche de la Physique, pour permettre des mesures stables et précises. Cet étalon une fois fixé, on décrète la loi de Laplace ; du moins on y décrète la propor-

tionnalité de l'action du courant à son intensité; la loi Laplace sert alors à définir l'unité d'un courant traversant une boussole des tangentes ou un électrodynamomètre. (On décrète de même la loi d'Ohm; elle définit l'unité des forces électromotrices, qu'on mesure par la méthode de comparaison de Poggendorff. Les formules des deux lois sont donc immuablement simples, et les expériences de mesure ne seront pas compliquées par ce nouveau choix d'unités. La simplicité n'est donc partout qu'un artifice d'algebraiste.

IX. — *Septième objection : unité de la science.*

Nous voici arrivés au dernier argument, l'unité de la Physique, qu'on n'ose encore appeler l'unité des sciences.

Très souvent cette unité est toute artificielle. Les solénoïdes et les aimants ont des propriétés analogues : une particule magnétique ne serait-elle pas le support d'un courant circulaire? Mais ce courant rencontrerait peut-être une résistance qui échaufferait l'aimant, et on ne remarque pas que les aimants soient des corps chauds? Non, car on peut placer ce courant à l'intérieur de la molécule et, comme cette molécule est un être fictif, la supposer sans résistance. On n'a pas trouvé par là l'unité véritable qui confondrait le magnétisme et l'électricité, mais une unité didactique qui, faute d'une expérience impossible, ne pouvait pas ne pas réussir.

Lorsqu'on assimile les solides dissous aux gaz parfaits, en leur étendant les deux lois de Mariotte et de Gay-Lussac

c'est en remplaçant la notion de pression des gaz par la notion de pression osmotique; la nature n'imposait pas l'identité de ces deux pressions; on n'a donc trouvé qu'un lien artificiel entre les gaz et les dissolutions.

Il y a aussi des unités purement verbales. La loi d'Ohm peut s'appliquer aux courants alternatifs à la condition de remplacer la force électromotrice E par la force électromotrice imaginaire : $E_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$, l'intensité I par l'intensité imaginaire $I_0 e^{i(\omega t + \beta)}$, la résistance R par la résistance imaginaire : $r + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ (r résistance du circuit à un courant continu, L son induction propre, C sa capacité). On a alors la formule :

$$E = RI$$

et les deux équations réelles qu'elle condense représentent les faits observés.

Il y a un autre cas où nous devons trouver l'unité, quand même elle ne serait pas dans les choses, c'est lorsque nous mesurons une grandeur par plusieurs méthodes inégalement précises. L'équivalent mécanique de la calorie nous est donné, soit par la loi de Joule (la quantité de chaleur développée dans un fil équivalant à l'énergie EI du courant électrique qui le traverse), soit par l'expérience de Joule sur le frottement de palettes dans l'eau d'un calorimètre, soit par les observations de Hirn sur les machines à vapeur. Les premières mesures sont exactes au $\frac{1}{2000}$, les dernières au $\frac{1}{20}$. Qu'y a-t-il de surprenant à voir l'accord des trois résultats?

Puis il y a des échecs à la tendance vers l'unité. L'objet que Newton exprimait à la fin de l'*Optique*, la description de l'univers au moyen des forces centrales, est depuis longtemps abandonné; même en Astronomie n'est pas expliqué par la formule de Newton. La même branche de la science n'a même réussi à trouver son propre; la dernière théorie de Maxwell n'a pas unifié l'Electricité que la théorie de Fresnel l'Optique. Doit-on conclure de ces insuccès que la synthèse est mûre, mais non qu'elle est impossible? Je crois regarder de plus près on n'a pas le droit de s'en faire cette opinion si naturelle et si sage.

La méthode générale de la science moderne, c'est la diversité des méthodes. Qu'on écoute discuter un physicien et un chimiste, ou même deux physiciens occupés l'un d'Optique, l'autre d'Electricité, ou même un savant qui étudie la réflexion vitreuse et un autre qui étudie la réflexion métallique, ils n'arriveront pas à se comprendre par la même méthode : le souci de la précision, l'importance du calcul, la notion de corps pur, le sens du réel, la manière de procéder, tout cela est différent dans les deux méthodes. Les étudiants seuls reconnaissent, dans les deux sciences, des procédés toujours les mêmes : méthode de mesure, méthode stroboscopique, mesure des forces par les oscillations. En réalité, un physicien et un chimiste ne procèdent pas une pesée de la même manière : ou plutôt une pesée de Physicien et une pesée de chimiste ne sont pas, mais ont le même nom, la même opération; Regnault avait une f

lui de dessécher un gaz; Stas n'essuyait pas un ballon comme tout le monde. La division du travail s'accroît chaque jour et les expérimentateurs ne songent pas à l'unification des résultats, parce qu'ils savent que ces résultats n'ont de sens que par rapport à l'attitude qui les provoque, et que chaque attitude a une originalité qui la rend incomparable. Ce n'est pas la difficulté de la synthèse qui les arrête; c'est du sens de cette synthèse qu'ils se méfient.

Il y a cependant une tendance à des unités de détail : besoin de l'esprit qui ne saurait travailler sans un réseau directeur, ou de la mémoire qui ne pourrait se souvenir sans un catalogue commode. Mais qu'on ne s'y trompe pas : cette unité ne sert pas à coordonner les faits acquis, elle sert à prévoir des faits inconnus; elle n'est pas une satisfaction de dilettante, elle est un outil de chercheur. Les lois d'une certaine Optique géométrique ont abouti à la construction des microscopes ou des appareils photographiques de Zeiss; les lois de l'Optique fresnelienne ont abouti à la photographie des couleurs ou à la saccharimétrie; ni les unes ni les autres n'ont donné une bonne explication des météores naturels, les halos ou le bleu du ciel. On n'a pas trouvé une classification irréprochable des quelques métalloïdes qu'on connaît, mais on a fait, en Chimie organique, une très féconde unité avec les corps artificiels que l'on obtient par synthèse. On groupe ce qu'on découvre, non ce qu'on connaît; et on le découvre parce que la pensée l'a groupé d'abord. Il n'y a pas là l'unité d'une grande sphère qui fermerait le

monde physique, mais l'unité de plusieurs centres m rayonnant vers des faits nouveaux. Concluons donc nécessité, pour les recherches, de groupements parti colorations propres, et laissons aux métaphysicien chambre la recherche de l'unité totale.

X. — *Hiérarchie de ces tendances. Conclusion.*

Morcelage, Calcul intégral, quantification, anthropo phisme, simplicité, unité, voilà donc les tendances esprit actif aux prises avec le réel. Mais ces tendances, nous venons de noter isolément, ne s'accordent pas jours. L'unité exclut la simplicité : à mesure qu'on a v expliquer, par la théorie cinétique, un plus grand nor de propriétés des gaz, il a fallu compliquer de plus en la molécule; en Chimie, on ne rend compte de toutes isoméries que par la forme tétraédrique des atome carbone, et il faudrait construire d'inextricables é faudages de tétraèdres pour rendre compte des val numériques des pouvoirs rotatoires. Nous allons ach notre étude du motif de la science en cherchant com on a fait l'accord, ou plutôt la hiérarchie, de ces m fondamentaux.

D'abord, il nous faut des bases réalisables, fixes et m rables; c'est la résistance en Electricité, une raie spec en Optique, le balancier et le mètre partout : éta maniables faits avec les substances qui nous entouren placés dans les conditions de notre vie quotidienne Ma

contact du réalisme grossier est pour la science une sujétion dont elle cherche à s'affranchir; au lieu de prendre pour étalon de longueur le mètre des Archives, nous prenons maintenant la longueur d'onde d'une raie dans l'appareil de M. Michelson. Mais ce mépris du journalier n'a pour but que d'accroître la précision de nos mesures : la méthode de M. Michelson est plus sensible que le vernier. Comme on a substitué le mètre en éther au mètre en platine, à l'unité naturelle de masse, la masse astronomique, donnée par la loi de Newton¹, mais impossible à calculer exactement dans l'ignorance où nous sommes de la densité précise de la terre, on substitue une unité arbitraire, mais facile à conserver et à reproduire, le kilogramme du Pavillon de Breteuil. Dans la mesure des longueurs, on a méprisé le donné quotidien, dans la mesure des masses, on l'a respecté; dans les deux cas, on est arrivé à une précision plus grande. Nous sommes donc d'abord guidés dans nos mesures par le souci de la précision, c'est-à-dire de la quantité, qui est ainsi, dès le début de toute recherche, la forme sous laquelle nous tournons vers une action plus haute notre dépendance à l'égard de notre vie matérielle.

Puis, s'élevant au-dessus du donné, la science prend pour second fondement de ses travaux quelques grandes intuitions, comme les principes de la Mécanique, le principe de Carnot, la transversalité des vibrations, le cinétisme rotatoire de l'éther. Ce que nous avons dit au paragraphe de

1. Cette masse produirait sur une masse égale, à l'unité de distance, l'unité d'accélération, en supposant la loi de Newton. C'est 15 tonnes environ.

l'anthropomorphisme suffit à faire pressentir l'intuition mécanique, la plus commune de toutes; nous avons vu comment elle contient à la fois du donné et de la vie et comment elle exprime une certaine forme de notre action sur les choses, action dérivée de l'action de nos bras et qu'on pourrait appeler l'utilisation des muscles de la matière. Le principe de Carnot, en introduisant l'idée de réversibilité, a ouvert une voie merveilleuse au Calcul intégral; par la notion de rendement maximum, il s'est appliqué plus directement à la construction des machines thermiques; par ses deux caractères, il nous a permis une action déjà plus complète; cependant son succès a montré que, bien que sa formule soit toute relative à l'action, elle était riche en quelque inexprimable réalité, comme si nous avions découvert un plan de clivage de l'univers, dont la direction était certaine et dont la place est introuvable. Nous n'entamons pas ici le long travail qu'exige l'examen de ces intuitions communes mystérieuses du réel et de notre activité; nous n'ont souverainement vécues que ceux qui les ont observées, découvertes, dont l'historien peut admirer l'origine et les résultats, mais qu'on défigure si on veut les analyser parce que leur formule en masque la réalité intime et parce que le germe de vie qui est en elles ne se développe pas sans cette formule. Toujours pouvons-nous dire que les grandes intuitions de la science ouvrent des modes nouveaux d'action, et que leur constant progrès vers une action plus pure et plus large est une des formes les plus vivantes du progrès de l'humanité.

Après l'intuition scientifique, l'organisation scientifique. Là encore, activité humaine; activité non d'homme de génie, mais d'ingénieur plutôt; non possession de la nature par ce que l'esprit a de meilleur, mais possession par la mémoire, par la faculté de calcul ou par le sens de l'ordre; non domination éternelle, mais domination journalière. Pour rendre les intuitions désormais maniabiles, on les exprimera par une loi simple, soit en compliquant une loi moins importante, soit, le plus souvent, en changeant une unité. Puis on groupera le plus de faits possible autour de ces intuitions, ce qui réussira puisqu'elles sont les moins artificielles des lois, et puisque, par leur facile usage, elles suggéreront de nouveaux faits qui leur seront déjà unis avant même d'être découverts. Elles seront ainsi des centres de méthode et des centres didactiques à la fois, les centres de ces faisceaux colorés qui, projetés sur l'univers, y dessineront les contours du morcelage méthodique. Ainsi l'organisation scientifique concilie la simplicité et l'unité, l'unité et le morcelage.

Voilà, en quelques lignes, en quoi la science est action.

Qu'on ne conclue pas d'ailleurs au scepticisme. La science touche au réel, au début des recherches, par les supports matériels des premières mesures et par un côté de l'intuition; et elle y touche, à la fin, par les expériences qu'elle a suggérées. Elle n'est point un approfondissement du donné; elle n'est pas, non plus, un idéal échafaudage, d'autant plus incertain qu'on s'éloignerait davantage de l'observation pure; elle est un pont jeté entre deux régions de la réalité.

Elle ne creuse pas notre connaissance, elle ne la sublime pas, elle l'étend. Elle est moins l'étude de ce qui est que de ce qui va être par elle. Elle n'est pas un idéalisme, elle est un artifice.

Qu'on ne conclue pas davantage à un positivisme étroit où l'on n'admettrait que les faits auxquels elle a abouti. Ces faits ne sont pas le meilleur de la science, et, du reste, ils sont inexprimables sans les intuitions, les principes et les postulats qui dépassent tout empirisme.

Nous n'avons donc pas le droit d'isoler dans la Physique trois moments, un moment positif, au départ, un moment positif, au but, et, au milieu, diverses démarches de l'esprit que nous négligerions comme accessoires. C'est pour avoir isolé le fait de la vie qui seule lui donnait une signification que quelques personnes ont vu dans les irréfutables critiques du fait une négation même de la science; elles croyaient entendre que le fait était un symbolisme arbitraire du réel, que l'homme pouvait trouver dans tout phénomène la loi qu'il voulait et que deux théories contradictoires étaient vraies à la fois; absurde interprétation à laquelle on aboutit logiquement en écartant de la Physique l'activité humaine, et dont l'absurdité condamne simplement la conception étroitement intellectualiste qu'on s'était faite de la science. L'arbitraire disparaît et les contradictions se dissolvent quand on rétablit la définition de la science dans toute sa richesse. Mais en même temps apparaît la conclusion que nous avons annoncée au début de cette étude. Puisque les résultats scientifiques n'ont pas de sens sans la spontanéité

humaine, le déterminisme scientifique n'est exprimable qu'en termes de spontanéité. Qu'on le discute, rien n'est plus légitime; mais il est le problème second; la liberté n'est pas une évaporation du déterminisme, le déterminisme est une cristallisation de la liberté. On n'a plus le droit de faire des objections à notre liberté au nom du déterminisme physique; on en pourrait faire au déterminisme au nom de la liberté. Sans doute la position du déterminisme est inexpugnable sur certains points, mais c'est une position de défense. Enfin le déterminisme, quand il existe, n'est pas accessible à la connaissance, mais à l'action; il est l'invisible élasticité de la nature qui cède et résiste, comme une argile, à la main qui la pétrit; quiconque veut être simplement spectateur de la science ne verra que le geste libre du savant qui moule l'univers; seul l'acteur de ce tableau vivant percevra un déterminisme extérieur, mais il le percevra dans ses muscles, non devant ses yeux, et à travers la spontanéité de son effort. Il n'y a donc pas deux domaines, dont l'un empiéterait chaque jour sur l'autre : liberté et déterminisme sont dans deux plans différents; et si un examen superficiel nous montre que le déterminisme gagne du terrain chaque jour, une étude plus profonde nous montre que la liberté s'étend aussi pour le porter. Activité, spontanéité, liberté, tout cela n'est pas encore la liberté morale; mais le problème moral n'est plus écarté *a priori*; que le savant rentre en lui-même et se rappelle certaines heures plus pleines de sa vie, ou qu'il laisse son activité dominatrice se heurter à d'autres êtres

que les corps bruts de la Physique, voilà de nouvelles intuitions suggérées, de nouvelles attitudes esquissées, le problème du devoir s'offre à lui; et c'est la vie scientifique, par le progrès même de son développement, qui l'aura inévitablement posé.

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT	V
-------------------------	---

HISTOIRE DES SCIENCES

CANTOR (M.). — Origines du Calcul infinitésimal.	3
MILHAUD (G.). — Note sur les origines du Calcul infinitésimal. . .	27
GÜNTHER (S.). — Histoire des origines de la loi newtonienne de la gravitation	49
BOUASSE (H.). — Sur l'histoire des principes de la Thermodynamique	77

LOGIQUE DES SCIENCES

MAC COLL (H.). — La Logique symbolique et ses applications. . .	135
JOHNSON (W. E.). — Sur la théorie des équations logiques	185
PORETSKII (P.). — Théorie des égalités logiques à trois termes a , b et c	201
SCHRÖDER (E.). — Sur une extension de l'idée d'ordre	235
RUSSELL (B.). — L'idée d'ordre et la position absolue dans l'espace et le temps.	241
PEANO (G.). — Les définitions mathématiques.	279
BURALI-FORTI (C.). — Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel	289

PADOA (A.). — Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une théorie déductive quelconque.	309
PIERI (M.). — Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique.	367
MACFARLANE (A.). — Les idées et principes du Calcul géométrique.	405
LECHALAS (G.). — De la comparabilité des divers espaces.	425
HADAMARD (J.). — Note sur l'induction et la généralisation en Mathématiques	441
BLONDLOT (R.). — Exposé des principes de la Mécanique.	445
POINCARÉ (H.). — Sur les principes de la Mécanique.	457
LE VERRIER (U.). — Sur la genèse et la portée des principes de la Thermodynamique	495
KOZŁOWSKI (W.-M.). — La combinaison chimique au point de vue de la Théorie de la connaissance.	529
WALD (F.). — Étude critique sur les principaux concepts fondamentaux de la Chimie.	545
HOUSSAY (F.). — Les théories atomiques en Biologie.	595
VAILATI (G.). — Des difficultés qui s'opposent à une classification rationnelle des sciences.	609
WILBOIS (J.). — Sur un argument tiré du déterminisme physique en faveur de la liberté humaine	633

m- Urban
Library University of Washington
BIBLIOTHÈQUE DU CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE

III

Logique

et

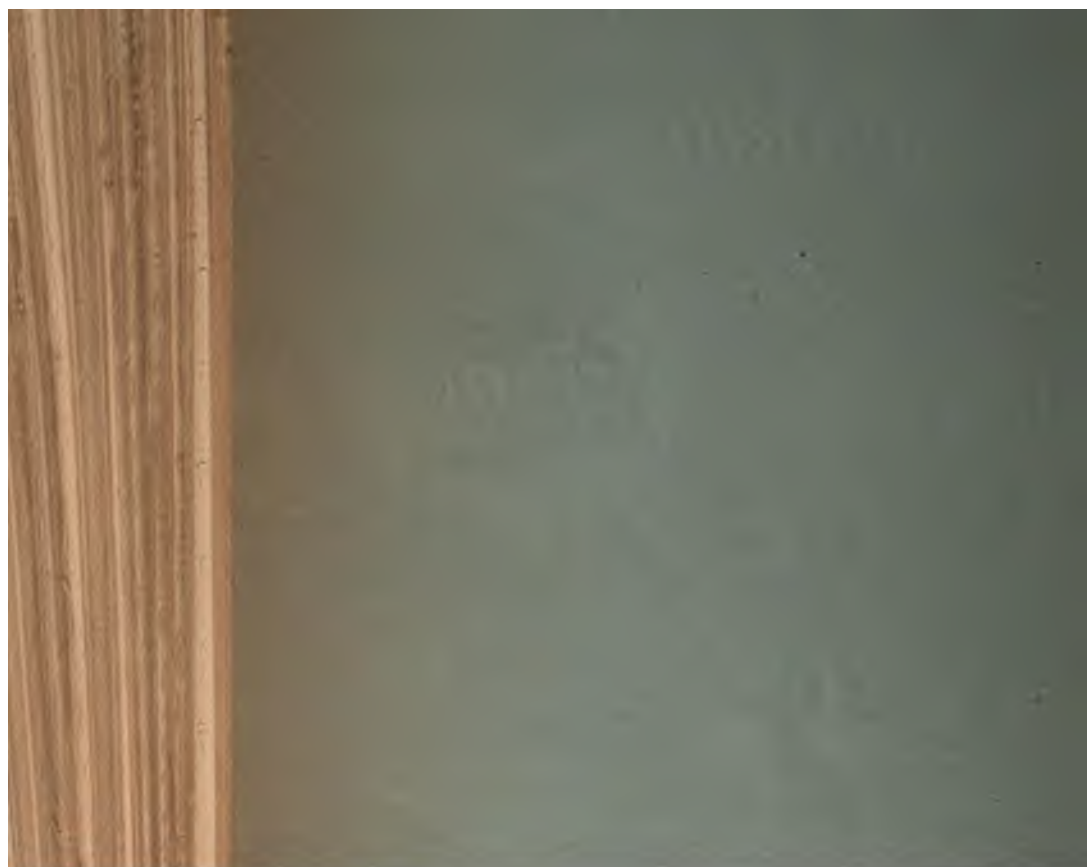
Histoire des Sciences

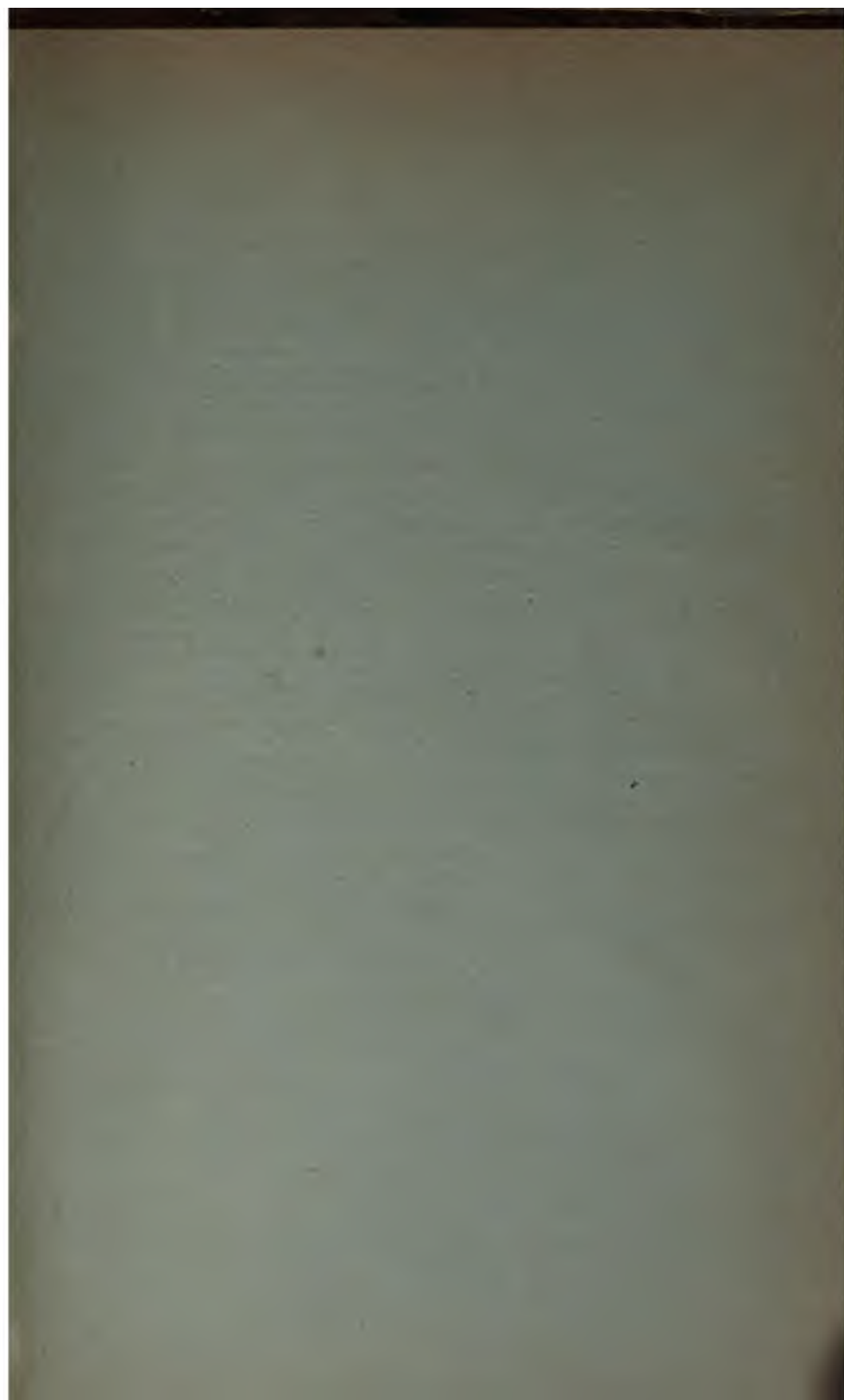


PARIS

Librairie Armand Colin

5, rue de Mézières, 5





Histoire de la Langue et de la Littérature française, des Origines à 1900, ornée de 156 planches hors texte, dont 24 en couleur, publiée sous la direction de L. PETIT DE JULLEVILLE, professeur à l'Université de Paris (Ouvrage complet en 8 volumes) :

- | | |
|---|--|
| I : Moyen âge : des Origines à 1500 (1 ^{re} partie). | VI : Dix-huitième siècle. |
| II : Moyen âge : des Origines à 1500 (2 ^e partie). | VII : Dix-neuvième siècle (Période romantique, 1800-1830). |
| III : Seizième siècle. | VIII : Dix-neuvième siècle (Période contemporaine, 1830-1900). |
| IV : Dix-septième siècle (1 ^{re} partie, 1601-1660). | |
| V : Dix-septième siècle (2 ^e partie, 1661-1700). | |

Chaque volume in-8°, broché, 20 fr. ; avec demi-reliure, tête dorée, ... 25 fr.

Histoire générale, du IV^e siècle à nos jours, publiée sous la direction de ERNEST LAVISSE, de l'Académie française, professeur à l'Université de Paris, et ALFRED RAMBAUD, sénateur, membre de l'Institut, professeur à l'Université de Paris (Ouvrage complet en 12 volumes).

- | | |
|--|---|
| I : Les Origines (285-1000). | VII : Le Dix-huitième siècle (1715-1789). |
| II : L'Europe féodale : les Croisades (1095-1270). | VIII : La Révolution française (1789-1799). |
| III : Formation des Grands États (1270-1492). | IX : Napoléon (1800-1815). |
| IV : Renaissance et Réforme : les nouveaux mondes (1492-1559). | X : Les Monarchies constitutionnelles (1815-1847). |
| V : Les Guerres de Religion (1559-1648). | XI : Révolutions et Guerres nationales (1848-1870). |
| VI : Louis XIV (1648-1715). | XII : Le Monde contemporain (1870-1900). |

Chaque volume in-8°, broché, 16 fr. ; avec demi-reliure, tête dorée, ... 20 fr.

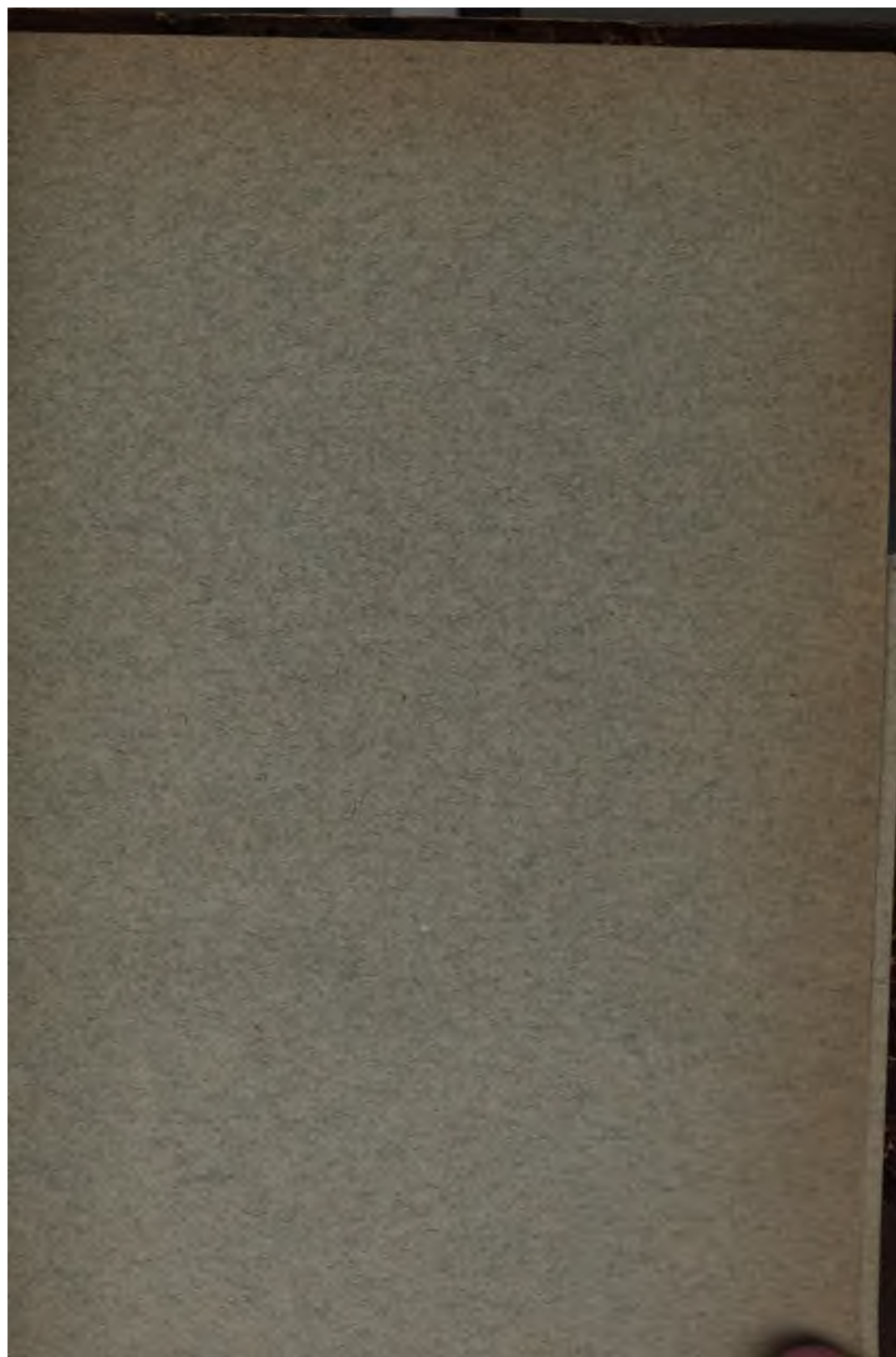
Histoire politique de la Révolution française, Origines et Développement de la Démocratie et de la République (1789-1804), par A. AULARD, professeur à l'Université de Paris. Un volume in-8° raisin de 816 pages, broché, 12 fr. ; avec demi-reliure, tête dorée, ... 16 fr.

Histoire politique de l'Europe contemporaine. Évolution des partis et des formes politiques (1814-1896), par M. CH. SEIGNOBOS, maître de conférences à la Faculté des lettres de l'Université de Paris (Deuxième édition). Un volume in-8° carré de 800 pages, br., 12 fr. ; avec demi-reliure, tête dorée. 16 fr.

Ouvrage couronné par l'Académie française.

Histoire de la Civilisation française (2 volumes), par ALFRED RAMBAUD : "Depuis les Origines jusqu'à la Fronde. — "Depuis la Fronde jusqu'à la Révolution. Chaque volume in-18 Jésus, broché, ... 4 fr.

Histoire de la Civilisation contemporaine en France, (Édition entièrement refondue et mise à jour jusqu'en 1900), par ALFRED RAMBAUD, membre de l'Institut, professeur à l'Université de Paris. Un volume in-18 Jésus de 847 pages, broché, ... 5 fr.



THE UNIVERSITY OF MICHIGAN
GRADUATE LIBRARY

DATE DUE

~~CLERK~~

~~JUN 14 1974~~

DEC 31 1974

UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 03961 6274

**DO NOT REMOVE
OR
MUTILATE CARD**

